Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Егоров, Пример пятилистной экзотической накрывающей над $\mathbb{C}^2$, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 532–547

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:29:04

УДК 517

ПРИМЕР ПЯТИЛИСТНОЙ ЭКЗОТИЧЕСКОЙ НАКРЫВАЮЩЕЙ НАД $\mathbb{C}^2$

Г. В. Егоров

В статье предложен пример пятилистной покрывающей, являющейся топологическим контрпримером в том же смысле, что и пример Витушкина. Вычислены такие его топологические характеристики, как образующие двумерных гомотопий и значения канонических классов.

Библиография: 5 названий.

1. Формулировка результата. Пример, описываемый в настоящей работе, возник в связи с известной гипотезой о якобиане, которая формулируется так: если полиномиальное отображение $\mathbb{C}^2$ в себя локально обратимо, то оно обратимо в целом. Очевидно, свойство локальной обратимости такого отображения равносильно равенству его якобиана ненулевой константе.

Существование контрпримера к гипотезе о якобиане влечет за собой существование голоморфной разветвленной покрывающей над $\mathbb{C}^2$, регулярная часть которой (т.е. максимальное открытое подмногообразие, на котором проекция в $\mathbb{C}^2$ локально гомеоморфна) односвязна, а множество точек ветвления состоит из конечного числа алгебраических кривых, изоморфных $\mathbb{C}^1$. Витушкин в статье [1] показал, что если отказаться от голоморфности, такую покрывающую построить можно. А именно, построен пример трехлистной покрывающей над $\mathbb{C}^2$, состоящей из многообразия, склеенного из $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^2$, и его отображения на $\mathbb{C}^2$, которое собственно, локально обратимо на $\mathbb{R}^4$ и имеет двулистное ветвление вдоль $\mathbb{R}^2$.

Оревков (см. [2]) построил голоморфную покрывающую над открытым шаром в $\mathbb{C}^2$, гомеоморфную покрывающей Витушкина. Однако в статьях [3] и [4] Домрина и Оревков доказали, что якобиан полиномиального отображения $\mathbb{C}^2$ в себя, имеющего топологическую кратность, меньшую 5, и не являющегося глобальным гомеоморфизмом, обращается в нуль. Следовательно, пример из статьи [1] не реализуем полиномиально.

Таким образом, если пример к гипотезе о якобиане существует, то топологическая кратность задаваемого им отображения не меньше 5. В данной статье доказывается следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Существует пятилистная покрывающая (P, ψ) , состоящая из связного четырехмерного вещественного многообразия P и его проекции ψ на $\mathbb{C}^2$, такая, что*

- 1) *многообразие P состоит из трех попарно не пересекающихся частей: P^* , гомеоморфной $\mathbb{R}^4$, и F_1^* и F_2^* , гомеоморфных $\mathbb{R}^2$;*

- 2) отображение ψ собственно, локально гомеоморфно на P^* и имеет двулистное ветвление вдоль F_1^* и F_2^* ;
- 3) группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем изоморфна $\mathbb{Z}^2$; в качестве образующих можно выбрать две симплициальные вложенные сферы без самопересечений S_1 и S_2 такие, что S_i пересекает F_i^* в одной точке ($i = 1, 2$), причем $S_i \cdot F_i^* = 1$, а $S_i \cap F_j^* = \emptyset$ при $i \neq j$; кроме того, $S_1 \cdot S_1 = -3$, $S_2 \cdot S_2 = -15$, $S_1 \cdot S_2 = -3$, а значения канонических классов $K(S_1) = K(S_2) = 1$.

Построенный пример интересен в настоящее время тем, что он, быть может, подсказывает топологическую структуру, которая может появиться при рассмотрении возможного контрпримера к гипотезе о якобиане (если он существует). В настоящее время неизвестно, существует ли над $\mathbb{C}^2$ накрывающая с голоморфной структурой и топологическими характеристиками, как в пункте 3) утверждения 1.

Отметим, что для накрывающей Витушкина посчитаны аналогичные топологические характеристики (см. [5]). Ее группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем изоморфна $\mathbb{Z}$, а образующая представляет из себя вложенную симплициальную сферу S , имеющую с $\mathbb{R}^2$ пересечение лишь в одной точке и индекс пересечения, равный 1. При этом $K(S) = 1$, а $S \cdot S = -3$.

