Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, О K -функционалах и точных значениях n -поперечников некоторых классов в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 522–531

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:45:04

УДК 517.5

О K -ФУНКЦИОНАЛАХ И ТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ n -ПОПЕРЕЧНИКОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВАХ $C(2\pi)$ И $L_1(2\pi)$

С. Б. Вакарчук

Для классов 2π -периодических функций, K -функционалы которых мажорируются функциями, удовлетворяющими определенным ограничениям, получены точные значения колмогоровского, бернштейновского и тригонометрического n -поперечников в пространствах $C(2\pi)$ и $L_1(2\pi)$. Приведены примеры мажорант, для которых сформулированные в статье требования выполнены.

Библиография: 6 названий.

1. Обозначим через $L_p(2\pi)$ ($1 \leq p < \infty$) пространство 2π -периодических интегрируемых по Лебегу на $[0, 2\pi]$ в p -й степени функций $g(x)$ с нормой

$$\|g\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |g(x)|^p dx \right\}^{1/p},$$

а через $L_\infty(2\pi)$ пространство 2π -периодических измеримых и существенно ограниченных на всей оси функций $g(x)$ с нормой

$$\|g\|_\infty = \sup \operatorname{vrai} \{ |g(x)| : 0 \leq x \leq 2\pi \}.$$

Под $C(2\pi)$ мы понимаем пространство непрерывных 2π -периодических функций $g(x)$ с равномерной нормой

$$\|g\|_C = \max \{ |g(x)| : 0 \leq x \leq 2\pi \}.$$

Очевидно, что если $g(x)$ – непрерывная функция, то $\|g\|_\infty = \|g\|_C$. Под $L_p^r(2\pi)$ ($r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$) мы понимаем множество заданных на всей оси функций $f(x)$ периода 2π , у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 2\pi]$, а $f^{(r)}(x) \in L_p(2\pi)$.

Для $f(x) \in L_p(2\pi)$ ($1 \leq p < \infty$) K -функционал $K_{r,p}(f, t)$ ($r \in \mathbb{N}$, $t > 0$) определяется следующим образом (см., например, [1]):

$$K_{r,p}(f, t) = \inf \{ \|f - g\|_p + t \|g^{(r)}\|_p : g(x) \in L_p^r(2\pi) \}.$$

В случае $f(x) \in C(2\pi)$ имеем

$$K_{r,\infty}(f, t) = \inf \{ \|f - g\|_C + t \|g^{(r)}\|_\infty : g(x) \in L_\infty^r(2\pi) \}.$$

Данная характеристика указывает, насколько хорошо функция $f(x)$ может быть аппроксимирована гладкими функциями $g(x)$ с учетом величины $\|g^{(r)}\|_p$. Известно [1], что существуют константы $\tilde{c}_{1,p,r}, \tilde{c}_{2,p,r}$, зависящие только от r, p и такие, что если $f(x) \in L_p(2\pi)$ (или $f(x) \in C(2\pi), p = \infty$), то

$$\tilde{c}_{1,p,r} \omega_{r,p}(f, t) \leq K_{r,p}(f, t^r) \leq \tilde{c}_{2,p,r} \omega_{r,p}(f, t), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $\omega_{r,p}(f, t) = \sup \{ \|\Delta_h^r(f, x)\|_p : 0 < h \leq t \}$ – модуль гладкости r -го порядка функции $f(x)$, а $\Delta_h^r(f, x) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + jh)$ – конечная разность r -го порядка функции $f(x)$ в точке x с шагом h .

