Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Блошанский, Критерий слабой обобщенной локализации в классе L_1 для кратных тригонометрических рядов Фурье с точки зрения изометрических преобразований, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 508–521

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:02:09

УДК 517.5

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ В КЛАССЕ L_1 ДЛЯ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И. Л. Блошанский

В работе ставится и изучается задача: как изменяются (если изменяются) множества сходимости и расходимости всюду или почти всюду (п.в.) кратного ряда (интеграла) Фурье функции $f \in L_p$, $p \geq 1$, $f(x) = 0$, на некотором множестве положительной меры $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$, $N \geq 2$, в зависимости от поворота системы координат, т.е. в зависимости от элемента $\tau \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – группа вращений $\mathbb{R}^N$ относительно начала координат. Сформулированная выше задача была сведена к изучению вопроса об изменении геометрии множеств $\tau^{-1}(\mathfrak{A}) \cap \mathbb{T}^N$ (где $\tau^{-1} \in \mathcal{F}$ такой, что $\tau^{-1} \cdot \tau = 1$) и $\mathbb{T}^N \setminus \text{supp}(f \circ \tau)$ в зависимости от “поворота”, т.е. от $\tau \in \mathcal{F}$. В работе рассматриваются две постановки данной задачи (в зависимости от того, как понимается ряд Фурье функции $f \circ \tau$) и приведены (для обоих случаев) возможные решения задачи в классе $L_1(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 2$.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. В 1998 г. Саакян [1] установил, что для любой функции $f \in C(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi)^N$, $N \geq 2$ (а, следовательно, и для непрерывной функции с расходящимся по прямоугольникам всюду на $\mathbb{T}^N$ тригонометрическим рядом Фурье – пример Феффермана [2]), существует гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ такой, что тригонометрический ряд Фурье суперпозиции $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x))$ сходится равномерно по прямоугольникам. В том же году Галстян и Карагулян [3] доказали в некотором смысле “противоположный” результат, а именно: для любой функции $f \in C(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 2$ (не имеющей интервалов постоянства в $\mathbb{T}^N$), существует гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ такой, что ряд Фурье $f \circ \varphi$ расходится по прямоугольникам почти всюду (п.в.).

В одномерном случае исследования по этой тематике связаны с такими именами как Бор, Саакян, Кахан, Олевский, Качнельсон и др. Так в 1935 г. Бор [4] доказал, что для любой функции $f \in C(\mathbb{T}^1)$ существует гомеоморфизм $\varphi: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ такой, что ряд Фурье суперпозиции $f \circ \varphi$ сходится равномерно. В свою очередь, Олевский [5], решив проблему Лузина, установил (1981 г.) существование непрерывной функции $f \in C(\mathbb{T}^1)$ такой,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01-00355.

что для любого гомеоморфизма $\varphi: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{T}^1$ ряд Фурье суперпозиции $f \circ \varphi$ не является абсолютно сходящимся. Подробный обзор результатов такого плана в одномерном случае см. в работах Кахана [6] и Олевского [7], [8].

Вернемся к специфике кратного случая. В 1999 г. Драгошанский [9] анонсировал следующий результат: существует функция $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$ (носитель которой находится в квадрате $\{x \in \mathbb{T}^2: |x_1| + |x_2| < \pi\sqrt{2}/3\}$) такая, что двойной тригонометрический ряд Фурье f сходится по прямоугольникам п.в. на $\mathbb{T}^2$, а двойной тригонометрический ряд Фурье функции $f \circ \tau$, где τ – поворот системы координат $\mathbb{R}^2$ на угол $\pi/4$, расходится (по прямоугольникам) на множестве положительной меры.

Нами с 1983 по 1990 гг. (см., например, [10]–[14]) был получен ряд результатов по описанию структурно-геометрических характеристик множеств сходимости и расходимости п.в. и всюду кратных тригонометрических рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) и интегралов Фурье функций из классов L_p , $p \geq 1$, равных нулю на некотором измеримом множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$.

В частности, для произвольного измеримого множества $\mathfrak{A}$, мера которого $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ – N -мерная мера Лебега), были найдены критерии (в терминах структуры и геометрии множества $\mathfrak{A}$) справедливости слабой обобщенной локализации почти всюду (СОЛ) для указанных разложений.

Полученные нами результаты позволяют сделать некоторые выводы о сходимости п.в. и всюду кратных разложений Фурье для суперпозиции $f \circ \varphi$, когда $f \in L_p$, $p \geq 1$, а $\varphi \in \{\varphi\}$ – множеству изометрических отображений. В настоящей работе мы укажем несколько характерных результатов (дающих представление о возможных решениях рассматриваемой задачи) для кратных тригонометрических рядов (интегралов) Фурье функций $f \circ \varphi$, когда $f \in L_1$, $f(x) = 0$ на некотором измеримом множестве $\mathfrak{A}$, а в качестве изометрического отображения φ рассматривается τ – поворот системы координат.

2. Постановка задач. Предварительно введем следующие обозначения. Пусть $S_n(x; f)$ – прямоугольная ($n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$), а $S_{n_0}(x; f)$ – квадратная ($n_1 = \dots = n_N = n_0 \in \mathbb{Z}_+^1$) частичные суммы 2π -периодической (по каждому аргументу) функции $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 2$.

Обозначим через $\mathcal{F}'$ группу вращений $\mathbb{R}^N$ относительно начала координат, и пусть $\mathcal{F}_0$ – множество вращений из $\mathcal{F}'$, являющихся композициями вращений во всех двумерных координатных плоскостях на углы кратные $\pi/2$.

Положим¹

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}_0. \quad (1)$$

Далее, для любого множества $E \subset \mathbb{R}^N$ и для любого $\tau \in \mathcal{F}$ обозначим $\tau(E) = \{y \in \mathbb{R}^N: y = \tau(x), x \in E\}$. Аналогично определяется и множество $\tau^{-1}(E)$, где $\tau^{-1} \in \mathcal{F}$ такой, что $\tau^{-1} \cdot \tau = 1$. Обозначим также через

$$\mathbb{B}(O, \pi) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N: \sum_{j=1}^N x_j^2 < \pi^2 \right\} \quad (2)$$

¹Вращения $\tau \in \mathcal{F}_0$, очевидно, не могут изменить множества сходимости или расходимости кратных разложений Фурье.

шар, вписанный в куб $\mathbb{T}^N$. Очевидно, что для любого $E \subset \mathbb{B}(O, \pi)$ множество $\tau(E) \subset \mathbb{T}^N$; очевидно также, что для любого $E \not\subset \mathbb{B}(O, \pi)$ (по крайней мере) существует $\tau \in \mathcal{F}$ такое, что $\tau(E) \not\subset \mathbb{T}^N$.

Учитывая, что нами (в настоящей работе) рассматриваются 2π -периодические функции $f(x)$, возникает вопрос о том, как понимать ряд Фурье функции $(f \circ \tau)(x) = f(\tau(x))$ для $\tau \in \mathcal{F}$.²

Сформулируем два варианта того, как можно понимать ряд Фурье функции $f \circ \tau$.