2. Построение проекции кривой ветвления. Для простоты накрывающая строится таким образом, что F_1^* и F_2^* биективно проектируются в одно и то же множество $F \subset \mathbb{C}^2$. (В таком случае накрывающая, разумеется, не может соответствовать контрпримеру к гипотезе о якобиане; доказательство этого, как в статье [3].) Это множество выберем так, что оно будет графиком четырехзначной функции $y = f(x) = \{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)\}$.

В плоскости X рассмотрим множество K , являющееся объединением трех отрезков $I_1 = [0, 1]$, $I_2 = [0, i]$, $I_3 = [0, -1]$ и трех кругов $K_1 = \{x : |x - 2| \leq 1\}$, $K_2 = \{x : |x - 2i| \leq 1\}$ и $K_3 = \{x : |x + 2| \leq 1\}$. Дополнение множества K (обозначим его K') конформно отобразим на внешность единичного круга так, чтобы бесконечно удаленная точка переходила в бесконечно удаленную. Обозначим через $\rho(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно модуль и аргумент образа произвольной точки $x \in K'$ при этом отображении. Кривые $\Lambda_\varphi \subset K'$, задаваемые соотношениями $\varphi = \text{const}$, $1 < \rho < \infty$, заполняют всю область K' , а их начальные точки λ_φ ($\rho = 1$) оббегают границу K (при этом каждый отрезок проходится дважды).

Определим функцию $f(x)|_K$ следующим образом:

$$f_1(0) = -1, \quad f_2(0) = -2, \quad f_3(0) = -3, \quad f_4(0) = -4;$$

для $x \in I_1$

$$f_1(x) = -1, \quad f_2(x) = -2 + \left(2 + \frac{1}{4}i\right)x, \quad f_3(x) = -3 + \left(3 - \frac{1}{4}i\right)x, \quad f_4(x) = -4;$$

для $x \in K_1$

$$f_1(x) = -1, \quad f_4(x) = -4, \quad \{f_2(x), f_3(x)\} = \pm \frac{1}{4}\sqrt{x-2};$$

для $x \in I_2$

$$f_1(x) = -1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}i\right)x, \quad f_2(x) = -2, \quad f_3(x) = -3, \quad f_4(x) = -4 - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}i\right)x;$$

для $x \in K_2$

$$\{f_1(x), f_4(x)\} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{-ix-2}, \quad f_2(x) = -2, \quad f_3(x) = -3;$$

для $x \in I_3$

$$f_1(x) = -1 + \left(4 + \frac{1}{4}i\right)x, \quad f_2(x) = -2, \quad f_3(x) = -3 + \left(2 - \frac{1}{4}i\right)x, \quad f_4(x) = -4;$$

для $x \in K_3$

$$\{f_1(x), f_3(x)\} = -5 \pm \frac{1}{4}\sqrt{-x-2}, \quad f_2(x) = -2, \quad f_4(x) = -4.$$

Продолжим функцию $f(x)$ с множества K на всю плоскость. Для каждого φ функцию вдоль кривой Λ_φ определим константой, равной значению $f(x)$ в точке λ_φ .

Из формулы Римана–Гурвица следует, что график F гомеоморфен $\mathbb{R}^2$.

3. Построение накрывающей. Для дальнейшего удобно зафиксировать точку y_0 на плоскости y такую, что $\operatorname{Re} y_0 = 0$, $\operatorname{Im} y_0 < 0$, и плоскость $y = y_0$ не пересекается с графиком F . Для определенности будем считать, что $y_0 = -i$.

Сначала построим накрывающую P_0 над плоскостью $x = 0$. Зафиксируем в плоскости Y четыре ориентированные кривые $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, каждая из которых выходит из точки y_0 , движется по прямой соответственно к точке $-1, -2, -3, -4$, затем обходит ее по малой окружности против часовой стрелки, после чего возвращается в точку y_0 по той же прямой.