Для определения K -функционала специального вида через $V(2\pi)$ обозначим множество 2π -периодических функций $f(x)$, имеющих ограниченную вариацию на сегменте $[0, 2\pi]$, а через $V^r(2\pi)$ ($r \in \mathbb{N}$) – множество 2π -периодических функций $f(x)$, у которых производная $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, а $f^{(r)}(x) \in V(2\pi)$. Тогда для $f(x) \in L_1(2\pi)$ кроме K -функционала $K_{r,1}(f, t)$ рассмотрим еще и K -функционал

$$K_{r,V}^*(f, t) = \inf \left\{ \|f - g\|_1 + t \bigvee_0^{2\pi}(g^{(r)}) : g(x) \in V^r(2\pi) \right\}, \quad t > 0, \quad (2)$$

где $\bigvee_0^{2\pi}(g^{(r)})$ есть вариация функции $g^{(r)}(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq 2\pi$. Для $r = 0$ в дальнейшем считаем, что

$$K_{0,V}^*(f, t) = \left\{ \|f - g\|_1 + t \bigvee_0^{2\pi}(g) : g(x) \in V(2\pi) \right\}, \quad t > 0.$$

2. Покажем, что для K -функционала $K_{r,V}^*(f, t)$ имеет место соотношение вида (1).

ЛЕММА 1. *Существуют константы $c_{1,r} > 0$ и $c_{2,r} > 0$, зависящие только от r ($r = 0, 1, 2, \dots$) и такие, что если $f(x) \in L_1(2\pi)$, то*

$$c_{1,r} \omega_{r+1,1}(f, t) \leq K_{r,V}^*(f, t^{r+1}) \leq c_{2,r} \omega_{r+1,1}(f, t), \quad t > 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись включением $L_1^{r+1}(2\pi) \subset V^r(2\pi)$, которое следует из равенства

$$\bigvee_0^{2\pi}(g^{(r)}) = \int_0^{2\pi} |g^{(r+1)}(x)| dx \quad \forall g(x) \in L_1^{r+1}(2\pi),$$

запишем

$$K_{r,V}^*(f, t) \leq \inf \{ \|f - g\|_1 + t \|g^{(r+1)}\|_1 : g(x) \in L_1^{r+1}(2\pi) \} = K_{r+1,1}(f, t). \quad (4)$$

На основании (4) и (1) получим оценку сверху

$$K_{r,V}^*(f, t^{r+1}) \leq \tilde{c}_{2,1,r+1} \omega_{r+1,1}(f, t). \quad (5)$$

Для получения оценки снизу нам понадобится известное неравенство

$$\|\Delta_h^{r+1}(\varphi, x)\|_1 \leq h^{r+1} \|\varphi^{(r+1)}\|_1 \quad \forall \varphi(x) \in L_1^{r+1}(2\pi).$$

Каждой функции $g(x) \in V^r(2\pi)$ поставим в соответствие функцию Стеклова

$$g_\nu(x) = \frac{1}{2\nu} \int_{-\nu}^{\nu} g(x+t) dt, \quad \nu > 0.$$

Тогда для $f(x) \in L_1(2\pi)$ запишем

$$\begin{aligned} \|\Delta_h^{r+1}(f, x)\|_1 &\leq \|\Delta_h^{r+1}(f - g_\nu, x)\|_1 + \|\Delta_h^{r+1}(g_\nu, x)\|_1 \\ &\leq 2^{r+1} \{\|f - g_\nu\|_1 + h^{r+1} \|[g_\nu]^{(r+1)}\|_1\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая, что для абсолютно непрерывной функции $\psi(x)$ с точностью до множества меры нуль

$$[\psi_\nu(x)]^{(1)} = [\psi^{(1)}(x)]_\nu, \quad (7)$$

продолжим оценку (6) следующим образом:

$$\leq 2^{r+1} \{\|f - g_\nu\|_1 + h^{r+1} \|[g^{(r)}]_\nu^1\|_1\}. \quad (8)$$

Известно [2, с. 100], что если $\varphi(x) \in V(2\pi)$, то

$$\|\varphi_\nu^{(1)}\|_1 = \bigvee_0^{2\pi}(\varphi_\nu) \leq \bigvee_0^{2\pi}(\varphi). \quad (9)$$