Фиксируем произвольное $\tau \in \mathcal{F}$. Для любой функции $f(x) \in L_1(\mathbb{T}^N)$ ³ определим 2π -периодические (по каждому аргументу) функции $g_\tau^{(j)}(x)$, $j = 1, 2$, так, что на $\mathbb{T}^N$ эти функции определяются равенствами

$$g_\tau^{(1)}(x) = (f \circ \tau)(x) = f(\tau(x)), \quad x \in \mathbb{T}^N, \quad (3)$$

$$g_\tau^{(2)}(x) = (f \circ \tau)(x) = f(\tau(x)) \cdot \chi_{\mathbb{T}^N}(\tau(x)), \quad x \in \mathbb{T}^N, \quad (4)$$

где $\chi_{\mathbb{T}^N}(\cdot)$ – характеристическая функция куба $\mathbb{T}^N$.

И в первом и во втором случаях ставится задача: как “меняется поведение” частичных сумм $S_n(x; g_\tau^{(l)})$, $l = 1, 2$, при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$) в зависимости от $\tau \in \mathcal{F}$; точнее, как изменяются (если изменяются) множества сходимости и расходимости (всюду или п.в.) кратного ряда Фурье функции $f \in L_p$, $p \geq 1$, $f(x) = 0$, на некотором измеримом множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $\mu \mathfrak{A} > 0$, $N \geq 2$, в зависимости от τ . Далее в тексте: для $l = 1$ – задача 1, а для $l = 2$ – задача 2.

Так как нами был изучен ранее вопрос об изменении структуры и геометрии множеств сходимости и расходимости (п.в. и всюду) указанных рядов (см. [10]–[14]) в зависимости от изменения структуры и геометрии множества $\mathfrak{A}$, то обе задачи фактически сводятся к изучению вопроса об изменении геометрии множеств $\tau^{-1}(\mathfrak{A}) \cap \mathbb{T}^N$ и $\mathbb{T}^N \setminus \text{supp}(f \circ \tau)$ в зависимости от “поворота”, т.е. от $\tau \in \mathcal{F}$ (см. доказательства всех нижеприведенных теорем).

Заметим, что задача 1, являясь более сложной задачей, одновременно является и более естественной для кратных разложений Фурье при рассмотрении “задачи о поворотах”.

Отметим также, что “исчезновение” (вообще говоря) множества $\tau^{-1}(\mathbb{T}^N) \setminus \mathbb{T}^N$, а тем более, множества $\overline{\mathbb{B}}(O, \pi\sqrt{N}) \setminus \mathbb{T}^N$, где шар

$$\overline{\mathbb{B}}(O, \pi\sqrt{N}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N x_j^2 \leq N\pi^2 \right\},$$

при определении функций $g_\tau^{(l)}$, $l = 1, 2$ (см. (3), (4)), естественно для 2π -периодических функций. Однако, этого “исчезновения” можно избежать в задаче 2, если рассматривать более “узкий” класс функций $f(x)$, а именно таких, что $\text{supp } f \subset \mathbb{B}(O, \pi)$ (см. (2)).⁴

В настоящей работе мы укажем возможные решения задачи 2 для любого $N \geq 2$ и решение задачи 1 (учитывая существенно большую громоздкость выкладок при исследовании задачи 1 по сравнению с задачей 2) только для $N = 2$.

²Заметим, что для интегралов Фурье $\int_{\mathbb{R}^N} \hat{h}(\xi) e^{ix\xi} d\xi$, $x \in \mathbb{R}^N$, функции $h \in L_1(\mathbb{R}^N)$ проблем в “этом смысле” не возникает.

³Естественно, что функция $f(x)$ является 2π -периодической по каждому аргументу.

⁴В задаче 1 этого “исчезновения” путем выбора “меньшего” $\text{supp } f$ можно также избежать, но (как нетрудно подсчитать) только при $N = 2$ и $N = 3$.

3. Решение задачи 2.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{F}$ – группа вращений $\mathbb{R}^2$, заданная соотношением (1). Для любого ε , $0 < \varepsilon < (2\pi)^2$, существуют открытое множество $\mathfrak{A}_\varepsilon \subset \mathbb{T}^2$, $\mu\mathfrak{A}_\varepsilon > (2\pi)^2 - \varepsilon$ (μ – мера), и функция $f = f_\varepsilon \in L_1(\mathbb{T}^2)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}_\varepsilon$, такая, что $\text{supp } f \subset \mathbb{B}(O, \pi)$ (см. (2)) и

1) выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n_0 \rightarrow \infty} |S_{n_0}(x; f)| = +\infty \quad \text{в каждой точке } x \in \mathbb{T}^2; \quad (5)$$

2) для любого $\tau \in \mathcal{F}$ найдется открытое (непустое) множество $\Omega = \Omega_\varepsilon(\tau) \subset \mathfrak{A}_\varepsilon$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f \circ \tau) = 0 \quad \text{в каждой точке } x \in \Omega. \quad (6)$$

Здесь запись $f \circ \tau$ понимается в смысле равенств (4), т.е. $f \circ \tau = g_\tau^{(2)}$.

Что касается $N \geq 3$, то справедлив “несколько более слабый” результат; например, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{F}$ – группа вращений $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, заданная соотношением (1). Для любого j , $1 \leq j \leq N$, и для любого ε , $0 < \varepsilon < (2\pi)^N$, существуют открытое множество $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{\varepsilon, j} \subset \mathbb{T}^N$, $\mu\mathfrak{A} > (2\pi)^N - \varepsilon$ (μ – мера), и функция $f = f_{\varepsilon, j} \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, такая, что $\text{supp } f \subset \mathbb{B}(O, \pi)$ (см. (2)) и

1) выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n_0 \rightarrow \infty} |S_{n_0}(x; f)| = +\infty \quad \text{в каждой точке } x \in \mathbb{T}^N; \quad (7)$$

2) для любого вращения $\tau \in \mathcal{F}$ (кроме вращений вокруг осей, содержащих ось координат Ox_j) найдется открытое (непустое) множество $\Omega = \Omega_{\varepsilon, j}(\tau) \subset \mathfrak{A}$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f \circ \tau) = 0 \quad \text{в каждой точке } x \in \Omega. \quad (8)$$

Здесь запись $f \circ \tau$ понимается в смысле равенств (4), т.е. $f \circ \tau = g_\tau^{(2)}$.