С учетом (9) продолжим оценку сверху (6), (8) следующим образом:

$$\leq 2^{r+1} \left\{ \|f - g\|_1 + \|g - g_\nu\|_1 + h^{r+1} \bigvee_0^{2\pi}(g^{(r)}) \right\}. \quad (10)$$

Поскольку для $g(x) \in L_1(2\pi)$

$$\lim \{\|g - g_\nu\|_1 : \nu \rightarrow 0\} = 0, \quad (11)$$

то, переходя в соотношениях (6), (8), (10) к пределу при $\nu \rightarrow 0$, получим

$$2^{-(r+1)} \|\Delta_h^{r+1}(f, x)\|_1 \leq \|f - g\|_1 + h^{r+1} \bigvee_0^{2\pi}(g^{(r)}).$$

Используя приведенные ранее определения модуля гладкости и K -функционала, из последнего неравенства имеем

$$c_{1,r} \omega_{r+1,1}(f, t) \leq K_{r,V}^*(f, t^{r+1}).$$

Сравнив оценку (5) и последнее неравенство, получим требуемое соотношение (3), чем и завершим доказательство леммы 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. K -функционал $K_{r,V}^*(f, t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $K_{r,V}^*(f, t_1 + t_2) \leq K_{r,V}^*(f, t_1) + K_{r,V}^*(f, t_2)$, $t_1, t_2 > 0$;
- 2) $K_{r,V}^*(f_1 + f_2, t) \leq K_{r,V}^*(f_1, t) + K_{r,V}^*(f_2, t)$, $t > 0$;
- 3) $K_{r,V}^*(f, t) \leq K_{r,V}^*(f, \tilde{t})$, $0 < t < \tilde{t}$;
- 4) $K_{r,V}^*(f, t^{r+1}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$;

где $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ – произвольные функции из $L_1(2\pi)$.

Действительно, первые три свойства очевидны, поскольку вытекают из определения K -функционала (2), а четвертое следует из известного свойства модуля гладкости $\lim\{\omega_{r+1,1}(f, t) : t \rightarrow 0\} = 0$ и соотношения (3).

Следующее следствие можно в определенном смысле рассматривать как распространение неравенств Маршо (Marchaud) на K -функционалы вида (2). Предварительно сформулируем в удобном для нас виде неравенства Маршо для модулей гладкости (см., например, [3, с. 57]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Существуют положительные константы $\hat{c}_r$ и δ_r , зависящие от r и такие, что для всех $0 < t < \delta_r$ и любой функции $f(x) \in L_1(2\pi)$ выполнено неравенство

$$\omega_{j,1}(f, t) \leq \hat{c}_r t^j \left\{ \|f\|_1 + \int_t^{\delta_r} \frac{\omega_{r,1}(f, u)}{u^{j+1}} du \right\}, \quad j = 1, \dots, r-1. \quad (12)$$

С другой стороны, если для некоторого $\delta > 0$ и $1 \leq j \leq r-1$ выполнено неравенство

$$\int_0^\delta \frac{\omega_{r,1}(f, u)}{u^{j+1}} du < \infty,$$

то $f(x) \in L_1^j(2\pi)$ и

$$\omega_{r-j,1}(f^{(j)}, t) \leq \tilde{c}_r \int_0^t \frac{\omega_{r,1}(f, u)}{u^{j+1}} du \quad \forall t \in (0, \delta), \quad (13)$$

где $\tilde{c}_r$ – константа, зависящая от r .

СЛЕДСТВИЕ 2. Существуют положительные константы c_r^* и δ_{r+1} , которые зависят от r и таковы, что для произвольной функции $f(x) \in L_1(2\pi)$ имеют место неравенства

$$K_{j-1,V}^*(f, t^j) \leq c_r^* \left\{ \|f\|_1 + \int_t^{\delta_{r+1}} \frac{K_{r,V}^*(f, u^{r+1})}{u^{j+1}} du \right\}, \quad j = 1, \dots, r,$$

где $0 < t < \delta_{r+1}$.

С другой стороны, если для некоторого $\delta > 0$ и некоторого $1 \leq j \leq r$ выполнено неравенство

$$\int_0^\delta \frac{K_{r,V}^*(f, u^{r+1})}{u^{j+1}} du < \infty,$$

то $f(x) \in L_1^j(2\pi)$ и справедливо соотношение

$$K_{r-j,V}^*(f^{(j)}, t^{r-j+1}) \leq \tilde{c}_r^* \int_0^t \frac{K_{r,V}^*(f, u^{r+1})}{u^{j+1}} du,$$

где константа $\tilde{c}_r^*$ зависит от r , а $0 < t < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения первого неравенства воспользуемся формулами (3) и (12), где вместо r стоит $r + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} K_{j-1,V}^*(f, t^j) &\leq c_{2,j-1} \omega_{j,1}(f, t) \leq c_{2,j-1} \widehat{c}_{r+1} \left\{ \|f\|_1 + \int_t^{\delta_{r+1}} \frac{\omega_{r+1,1}(f, u)}{u^{j+1}} du \right\} \\ &\leq c_r^* \left\{ \|f\|_1 + \int_t^{\delta_{r+1}} \frac{K_{r,V}^*(f, u^{r+1})}{u^{j+1}} du \right\}. \end{aligned}$$

Переходя к доказательству второй части следствия, отметим, что при выполнении указанного в формулировке ограничения на K -функционал $K_{r,V}^*$ в силу (3) имеем

$$\int_0^\delta \frac{\omega_{r+1,1}(f, u)}{u^{j+1}} du < \infty,$$

т.е. функция $f(x) \in L_1^j(2\pi)$. Используя далее (3) и (13), где вместо r полагаем $r + 1$, запишем

$$\begin{aligned} K_{r-j,V}^*(f^{(j)}, t^{r-j+1}) &\leq c_{2,r-j} \omega_{r-j+1,1}(f^{(j)}, t) \\ &\leq c_{2,r-j} \widehat{c}_{r+1} \int_0^t \frac{\omega_{r+1,1}(f, u)}{u^{j+1}} du \leq \widetilde{c}_r^* \int_0^t \frac{K_{r,V}^*(f, u^{r+1})}{u^{j+1}} du. \end{aligned}$$

Следствие 2 доказано.

3. Поскольку в определении многих функциональных классов участвуют модули гладкости $\omega_{r,p}(f, t)$ ($r \in \mathbb{N}$) различных порядков, то соотношения (1) и (3) дают все основания использовать K -функционалы $K_{r,p}(f, t)$ и $K_{r,V}^*(f, t)$ для определения новых классов. В случае аналитических в круге единичного радиуса функций подобная идея была реализована в [4]–[6].

Пусть $\Phi(t)$ есть положительная монотонно возрастающая функция, определенная для всех $0 \leq t \leq 2\pi$ и такая, что $\lim\{\Phi(t) : t \rightarrow 0\} = \Phi(0) = 0$. Через $C_K^r(\Phi)$ обозначим класс функций $f(x) \in C(2\pi)$, удовлетворяющих условию $K_{r,\infty}(f, t) \leq \Phi(t)$ для любого $t \in (0, 2\pi]$. Под $V_{K^*}^r(\Phi)$ понимаем класс функций $f(x) \in L_1(2\pi)$, для которых при любом $t \in (0, 2\pi]$ выполняется неравенство $K_{r,V}^*(f, t) \leq \Phi(t)$.

Пусть X – банахово пространство, B – единичный шар в нем, $\mathcal{M}$ – некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X , $L_n \subset X$ – n -мерное линейное подпространство. Величины

$$\begin{aligned} d_n(\mathcal{M}, X) &= \inf\{\sup\{\inf\{\|f - \psi\|_X : \psi \in L_n\} : f \in \mathcal{M}\} : L_n \subset X\}, \\ b_n(\mathcal{M}, X) &= \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon B \cap L_{n+1} \subset \mathcal{M}\} : L_{n+1} \subset X\} \end{aligned}$$

называют соответственно *колмогоровским* и *бернштейновским* n -поперечниками множества $\mathcal{M}$ в пространстве X .