4. Решение задачи 1. Справедлив аналог теоремы 1, точнее

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathcal{F}$ – группа вращений $\mathbb{R}^2$, заданных соотношением (1). Для любого ε , $0 < \varepsilon < (2\pi)^2$, существуют открытое множество $\mathfrak{A}_\varepsilon \subset \mathbb{T}^2$, $\mu\mathfrak{A}_\varepsilon > (2\pi)^2 - \varepsilon$ (μ – мера), и функция $f = f_\varepsilon \in L_1(\mathbb{T}^2)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}_\varepsilon$, такая, что $\text{supp } f \not\subset \mathbb{B}(O, \pi)$ (см. (2)) и

1) выполнено условие

$$\overline{\lim}_{n_0 \rightarrow \infty} |S_{n_0}(x; f)| = +\infty \quad \text{в каждой точке } x \in \mathbb{T}^2; \quad (9)$$

2) для любого $\tau \in \mathcal{F}$ найдется открытое (непустое) множество $\Omega = \Omega_\varepsilon(\tau) \subset \mathfrak{A}_\varepsilon$ такое, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f \circ \tau) = 0 \quad \text{в каждой точке } x \in \Omega. \quad (10)$$

Здесь запись $f \circ \tau$ понимается в смысле равенств (3), т.е. $f \circ \tau = g_\tau^{(1)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Во всех трех теоремах множества сходимости (к нулю) представляют из себя конечный набор открытых прямоугольников (при $N \geq 3$ – параллелепипедов) со сторонами ($N \geq 3$ – ребрами), параллельными координатным осям.

Для кратных интегралов Фурье, чьи “прямоугольные частичные суммы” записаны в виде

$$J_\alpha(x; h) = \frac{1}{\pi^N} \int_{\mathbb{R}^N} \cdots \int h(x_1 + u_1, \dots, x_N + u_N) \frac{\sin \alpha_1 u_1}{u_1} \cdots \frac{\sin \alpha_N u_N}{u_N} du_1 \cdots du_N, \quad (11)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}_+^N$, также справедливы результаты теорем 1 и 2 с той оговоркой, что в этих теоремах сходимость в каждой точке заменена сходимостью почти всюду, а квадратные частичные суммы в оценках (5), (7) заменены прямоугольными частичными суммами (11). Эти результаты (в свою очередь) являются следствиями критериев СОЛ для интегралов Фурье в классах $L_1(\mathbb{R}^N)$ (см., например, [11], [13]). Отметим также, что функция $h \circ \tau$, $\tau \in \mathcal{F}$, в этих результатах понимается в “обычном смысле”, т.е. $(h \circ \tau)(x) \equiv h(\tau(x))$, $x \in \mathbb{R}^N$.

Часть доказанных в настоящей работе результатов была анонсирована нами на международная конференции “Теория приближения функций и операторов”, проходившей с 28 февраля по 3 марта 2000 г. в г. Екатеринбурге (см. [15]).

5. Доказательство основных результатов. Для доказательства теорем 1–3 нам потребуется следующий результат, доказанный нами в [16] (см. также [12] и [14]). Пусть F – произвольное замкнутое множество, $F \subset \mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N$, $N \geq 1$, и пусть $\text{pr}_{(j)}\{F\}$ – ортогональная проекция множества F на ось Ox_j , $j = 1, \dots, N$. Положим

$$\mathcal{E}(F) = \bigcup_{j=1}^N (\text{pr}_{(j)}\{F\} \times [-\pi, \pi]^{N-1}). \quad (12)$$

ТЕОРЕМА А. Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное замкнутое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 1$, $0 < \mu \mathfrak{A} < (2\pi)^N$, и пусть $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$. Тогда

- 1) существует функция $g_0 \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $g_0(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, такая, что

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} \overline{\lim} |S_{n_0}(x; g_0)| = +\infty \quad \text{в каждой точке } \mathcal{E}(\overline{\mathfrak{B}}), \quad (13)$$

где $\overline{\mathfrak{B}}$ – замыкание множества $\mathfrak{B}$, множество $\mathcal{E}(\cdot)$ определено в (12);

- 2) если $\mathcal{E}(\overline{\mathfrak{B}}) \neq \mathbb{T}^N$, то для любой функции $g \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $g(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, выполнено условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; g) = 0 \quad \text{в каждой точке } \mathbb{T}^N \setminus \mathcal{E}(\overline{\mathfrak{B}}) = \prod_{j=1}^N (\mathbb{T}^1 \setminus \text{pr}_{(j)}\{\overline{\mathfrak{B}}\}). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Учитывая результат теоремы А, построим множество $\mathfrak{A}$ и функцию $f(x)$, о которых говорится в условии теоремы 1.

Фиксируем произвольное ε , $0 < \varepsilon < (2\pi)^2$, и выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы $0 < \delta < \min(\varepsilon, 1/1000)$. Положим

$$a = \frac{\pi^2}{2\delta} - \frac{1}{2}\delta \quad \text{и} \quad b = \frac{\pi^2}{2\delta} + \frac{1}{2}\delta. \quad (15)$$

Рассмотрим следующие два круга: C^+ и C^- , где $C^\pm = C^\pm(\varepsilon) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + (x_2 \pm a)^2 \leq b^2\}$. Положим

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\varepsilon = C^+ \cap C^- \cap \tilde{\mathbb{T}}^2 \quad \text{и} \quad \mathfrak{A}_\varepsilon = \tilde{\mathbb{T}}^2 \setminus \mathfrak{B}, \quad \text{где } \tilde{\mathbb{T}}^2 = (-\pi, \pi)^2. \quad (16)$$

Множество $\mathfrak{B}$ можно назвать “луночкой”. Очевидно, что δ , участвующее в построении множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, можно выбрать так, чтобы $\mu\mathfrak{B} < \varepsilon$.

Далее, так как ортогональная проекция замыкания множества $\mathfrak{B}$ (см. (16)) на ось Ox_1 , т.е. множество $\text{pr}_{(1)}\{\overline{\mathfrak{B}}\} = [-\pi, \pi]$, то, учитывая результат теоремы А для $N = 2$ (см. (13)), мы имеем: существует функция $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ (где $\mathfrak{A}$ определено в (16)), такая, что $\text{supp } f = \mathfrak{B} \subset \mathbb{B}(O, \pi)$ (см. (2)) и

$$\lim_{n_0 \rightarrow \infty} |S_{n_0}(x; f)| = +\infty \quad \text{в каждой точке } \tilde{\mathbb{T}}^2.$$

Таким образом, (5) доказано.

С другой стороны, так как для любого $\tau \in \mathcal{F}$ множество $\mathcal{E}(\overline{\mathfrak{B}^{(1)}})$ (см. (12)) (где $\mathfrak{B}^{(1)} = \tau^{-1}(\mathfrak{B})$) уже не совпадает со всем квадратом $\tilde{\mathbb{T}}^2$, то согласно все той же теореме А (см. (14)) для любой функции $g \in L_1(\mathbb{T}^N)$, $g(x) = 0$ на $\mathbb{T}^2 \setminus \mathfrak{B}^{(1)}$, а значит, и для 2π -периодической (по обоим переменным) функции $g = g_\tau^{(2)} = f \circ \tau$ (определение функции $g_\tau^{(2)}$ см. в (4)) имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; g) = 0$ в каждой точке множества $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{E}(\overline{\mathfrak{B}^{(1)}})$, $\mu(\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{E}(\overline{\mathfrak{B}^{(1)}})) > 0$. Заметим, что открытое множество $\tilde{\mathbb{T}}^2 \setminus \mathcal{E}(\overline{\mathfrak{B}^{(1)}}) \subset \mathfrak{A}$. Обозначив это множество через Ω , получаем (6). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем теорему для $j = 1$; для остальных j , $2 \leq j \leq N$, доказательство аналогично. Фиксируем ε , $0 < \varepsilon < (2\pi)^N$, и построим множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ аналогичные (16), но для $N \geq 3$.

Рассмотрим следующие $2N - 2$ шара: $\{C_s^+\}_{s=2}^N$ и $\{C_s^-\}_{s=2}^N$, где

$$C_s^\pm = C_s^\pm(\varepsilon) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{l=1, l \neq s}^N x_l^2 + (x_s \pm a)^2 \leq b^2 \right\}, \quad s = 2, \dots, N,$$

а числа a и b определены в (15). Положим

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\varepsilon = \bigcap_{s=2}^N (C_s^+ \cap C_s^-) \cap \tilde{\mathbb{T}}^N \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\varepsilon = \tilde{\mathbb{T}}^N \setminus \mathfrak{B}, \quad \text{где } \tilde{\mathbb{T}}^N = (-\pi, \pi)^N.$$

Очевидно, что δ (участвующее в построении множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$) можно выбрать так, чтобы $\mu\mathfrak{B} < \varepsilon$.

Далее, так как $\text{pr}_{(1)}\{\overline{\mathfrak{B}}\} = [-\pi, \pi]$, то, учитывая результат теоремы А для $N \geq 3$ (см. (12) и (13)), мы получаем оценку (7).

С другой стороны, так как для любого вращения $\tau \in \mathcal{F}$ (кроме вращений вокруг осей, содержащих ось координат Ox_1) множество $\mathcal{E}(\overline{\mathfrak{B}^{(1)}})$, где $\mathfrak{B}^{(1)} = \tau^{-1}(\mathfrak{B}) \subset \mathbb{B}(O, \pi)$, уже не совпадает со всем кубом $\overline{\mathbb{T}}^N$, то, учитывая результат теоремы А (см. оценку (14)), получаем оценку (8). Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Фиксируем произвольное ε , $0 < \varepsilon < (2\pi)^2$, и выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы $0 < \delta < \min(\varepsilon, 1/1000)$. Положим

$$a = \frac{\pi^2}{32\delta} - \frac{1}{2}\delta, \quad b = \frac{\pi^2}{32\delta} + \frac{1}{2}\delta$$

и для любого $\nu \in (-\pi, \pi)$ рассмотрим два круга

$$C_\nu^\pm = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - \nu)^2 + (x_2 \pm a)^2 \leq b^2\} \quad (17)$$

и множество C_ν – луночку, полученную при их пересечении: $C_\nu = C_\nu^+ \cap C_\nu^-$.

Заметим, что так как $\text{diam } C_\nu = \mu_1 \text{pr}_{(1)}\{C_\nu\} = \pi/2 > \mu_1 \text{pr}_{(2)}\{C_\nu\} = \delta$, то “координатами множества” C_ν можно “считать” точки F^+ и F^- (на плоскости Ox_1x_2) с координатами $F_\nu^\pm = F_\nu^\pm(\nu \pm \pi/4, 0)$; записывать этот факт мы будем так: $C_\nu = C_\nu(F^-, F^+)$.⁵

Далее, для произвольного множества $P \subset \mathbb{R}^2$ и для любого вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ определим сдвиг множества P на вектор ξ :

$$P + \xi = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = x_1 + \xi_1, y_2 = x_2 + \xi_2, (x_1, x_2) \in P\}.$$

Рассмотрим следующие луночки, принадлежащие квадрату $\overline{\mathbb{T}}^2 = [-\pi, \pi]^2$:

1) $\Lambda_c^+ = C_{\pi/4}$, ее координаты

$$\Lambda_c^+ = \Lambda_c^+(A_c^+, B_c^+), \quad \text{где } A_c^+ = A_c^+(0, 0), \quad B_c^+ = B_c^+\left(\frac{\pi}{2}, 0\right);$$

2) $\Lambda_c^- = C_{-\pi/4}$, ее координаты

$$\Lambda_c^- = \Lambda_c^-(A_c^-, B_c^-), \quad \text{где } A_c^- = A_c^-\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad B_c^- = A_c^+;$$

3) $\Lambda_{\text{ур}}^- = C_{-\pi/4} + (-\pi/2, \pi/2)$, ее координаты

$$\Lambda_{\text{ур}}^- = \Lambda_{\text{ур}}^-(A_{\text{ур}}^-, B_{\text{ур}}^-), \quad \text{где } A_{\text{ур}}^- = A_{\text{ур}}^-\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right), \quad B_{\text{ур}}^- = B_{\text{ур}}^-\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

4) $\Lambda_d^+ = C_{\pi/4} + (\pi/2, -\pi/3)$, ее координаты

$$\Lambda_d^+ = \Lambda_d^+(A_d^+, B_d^+), \quad \text{где } A_d^+ = A_d^+\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right), \quad B_d^+ = B_d^+\left(\pi, -\frac{\pi}{3}\right);$$

⁵То есть запись $C_\nu(F^-, F^+)$ означает “множество C_ν ”, а “координаты его” F^- и F^+ .

а также луночки, принадлежащие прямоугольнику $[-3\pi/2, 3\pi/2] \times [-\pi, \pi]$:

5) $\Lambda_{\text{up}}^+ = \Lambda_{\text{up}}^- + (2\pi, 0)$, ее координаты

$$\Lambda_{\text{up}}^+ = \Lambda_{\text{up}}^+(A_{\text{up}}^+, B_{\text{up}}^+), \quad \text{где } A_{\text{up}}^+ = A_{\text{up}}^+\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \quad B_{\text{up}}^+ = B_{\text{up}}^+\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

6) $\Lambda_{\text{d}}^- = \Lambda_{\text{d}}^+ + (-2\pi, 0)$, ее координаты

$$\Lambda_{\text{d}}^- = \Lambda_{\text{d}}^-(A_{\text{d}}^-, B_{\text{d}}^-), \quad \text{где } A_{\text{d}}^- = A_{\text{d}}^-\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right), \quad B_{\text{d}}^- = B_{\text{d}}^-\left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right).$$

Положим

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\varepsilon = \Lambda_{\text{c}}^+ \cup \Lambda_{\text{c}}^- \cup \Lambda_{\text{up}}^- \cup \Lambda_{\text{d}}^+ \quad \text{и} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\varepsilon = \tilde{\mathbb{T}}^2 \setminus \mathfrak{B}, \quad (18)$$

где $\tilde{\mathbb{T}}^2$ определено в (16). Очевидно, что δ , участвующее в построении множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, можно выбрать так, чтобы $\mu\mathfrak{B} < \varepsilon$.