Для любого набора целых чисел $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ обозначим через $L(k_1, \dots, k_n)$ подпространство в $C(2\pi)$, натянутое на функции $\exp(ik_j x)$ ($j = 1, \dots, n$). *Тригонометрическим n -поперечником* множества $\mathcal{M} \subset X$ называют величину

$$d_n^T(\mathcal{M}, X) = \inf\{\sup\{\inf\{\|f - \psi\|_X : \psi \in L(k_1, \dots, k_n)\} : f \in \mathcal{M}\} : (k_j)_{j=1}^n\}.$$

Между записанными аппроксимативными характеристиками существует следующая связь:

$$b_n(\mathcal{M}, X) \leq d_n(\mathcal{M}, X) \leq d_n^T(\mathcal{M}, X). \quad (14)$$

Основными результатами данной статьи являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть мажорирующая функция $\Phi(t)$ такова, что $\Phi(t)/t$ монотонно убывает на множестве $0 < t \leq 2\pi$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$b_{2n-1}(C_K^r(\Phi), C(2\pi)) = d_{2n-1}(C_K^r(\Phi), C(2\pi)) = d_{2n-1}^T(C_K^r(\Phi), C(2\pi)) = \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right), \quad (15)$$

где

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{(r+1)\nu}}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

есть константа Фавара.

ТЕОРЕМА 2. Пусть мажорирующая функция $\Phi(t)$ удовлетворяет ограничению теоремы 1. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} b_{2n-1}(V_{K^*}^r(\Phi), L_1(2\pi)) &= d_{2n-1}(V_{K^*}^r(\Phi), L_1(2\pi)) \\ &= d_{2n-1}^T(V_{K^*}^r(\Phi), L_1(2\pi)) = \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поставим в соответствие функции $g(x) \in L_\infty^r(2\pi)$ тригонометрический полином [2, с. 110–112]

$$P_{n,r}(g, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{g(t)}{2} + \left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_{k,r}}{k^r} \cos\left(kt - \frac{\pi r}{2}\right) \right] g^{(r)}(x-t) \right\} dt, \quad (17)$$

где

$$\lambda_{k,r} = \begin{cases} 1 - k^r \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{1}{(2\nu n - k)^r} + \frac{1}{(2\nu n + k)^r} \right), & \text{если } r = 2, 4, 6, \dots, \\ 1 - k^r \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\nu n - k)^r} - \frac{1}{(2\nu n + k)^r} \right), & \text{если } r = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

При этом для всех $\varphi(x) \in L_p^r(2\pi)$ ($1 \leq p \leq \infty$) выполнена оценка

$$\|\varphi - P_{n,r}(\varphi)\|_p \leq \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|\varphi^{(r)}\|_p.$$

Запишем оценку сверху для $E_n(f)_C$ – наилучшего приближения произвольной функции $f(x) \in C_K^r(\Phi)$ тригонометрическими полиномами порядка $n-1$:

$$E_n(f)_C \leq \|f - P_{n,r}(g)\|_C \leq \|f - g\|_C + \|g - P_{n,r}(g)\|_C \leq \|f - g\|_C + \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|g^{(r)}\|_\infty. \quad (18)$$

Используя определение K -функционала и произвольность выбора функции $g(x) \in L_\infty^r(2\pi)$, продолжим оценку (18) следующим образом:

$$\leq K_{r,\infty} \left(f, \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \right) \leq \Phi \left(\frac{s K_r}{n^r} \right).$$

Отсюда имеем

$$d_{2n-1}^T(C_K^r(\Phi), C(2\pi)) \leq \sup\{E_n(f)_C : f \in C_K^r(\Phi)\} \leq \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right). \quad (19)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим бернштейновский поперечник $b_{2n-1}(C_K^r(\Phi), C(2\pi))$. При этом напомним некоторые необходимые нам понятия и соотношения (см., например, [2, с. 281–282]). Пусть S_{2n}^0 есть $2n$ -мерное подпространство 2π -периодических функций вида

$$s(x) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k \varphi_k(x),$$

где

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{(k-1)\pi}{n} \leq x \leq \frac{k\pi}{n}, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x < \frac{(k-1)\pi}{n} \text{ или } \frac{k\pi}{n} \leq x < 2\pi, \end{cases} \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Через S_{2n}^r ($r \in \mathbb{N}$) обозначают $2n$ -мерное подпространство 2π -периодических интегралов от функций $s(x) \in S_{2n}^0$ при дополнительном условии $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i = 0$. Функции из множества S_{2n}^r называют *полиномиальными сплайнами степени r дефекта 1* по разбиению $\{k\pi/n\}_{k=0}^{2n}$, и для любого элемента $s(x) \in S_{2n}^r$ имеет место неравенство

$$\|s^{(r)}\|_\infty \leq \frac{n^r}{\mathcal{K}_r} \|s\|_C. \quad (20)$$

Полагая $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\mathcal{K}_r/n^r)$, обозначим

$$B_{2n}^* \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon B \cap S_{2n}^r = \{s(x) \in S_{2n}^r : \|s\|_C \leq \varepsilon\}$$

и покажем справедливость включения $B_{2n}^* \subset C_K^r(\Phi)$. Из определения K -функционала и того факта, что $S_{2n}^r \subset L_\infty^r(2\pi)$, для произвольного сплайна $s(x) \in S_{2n}^r$ имеем

$$K_{r,\infty}(s, t) \leq \begin{cases} \|s\|_C, \\ t\|s^{(r)}\|_\infty. \end{cases} \quad (21)$$

Если $t \geq \mathcal{K}_r/n^r$, то, используя первое неравенство в соотношении (21), для любого элемента $s(x) \in B_{2n}^*$ запишем

$$K_{r,\infty}(s, t) \leq \|s\|_C \leq \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right) \leq \Phi(t).$$

Используя в случае $0 < t \leq \mathcal{K}_r/n^r$ второе неравенство из соотношения (21), а также оценку (20) и монотонное убывание функции $\Phi(t)/t$, для произвольного элемента $s(x) \in B_{2n}^*$ получим

$$K_{r,\infty}(s, t) \leq t\|s^{(r)}\|_\infty \leq t \frac{n^r}{\mathcal{K}_r} \|s\|_C \leq t \frac{n^r}{\mathcal{K}_r} \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right) \leq \Phi(t).$$

Таким образом, из $B_{2n}^* \subset C_K^r(\Phi)$ следует, что

$$b_{2n-1}(C_K^r(\Phi), C(2\pi)) \geq b_{2n-1}(B_{2n}^*, C(2\pi)) \geq \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_r}{n^r}\right). \quad (22)$$

Сопоставляя оценки (19) и (22) и учитывая (14), получим равенства (15), чем и завершаем доказательство теоремы 1.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При получении оценки сверху величины наилучшего приближения $E_n(f)_{L_1}$ произвольной функции $f(x) \in V_{K^*}^r(\Phi)$ тригонометрическими полиномами порядка $n - 1$ в метрике пространства $L_1(2\pi)$ воспользуемся в качестве элемента промежуточного приближения функцией Стеклова $g_\nu(x)$, построенной для функции $g(x) \in V^r(2\pi)$, и полиномом $P_{n,r+1}(g_\nu)$ вида (17):

$$\begin{aligned} E_n(f)_{L_1} &\leq \|f - P_{n,r+1}(g_\nu)\|_1 \leq \|f - g_\nu\|_1 + \|g_\nu - P_{n,r+1}(g_\nu)\|_1 \\ &\leq \|f - g_\nu\|_1 + \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} \|[g_\nu]^{(r+1)}\|_1. \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом (7) и (9) продолжим оценку (23) следующим образом:

$$\leq \|f - g_\nu\|_1 + \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} \|[g^{(r)}]_\nu^1\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - g_\nu\|_1 + \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} \bigvee_0^{2\pi}(g^{(r)}). \quad (24)$$