Далее, обозначим

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \left\{ \bigcup_{m,n=-1}^1 (\mathfrak{B} + (2\pi k, 2\pi m)) \right\} \cap \overline{\mathbb{B}}(O, \pi\sqrt{2}) = \mathfrak{B}_{(-3\pi, 3\pi)} \cap \overline{\mathbb{B}}(O, \pi\sqrt{2}), \quad (19)$$

где замкнутый круг $\overline{\mathbb{B}}(O, \pi\sqrt{2}) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 2\pi^2\}$.

Рассмотрим те луночки из множества $\mathfrak{B}_{(-3\pi, 3\pi)}$ (см. (19)), которые имеют непустое пересечение с множеством $\overline{\mathbb{B}}(O, \pi\sqrt{2}) \setminus \mathbb{T}^2$. Учитывая, что $\delta < 10^{-3}$, это будут только луночки Λ_{d}^- и Λ_{up}^+ . Положим

$$K_{\text{d}}^- = \Lambda_{\text{d}}^- \cap \overline{\mathbb{B}}(O, \pi\sqrt{2}) \quad \text{и} \quad K_{\text{up}}^+ = \Lambda_{\text{up}}^+ \cap \overline{\mathbb{B}}(O, \pi\sqrt{2}).$$

Координатами множества K_{d}^- будем считать точки S_{d}^- и B_{d}^- , где $S_{\text{d}}^- = S_{\text{d}}^-(-\sqrt{17}\pi/3, -\pi/3)$, т.е. $K_{\text{d}}^- = K_{\text{d}}^-(S_{\text{d}}^-, B_{\text{d}}^-)$; координатами множества K_{up}^+ будем считать точки A_{up}^+ и S_{up}^+ , где $S_{\text{up}}^+ = S_{\text{up}}^+(\sqrt{7}\pi/2, -\pi/2)$, т.е. $K_{\text{up}}^+ = K_{\text{up}}^+(A_{\text{up}}^+, S_{\text{up}}^+)$.

В таком случае (учитывая (19)) получаем, что замкнутое множество

$$\tilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B} \cup K_{\text{d}}^- \cup K_{\text{up}}^+. \quad (20)$$

Покажем, что для любого α , $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \pi/2$, $\alpha \neq 3\pi/2$, при повороте $\tau = \tau_\alpha$ системы координат на угол α вокруг начала координат множество $\tau^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}})$ обладает следующим свойством:

$$\mu_1[\text{pr}_{(s)}\{\tau^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}}) \cap \overline{\mathbb{T}}^2\}] < 2\pi, \quad s = 1, 2. \quad (21)$$

Пусть α , $0 < \alpha < \pi/2$.⁶ Рассмотрим множество $\tilde{\mathfrak{B}}$. Учитывая (18), (20), это множество состоит из четырех луночек Λ_{c}^+ , Λ_{c}^- , Λ_{up}^- , Λ_{d}^+ и частей луночек Λ_{d}^- и Λ_{up}^+ —

⁶Нетрудно видеть, что достаточно рассмотреть только этот случай.

множеств K_d^- и K_{up}^+ . Учитывая координаты каждого из перечисленных выше подмножеств $\tilde{\mathfrak{B}}$, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{B}} = & \Lambda_c^+(A_c^+, B_c^+) \cup \Lambda_c^-(A_c^-, B_c^-) \cup \Lambda_{up}^-(A_{up}^-, B_{up}^-) \cup \Lambda_d^+(A_d^+, B_d^+) \\ & \cup K_d^-(S_d^-, B_d^-) \cup K_{up}^+(A_{up}^+, S_{up}^+). \end{aligned} \quad (22)$$

Проследим, как “изменяются” при повороте τ следующие множества-отрезки (отрезки, “определяющие” все 6 подмножеств в (22)):

$$[A_c^+, B_c^+], [A_c^-, B_c^-], [A_{up}^-, B_{up}^-], [A_d^+, B_d^+], [S_d^-, B_d^-], [A_{up}^+, S_{up}^+]. \quad (23)$$

Найдем образы отрезков (23) при повороте $\tau = \tau_\alpha$. Обозначим через $\hat{X}$ образ точки X , т.е. $\hat{X} = \tau^{-1}(X)$. Если матрицу оператора τ обозначить через U , то, как известно,

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

и, следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{A}_c^+ &= (0, 0), \quad \hat{B}_c^+ = \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha, \frac{\pi}{2} \sin \alpha \right), \quad \hat{A}_c^- = \left(-\frac{\pi}{2} \sin \alpha, -\frac{\pi}{2} \cos \alpha \right), \\ \hat{A}_{up}^- &= \left(-\pi \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha, -\pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right), \\ \hat{B}_{up}^- &= \left(-\frac{\pi}{2} \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha, -\frac{\pi}{2} \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right), \\ \hat{A}_d^+ &= \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha + \frac{\pi}{3} \sin \alpha, \frac{\pi}{2} \sin \alpha - \frac{\pi}{3} \cos \alpha \right), \\ \hat{B}_d^+ &= \left(\pi \cos \alpha + \frac{\pi}{3} \sin \alpha, \pi \sin \alpha - \frac{\pi}{3} \cos \alpha \right), \\ \hat{S}_d^- &= \left(-\sqrt{17} \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \frac{\pi}{3} \sin \alpha, -\sqrt{17} \frac{\pi}{3} \sin \alpha - \frac{\pi}{3} \cos \alpha \right), \\ \hat{B}_d^- &= \left(-\pi \cos \alpha + \frac{\pi}{3} \sin \alpha, -\pi \sin \alpha - \frac{\pi}{3} \cos \alpha \right), \\ \hat{A}_{up}^+ &= \left(\pi \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha, \pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right), \\ \hat{S}_{up}^+ &= \left(\sqrt{7} \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha, \sqrt{7} \frac{\pi}{2} \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right). \end{aligned}$$

Таким образом, множество $\tau^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}})$, являющееся объединением множеств $\mathcal{N}_j$, $j = 1, \dots, 6$, заданных формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \tau^{-1}(\Lambda_c^+), & \mathcal{N}_2 &= \tau^{-1}(\Lambda_c^-), & \mathcal{N}_3 &= \tau^{-1}(\Lambda_{up}^-), \\ \mathcal{N}_4 &= \tau^{-1}(\Lambda_d^+), & \mathcal{N}_5 &= \tau^{-1}(K_d^-), & \mathcal{N}_6 &= \tau^{-1}(K_{up}^+), \end{aligned} \quad (24)$$