Переходя в обеих частях соотношений (23), (24) к пределу при $\nu \rightarrow 0$ и используя (11), получим

$$E_n(f)_{L_1} \leq \|f - g\|_1 + \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} \bigvee_0^{2\pi}(g^{(r)}).$$

В силу произвольного выбора $g(x) \in V^r(2\pi)$ и определения K -функционала $K_{r,V}^*(f, t)$ имеем

$$E_n(f)_{L_1} \leq K_{r,V}^*\left(f, \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}\right) \leq \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}\right).$$

Отсюда следует оценка сверху тригонометрического поперечника

$$d_{2n-1}^T(V_{K^*}^r(\Phi), L_1(2\pi)) \leq \sup\{E_n(f)_{L_1} : f \in V_{K^*}^r(\Phi)\} \leq \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}\right). \quad (25)$$

Для оценки снизу бернштейновского поперечника $b_{2n-1}(V_{K^*}^r(\Phi), L_1(2\pi))$ рассмотрим шар

$$\overline{B}_{2n} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1 B_{2n} \cap S_{2n}^r = \{s(x) \in S_{2n}^r : \|s\|_1 \leq \varepsilon_1\},$$

где $\varepsilon_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\mathcal{K}_{r+1}/n^{r+1})$. Учитывая, что для произвольного сплайна $s(x) \in S_{2n}^r$

$$\bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}) \leq \frac{n^{r+1}}{\mathcal{K}_{r+1}} \|s\|_1 \quad (26)$$

(см., например, [2, с. 282]) и

$$K_{r,V}^*(s, t) \leq \begin{cases} \|s\|_1, \\ t \bigvee_0^{2\pi}(s^{(r)}), \end{cases} \quad (27)$$

рассмотрим при доказательстве справедливости включения $\overline{B}_{2n} \subset V_{K^*}^r(\Phi)$ два случая.

Пусть $t \geq \mathcal{K}_{r+1}/n^{r+1}$. Тогда для всех $s(x) \in \overline{B}_{2n}$ на основании (27) запишем

$$K_{r,V}^*(s, t) \leq \|s\|_1 \leq \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}\right) \leq \Phi(t).$$

Если $0 < t \leq \mathcal{K}_{r+1}/n^{r+1}$, то из (26), (27) и монотонного убывания $\Phi(t)/t$ получаем

$$K_{r,V}^*(s, t) \leq t \frac{n^{r+1}}{\mathcal{K}_{r+1}} \|s\|_1 \leq t \frac{n^{r+1}}{\mathcal{K}_{r+1}} \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}\right) \leq \Phi(t).$$

Используя определение бернштейновского поперечника, отсюда имеем

$$b_{2n-1}(V_{K^*}^r(\Phi), L_1(2\pi)) \geq b_{2n-1}(\overline{B}_{2n}, L_1(2\pi)) \geq \Phi\left(\frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}}\right). \quad (28)$$

Равенства (16) следуют из (14) и сопоставления оценок (25) и (28). Теорема 2 доказана.

6. В заключение рассмотрим вопрос, связанный с существованием мажорирующих функций. Очевидно, что сформулированному в теореме 1 ограничению на мажоранту будет удовлетворять любой монотонно возрастающий выпуклый вверх модуль непрерывности. Одним из примеров может служить функция $\Phi_*(t) = t^\mu$, где $0 < \mu \leq 1$.

В качестве второго примера рассмотрим семейство функций

$$\tilde{\Phi}(\beta, t) = \int_0^t \frac{\beta(\tau)}{\tau^\alpha} d\tau + t \int_t^{2\pi} \frac{\beta(\tau)}{\tau^{\alpha+1}} d\tau,$$

где $0 < \alpha < 1$, $\beta(\tau)$ – произвольная положительная на сегменте $[0, 2\pi]$ функция, интегрируемая по Риману. Функция $\tilde{\Phi}(\beta, t)$ является монотонно возрастающей и $\lim\{\tilde{\Phi}(\beta, t) : t \rightarrow 0\} = 0$. Обозначим $G(\beta, t) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\Phi}(\beta, t)/t$. Поскольку

$$G^{(1)}(\beta, t) = -\frac{1}{t^2} \int_0^t \frac{\beta(\tau)}{\tau^\alpha} d\tau < 0,$$

то для монотонно убывающей функции $G(\beta, t)$ при любых $0 < t_1 < t_2 \leq 2\pi$ имеем $G(\beta, t_1) > G(\beta, t_2)$ или, что то же самое, $\tilde{\Phi}(\beta, t_1)/\tilde{\Phi}(\beta, t_2) > t_1/t_2$. Полагая, например, $\beta(t) \equiv 1$, имеем

$$\tilde{\Phi}(1, t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} - \left(\frac{t}{2\pi} \right)^\alpha \right\}.$$

Для $\beta(t) = t^\alpha$ получим $\tilde{\Phi}(t^\alpha, t) = t(1 + \ln(2\pi/t))$. Исходя из сказанного, сформулируем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть функция $\beta(t)$ удовлетворяет сформулированным выше ограничениям, $0 < \alpha < 1$ и $0 < \mu \leq 1$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} \Pi_{2n-1}(C_K^r(\tilde{\Phi}(\beta)), C(2\pi)) &= \int_0^{\mathcal{K}_r/n^r} \frac{\beta(\tau)}{\tau^\alpha} d\tau + \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \int_{\mathcal{K}_r/n^r}^{2\pi} \frac{\beta(\tau)}{\tau^{\alpha+1}} d\tau, \\ \Pi_{2n-1}(C_K^r(\Phi_*), C(2\pi)) &= \frac{\mathcal{K}_r^\mu}{n^{r\mu}}, \end{aligned}$$

где $\Pi_m(\cdot)$ – любой из m -поперечников $d_m(\cdot)$, $b_m(\cdot)$ или $d_m^T(\cdot)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. При выполнении требований следствия 3 для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Pi_{2n-1}(V_{K^*}^r(\tilde{\Phi}(\beta)), L_1(2\pi)) &= \int_0^{\mathcal{K}_{r+1}/n^{r+1}} \frac{\beta(\tau)}{\tau^\alpha} d\tau + \frac{\mathcal{K}_{r+1}}{n^{r+1}} \int_{\mathcal{K}_{r+1}/n^{r+1}}^{2\pi} \frac{\beta(\tau)}{\tau^{\alpha+1}} d\tau, \\ \Pi_{2n-1}(V_{K^*}^r(\Phi_*), L_1(2\pi)) &= \frac{\mathcal{K}_{r+1}^\mu}{n^{(r+1)\mu}}, \end{aligned}$$

где $\Pi_m(\cdot)$ – любой из перечисленных выше m -поперечников.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] DeVore R. A. Degree of approximation // Approximation Theory, II / ed. G. G. Lorents, C. K. Chui, and L. L. Schumaker. New York: Acad. Press, 1976. P. 117–161.
- [2] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.
- [3] Schumaker L. L. Spline Functions: Basic Theory. New York: John Wiley, 1981.
- [4] Vakarchuk S. B. Widths of functional classes and extremal subspaces // 9th Intern. Conf. on Approximation Theory (Nashville, Tennessee, USA, January 3–6, 1998). Abstracts, 1998. P. 57–58.
- [5] Vakarchuk S. B. On the widths of functional classes and the best linear methods of approximation // Теория приближений и гармонический анализ. Тезисы докл. Междунар. конф. (Тула, 26–29 мая 1998 г.), 1998. P. 295–296.
- [6] Вакарчук С. Б. О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 2. С. 186–193.

Академия таможенной службы Украины, г. Днепропетровск

Поступило

07.07.1999

Исправленный вариант

27.07.2001