можно записать, учитывая координаты каждого множества $\mathcal{N}_j$ в (24), в виде

$$\begin{aligned}\tau^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}}) &= \tau_{\alpha}^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}}) = \bigcup_{j=1}^6 \mathcal{N}_j(A^{(j)}, B^{(j)}) \\ &= \tau^{-1}(\Lambda_c^+)(\hat{A}_c^+, \hat{B}_c^+) \cup \tau^{-1}(\Lambda_c^-)(\hat{A}_c^-, \hat{B}_c^-) \cup \tau^{-1}(\Lambda_{\text{up}}^-)(\hat{A}_{\text{up}}^-, \hat{B}_{\text{up}}^-) \\ &\quad \cup \tau^{-1}(\Lambda_d^+)(\hat{A}_d^+, \hat{B}_d^+) \cup \tau^{-1}(K_d^-)(\hat{S}_d^-, \hat{B}_d^-) \cup \tau^{-1}(\Lambda_{\text{up}}^+)(\hat{A}_{\text{up}}^+, \hat{S}_{\text{up}}^+).\end{aligned}\quad (25)$$

Следовательно, отрезки (23), “определяющие” множество $\tilde{\mathfrak{B}}$, при повороте τ “перешли” в отрезки $[A^{(j)}, B^{(j)}]$, где

$$\begin{aligned}[A^{(1)}, B^{(1)}] &= [\hat{A}_c^+, \hat{B}_c^+], & [A^{(2)}, B^{(2)}] &= [\hat{A}_c^-, \hat{B}_c^-], & [A^{(3)}, B^{(3)}] &= [\hat{A}_{\text{up}}^-, \hat{B}_{\text{up}}^-], \\ [A^{(4)}, B^{(4)}] &= [\hat{A}_d^+, \hat{B}_d^+], & [A^{(5)}, B^{(5)}] &= [\hat{S}_d^-, \hat{B}_d^-], & [A^{(6)}, B^{(6)}] &= [\hat{A}_{\text{up}}^+, \hat{S}_{\text{up}}^+],\end{aligned}\quad (26)$$

“определяющие” соответственно каждое множество $\mathcal{N}_j$, т.е. множество $\tau^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}})$.

Для того чтобы доказать неравенства в (21), нам необходимо рассмотреть (и оценить) меру проекций отрезков (26) на оси Ox_1 и Ox_2 .

Определим, как связаны между собой проекции множеств $\mathcal{N}_j$, $1 \leq j \leq 6$, на ось Ox_s , $s = 1, 2$, т.е. множества $\text{pr}_{(s)}\{\mathcal{N}_j\}$, $s = 1, 2$, с проекциями (на ту же ось) отрезков $[A^{(j)}, B^{(j)}]$, “определяющих” множества $\mathcal{N}_j$.

Для этого обозначим через $(A^{(j)}(x_1), A^{(j)}(x_2))$ и $(B^{(j)}(x_1), B^{(j)}(x_2))$ соответственно координаты точек $A^{(j)}$ и $B^{(j)}$, $1 \leq j \leq 6$; через φ , $0 < \varphi < \pi/2$, – угол наклона касательной к оси Ox_1 , проведенной к границе круга $C_{\pi/4}^+$ (см. (17)) в точке $O(0, 0)$. Учитывая выбор δ , нетрудно убедиться в том, что $0 < \varphi < 1/(125\pi)$. Следовательно, учитывая геометрию множеств $\mathcal{N}_j$, имеем: для $s = 1$ при $\alpha \in (0, \pi/2 - \varphi)$ выполнено равенство

$$\text{pr}_{(s)}\{\mathcal{N}_j\} = [A^{(j)}(x_s), B^{(j)}(x_s)], \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (27)$$

в свою очередь, для множеств $\mathcal{N}_5$ и $\mathcal{N}_6$ “мы можем гарантировать” только вложения

$$\text{pr}_{(s)}\{\mathcal{N}_5\} \subset [A^{(5)}(x_s) - \delta, B^{(5)}(x_s)], \quad \text{pr}_{(s)}\{\mathcal{N}_6\} \subset [A^{(6)}(x_s), B^{(6)}(x_s) + \delta], \quad (28)$$

а если $\alpha \in [\pi/2 - \varphi, \pi/2)$, то для всех множеств $\mathcal{N}_j$ “мы можем гарантировать” (в общем случае) только вложения

$$\text{pr}_{(s)}\{\mathcal{N}_j\} \subset [A^{(j)}(x_s) - \delta, B^{(j)}(x_s) + \delta], \quad j = 1, \dots, 6. \quad (29)$$

Если же рассматривать проекции множеств $\mathcal{N}_j$ на ось Ox_2 , то при $\alpha \in (0, \varphi)$ справедливы вложения (29) (для $s = 2$), при $\alpha \in [\varphi, \pi/2)$ справедливы свойства (27) и (28) (для $s = 2$).

Итак, рассмотрим проекции некоторых отрезков (26) на ось Ox_1 . Так как мы рассматриваем $\alpha \in (0, \pi/2)$, то достаточно исследовать отрезки, находящиеся в правой

полуплоскости.⁷ Учитывая координаты этих отрезков, имеем

$$\begin{aligned} [\hat{A}_c^+(x_1), \hat{B}_c^+(x_1)] &= \left[0, \frac{\pi}{2} \cos \alpha\right], \\ [\hat{A}_d^+(x_1), \hat{B}_d^+(x_1)] &= \left[\frac{\pi}{2} \cos \alpha + \frac{\pi}{3} \sin \alpha, \pi \cos \alpha + \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right], \\ [\hat{A}_{up}^+(x_1), \hat{S}_{up}^+(x_1)] &= \left[\pi \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha, \sqrt{7} \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha\right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Сразу отметим, что так как нас интересует $\text{pr}_{(1)}\{\tau^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}}) \cap \overline{\mathbb{T}}^2\}$, а при $\beta < \alpha < \pi/2$, где $\beta = \pi/2 - 2 \arctg(1/2)$, множество $\tau^{-1}(K_{up}^+) = \mathcal{N}_6$ не содержится в $\overline{\mathbb{T}}^2$, то при $\alpha > \beta$ последний отрезок в (30) нас интересовать не будет. Нетрудно видеть, что этот же отрезок нас не будет интересовать и в случае, если $\hat{A}_d^+(x_1) < \hat{A}_{up}^+(x_1)$; последнее условие имеет место при $0 < \alpha < \arctg(3/5)$. Здесь же заметим, что $\arctg(3/5) < \beta < \pi/2 - \varphi$.

Обозначим

$$\Omega^{(1)} = (0, \pi) \setminus \text{pr}_{(1)}\{\tau^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}}) \cap \overline{\mathbb{T}}^2\} \quad (31)$$

и рассмотрим интервал

$$(\hat{B}_c^+(x_1), \hat{A}_d^+(x_1)) = \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha, \frac{\pi}{2} \cos \alpha + \frac{\pi}{3} \sin \alpha\right)$$

при $\alpha \in (0, \arctg(3/5)) \cup [\beta, \pi/2 - \varphi)$. Учитывая равенство (27) (для $s = 1$ и $\alpha \in (0, \pi/2 - \varphi)$), имеем $\Omega^{(1)} \supset (\hat{B}_c^+(x_1), \hat{A}_d^+(x_1))$, следовательно,

$$\mu_1 \Omega^{(1)} \geq \frac{\pi}{3} \sin \alpha > 0, \quad \alpha \in \left(0, \arctg \frac{3}{5}\right) \cup \left[\beta, \frac{\pi}{2} - \varphi\right). \quad (32)$$

Далее рассмотрим $\alpha \in [\arctg(3/5), \beta) \cup [\pi/2 - \varphi, \pi/2)$. Если $\alpha \in [\arctg(3/5), \beta)$, то в этом случае “начинает играть” интервал

$$(\hat{B}_c^+(x_1), \hat{A}_{up}^+(x_1)) = \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha, \pi \cos \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha\right),$$

который содержится в $\Omega^{(1)}$, и, следовательно, имеем

$$\mu_1 \Omega^{(1)} \geq \frac{\pi}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) > 0 \quad \text{при} \quad \alpha \in \left[\arctg \frac{3}{5}, \beta\right). \quad (33)$$

Пусть теперь $\alpha \in [\pi/2 - \varphi, \pi/2)$. В этом случае мы опять рассматриваем интервал $(\hat{B}_c^+(x_1), \hat{A}_d^+(x_1))$. Учитывая вложения (29) для $s = 1$, имеем $\Omega^{(1)} \supset (\hat{B}_c^+(x_1) + \delta, \hat{A}_{up}^+(x_1) - \delta)$ и, следовательно (поскольку $\delta < 10^{-3}$), получаем

$$\mu_1 \Omega^{(1)} > \frac{\pi}{3} \sin \alpha - \frac{1}{500} > 0, \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{2} - \varphi, \frac{\pi}{2}\right). \quad (34)$$

⁷ При повороте $\tau = \tau_\alpha$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, множества $\tau^{-1}(\Lambda_c^-)$, $\tau^{-1}(\Lambda_{up}^-)$, $\tau^{-1}(K_d^-)$ не могут “затенять” интервал $(0, \pi)$ (т.е. их проекции на ось Ox_1 не принадлежат $(0, \pi)$).

Оценки (30)–(34) с учетом обозначений (31) и (25) доказывают оценку

$$\mu_1[\text{pr}_{(1)}\{\tau_\alpha^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}}) \cap \mathbb{T}^2\}] < 2\pi \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \quad (35)$$

Теперь рассмотрим проекции некоторых отрезков в (26) на ось Ox_2 . Точнее, рассмотрим только те отрезки, которые “могут проектироваться” на положительное направление оси Ox_2 . Имеем

$$\begin{aligned} [\hat{A}_c^+(x_2), \hat{B}_c^+(x_2)] &= \left[0, \frac{\pi}{2} \sin \alpha\right], \\ [\hat{A}_d^+(x_2), \hat{B}_d^+(x_2)] &= \left[\frac{\pi}{2} \sin \alpha - \frac{\pi}{3} \cos \alpha, \pi \sin \alpha - \frac{\pi}{3} \cos \alpha\right], \\ [\hat{A}_{\text{up}}^+(x_2), \hat{S}_{\text{up}}^+(x_2)] &= \left[\pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha, \sqrt{7} \frac{\pi}{2} \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha\right], \\ [\hat{A}_{\text{up}}^-(x_2), \hat{B}_{\text{up}}^-(x_2)] &= \left[-\pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha, -\frac{\pi}{2} \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha\right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Сразу отметим, что как только $\hat{B}_{\text{up}}^-(x_2) \leq \hat{B}_c^+(x_2)$, а это будет при $\arctg(1/2) \leq \alpha < \pi/2$, последний отрезок в (36) нас интересовать не будет; если же $\hat{B}_d^+(x_2) \leq \hat{B}_c^+(x_2)$, а это будет при $0 < \alpha < \arctg(2/3)$, то нас не будет интересовать отрезок $[\hat{A}_d^+(x_2), \hat{B}_d^+(x_2)]$ и, наконец, это же касается отрезка $[\hat{A}_{\text{up}}^+(x_2), \hat{S}_{\text{up}}^+(x_2)]$ при $\beta < \alpha < \pi/2$, где $\beta = \pi/2 - 2 \arctg(1/2)$.

Итак, обозначим (аналогично (31))

$$\Omega^{(2)} = (0, \pi) \setminus \text{pr}_{(2)}\{\tau^{-1}(\tilde{\mathfrak{B}}) \cap \mathbb{T}^2\} \quad (37)$$

и рассмотрим интервал

$$(\hat{B}_c^+(x_2), \hat{A}_{\text{up}}^-(x_2)) = \left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha, -\pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha\right)$$

при $\alpha \in (0, \varphi)$, где $\varphi < 1/(125\pi)$. Учитывая вложение (29) для $s = 2$ и $\alpha \in (0, \varphi)$, а также принимая во внимание, что точка $\hat{A}_{\text{up}}^-$ “уходит” за границу квадрата $\mathbb{T}^2$ при повороте $\tau = \tau_\alpha$, будем заведомо иметь

$$\Omega^{(2)} \supset \left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha + \delta, -\pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \delta\right).$$

Следовательно, принимая во внимание выбор δ , получаем

$$\mu_1 \Omega^{(2)} > \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \frac{3}{2} \pi \sin \alpha - 2\delta > \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \frac{3}{2} \pi \sin \alpha - \frac{1}{500} > 0, \quad \alpha \in (0, \varphi).$$

Более того, так как $(\pi/2) \cos \alpha - (3/2)\pi \sin \alpha > 0$ при $0 < \alpha < \arctg(1/3)$, а при $\alpha \in [\varphi, \pi/2)$ заведомо справедливо следующее вложение (см. (27) для $s = 2$):

$$\Omega^{(2)} \supset \left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha, -\pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha\right),$$

то

$$\mu_1 \Omega^{(2)} > 0 \quad \forall \alpha \in \left(0, \arctg \frac{1}{3}\right). \quad (38)$$

Пусть $\alpha \in [\arctg(1/3), \arctg(1/2)]$. Так как в этом случае $\widehat{B}_c^+(x_2) \leq \widehat{B}_{\text{up}}^-(x_2)$, а $\widehat{B}_d^+(x_2) \leq \widehat{B}_c^+(x_2)$, то рассмотрим интервал

$$(\widehat{B}_{\text{up}}^-(x_2), \widehat{A}_{\text{up}}^+(x_2)) = \left(-\frac{\pi}{2} \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha, \pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right) \subset \Omega^{(2)}.$$

Имеем

$$\mu_1 \Omega^{(2)} \geq \frac{3\pi}{2} \sin \alpha > 0 \quad \text{при } \alpha \in \left[\arctg \frac{1}{3}, \arctg \frac{1}{2} \right]. \quad (39)$$

Пусть, далее, $\alpha \in (\arctg(1/2), \arctg(2/3)]$. В этом случае $\widehat{B}_{\text{up}}^-(x_2) < \widehat{B}_c^+(x_2)$ и по-прежнему $\widehat{B}_d^+(x_2) \leq \widehat{B}_c^+(x_2)$. Рассмотрим интервал

$$(\widehat{B}_c^+(x_2), \widehat{A}_{\text{up}}^+(x_2)) = \left(\frac{\pi}{2} \sin \alpha, \pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right),$$

который содержится в $\Omega^{(2)}$. Имеем

$$\mu_1 \Omega^{(2)} \geq \frac{\pi}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) > 0 \quad \text{при } \alpha \in \left(\arctg \frac{1}{2}, \arctg \frac{2}{3} \right]. \quad (40)$$

Пусть теперь $\alpha \in (\arctg(2/3), \beta]$. Так как в этом случае $\widehat{B}_c^+(x_2) < \widehat{B}_d^+(x_2)$, то рассмотрим интервал

$$(\widehat{B}_d^+(x_2), \widehat{A}_{\text{up}}^+(x_2)) = \left(\pi \sin \alpha - \frac{\pi}{3} \cos \alpha, \pi \sin \alpha + \frac{\pi}{2} \cos \alpha \right),$$

который содержится в $\Omega^{(2)}$. Имеем

$$\mu_1 \Omega^{(2)} \geq \frac{5}{6} \pi \cos \alpha > 0 \quad \text{при } \alpha \in \left(\arctg \frac{2}{3}, \beta \right]. \quad (41)$$

И, наконец, пусть $\alpha \in (\beta, \pi/2)$. Так как в этом случае отрезок $[\widehat{A}_{\text{up}}^+, \widehat{S}_{\text{up}}^+]$ “выходит” за квадрат $\overline{\mathbb{T}^2}$, то $(\widehat{B}_d^+(x_2), \pi) \subset \Omega^{(2)}$ и мы имеем

$$\mu_1 \Omega^{(2)} \geq \pi(1 - \sin \alpha) + \frac{\pi}{3} \cos \alpha > 0 \quad \text{при } \alpha \in \left(\beta, \frac{\pi}{2} \right). \quad (42)$$

Оценки (38)–(42) с учетом обозначений (37) и (25) доказывают оценку

$$\mu_1 [\text{pr}_{(2)} \{ \tau_\alpha^{-1}(\widetilde{\mathfrak{B}}) \cap \overline{T^2} \}] < 2\pi \quad \forall \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right). \quad (43)$$

В свою очередь, оценки (35) и (43) доказывают оценку (21).

Далее, воспользуемся результатом теоремы А для $N = 2$.

Учитывая, что $\text{pr}_{(1)} \{ \mathfrak{B} \} = [-\pi, \pi]$, имеем: существует функция $f \in L_1(\mathbb{T}^2)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\varepsilon$ (см. (18)), для которой справедлива оценка (9).

Докажем оценку (10). Так как для любого $\tau = \tau_\alpha \in \mathcal{F}$ множество $\mathcal{E}(\overline{\tau^{-1}(\mathfrak{B})}) = \mathcal{E}(\tau^{-1}(\widetilde{\mathfrak{B}}) \cap \overline{T^2})$ (см. (12) и (21)) уже не совпадает со всем кубом $\overline{\mathbb{T}^2}$, то для любой функции $g \in L_1(\mathbb{T}^2)$, $g(x) = 0$ на $\mathbb{T}^2 \setminus \tau^{-1}(\widetilde{\mathfrak{B}})$, а значит, и для функции $g = g_\tau^{(1)} = f \circ \tau$ (определение функции $g_\tau^{(1)}$ см. в (3)) имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; g) = 0$ в каждой точке $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{E}(\overline{\tau^{-1}(\mathfrak{B})}) = \widetilde{\Omega}$ (см. теорему А, оценку (14)). Обозначив $\Omega = \Omega^{(1)} \times \Omega^{(2)}$ (см. обозначения (31) и (37)), получаем: открытое, непустое (см. (21)) множество $\Omega \subset \widetilde{\Omega} \subset \tau^{-1}(\mathfrak{A})$. На самом деле нетрудно проверить, что $\Omega \subset \mathfrak{A}$. Оценка (10) доказана. Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Саакян А. А. О теореме Бора для кратных рядов Фурье // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 913–924.
- [2] Fefferman Ch. On the divergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 2. P. 191–195.
- [3] Галстян С. Ш., Карагулян Г. А. О расходимости почти всюду прямоугольных частичных сумм кратных рядов Фурье ограниченных функций // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 1. С. 24–36.
- [4] Bohr H. Über einen Satz von J. Pal // Acta Sci. Math. (Szeged). 1935. V. 7. P. 129–135.
- [5] Олевский А. М. Замена переменных и абсолютная сходимость рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256. № 2. С. 284–287.
- [6] Kahane J. P. Quatre leçons sur les homéomorphismes du cercle et les séries de Fourier // Proc. Sem. Torino and Milano. V. 2. Roma, 1983. P. 955–990.
- [7] Олевский А. М. Модификации функций и ряды Фурье // УМН. 1985. Т. 40. № 3. С. 157–193.
- [8] Олевский А. М. Homeomorphisms of the Circle, Modifications of Functions and Fourier Series // Proc. Intern. Congress Math. V. 2. Berkley, 1986. P. 976–989; // Amer. Math. Soc. Transl. 1990. № 2. P. 51–64.
- [9] Драгошанский О. С. О сходимости и расходимости двойных рядов Фурье функций при поворотах системы координат // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Тезисы докл. Воронеж, 1999. С. 13.
- [10] Блошанский И. Л. О геометрии измеримых множеств в N -мерном пространстве, на которых справедлива обобщенная локализация для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p , $p \geq 1$ // Матем. сб. 1983. Т. 121. № 1. С. 87–110.
- [11] Блошанский И. Л. Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p , $p \geq 1$ // Изв. АН СССР. Серия матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 243–282.
- [12] Блошанский И. Л. О некоторых вопросах сходимости кратных рядов и интегралов Фурье функций из L_1 при суммировании по квадратам // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 1. С. 15–18.
- [13] Блошанский И. Л. Структура и геометрия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье функций из L_1 , равных нулю на заданном множестве // Изв. АН СССР. Серия матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 675–707.
- [14] Блошанский И. Л. Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа. Автореферат дисс. . . . д. ф.-м. н. М.: МИАН, 1991.
- [15] Блошанский И. Л. Критерий СОЛ для кратных разложений Фурье с точки зрения изометрических преобразований // Теория приближения функций и операторов. Тезисы докл. Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рожд. С. Б. Стечкина. Екатеринбург, 2000. С. 40–42.
- [16] Блошанский И. Л. О множествах неограниченной расходимости в каждой точке кратного ряда Фурье функции, равной нулю на замкнутом множестве // Anal. Math. 2000. Т. 26. С. 81–98.

Московский педагогический университет
E-mail: igor@bloshn.msk.ru

Поступило
26.01.2001
Исправленный вариант
01.07.2001