Рассмотрим пять экземпляров плоскости Y . Нумерацию листов зафиксируем над точкой y_0 . Разрежем каждый из листов вдоль четырех лучей, идущих из точек $y = -1, -2, -3, -4$ вверх параллельно мнимой оси. Переклеим некоторые пары листов крест-накрест вдоль этих разрезов так, чтобы при движении вдоль кривой α выполнялась перестановка (23)(45), вдоль кривой $\beta - (12)(34)$, вдоль кривой $\gamma - (13)(25)$, вдоль кривой $\delta - (14)(35)$. Таким образом, полученная накрывающая имеет восемь двузначных точек ветвления, расположенных над точками $f_1(0), f_2(0), f_3(0), f_4(0)$.

Теперь будем продолжать накрывающую P_0 до накрывающей P над всем $\mathbb{C}^2$ по непрерывности. Необходимо лишь проверить согласованность P_0 и накрывающих над $x = 0$, которые могут получиться при продолжении накрывающей вдоль путей, представляющих значения $f_j(0)$, $j = 1, 2, 3, 4$. Зафиксируем на плоскости X три кривые L_j , $j = 1, 2, 3$, имеющие начало и конец в точке $x = 0$ и обходящие соответственно точки $2, 2i$ и -2 против часовой стрелки. Потребуем, чтобы кривые не имели самопересечений и замыкания областей, которые они ограничивают, пересекались лишь в точке $x = 0$. Обозначим через P_j накрывающую над плоскостью $x = 0$, получаемую при продолжении накрывающей вдоль кривой L_j . Очевидно, что при продолжении P_j вдоль L_j заведомо получается P_0 (так как поднятие соответствующего пути на F стягиваемо), а

значит, при продолжении P_0 вдоль $-L_j$ получится также P_j . Теперь достаточно проверить согласованность накрывающих P_j , $j = 0, 1, 2, 3$.

Обозначим через $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ ($j = 1, \dots, 5$) поднятия кривых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ на накрывающую P_0 (индекс обозначает номер листа, на котором лежит начальная точка). Заметим, что $\alpha_1, \beta_5, \gamma_4$ и δ_2 замкнуты в P_0^* и стягиваемы в P_0^* , т.е. являются тривиальными циклами.

Пусть Ω — одна из нетривиальных дуг $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$, $j = 1, \dots, 5$, а $\pm L_j(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — параметризация кривой $\pm L_j$. Деформацией дуги Ω вдоль пути $\pm L_j$ будем называть непрерывное по t семейство дуг $\{\Omega(t)\}$, $0 \leq t \leq 1$, такое, что при всяком t дуга $\Omega(t)$ лежит в регулярной части накрывающей над плоскостью $x = \pm L_j(t)$, а ее начало и конец — над точкой $(\pm L_j(t), y_0)$. Требуется также, чтобы $\Omega(0) = \Omega$, а $\Omega(1)$ представляло собой путь, составленный из цепочки последовательно проходимых нетривиальных дуг из набора $\{\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j\}$, $j = 1, \dots, 5$.

ЛЕММА 1. Деформация дуг γ_j, δ_j и α_j , $j = 1, \dots, 5$, возможна вдоль кривых L_1, L_2 и $-L_3$ соответственно, пути, получаемые при деформации, гомотопны в P_j путям, проекции которых суть соответственно $\alpha + \beta - \alpha$, $-\beta + \alpha + \beta$ и $-\delta + \gamma + \delta$ (неопределенность возникает из-за того, что некоторые из поднятых дуг являются тривиальными).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя правила перестановки значений функции $f(x)$, задающей кривую ветвления, можно проследить трансформацию каждой из указанных петель при движении по соответствующей траектории, а затем по возвращении в точку $x = 0$ записать проекцию результата в виде комбинации последовательно проходимых петель из нашего набора.

Теперь уже можно проверить, что при движении вдоль кривых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ листы накрывающей, скажем, P_1 , переставляются так же, как и листы P_0 . При движении вдоль α и δ перестановки, очевидно, одинаковые. При движении вдоль $\alpha + \beta - \alpha$ на P_1 переставляются, очевидно, те же листы, что и при движении вдоль γ на P_0 . Отсюда можно явно найти перестановку листов P_1 , соответствующую кривой β , и убедиться, что перестановка листов P_0 такая же. Для проверки одинаковости перестановок вдоль пути γ заметим, что если совершить еще один обход вдоль кривой L_1 , то, как следует из леммы 1, γ переставляет листы P_1 так же, как $\alpha + \beta - \alpha$ переставляет листы P_0 . Отсюда находим, что листы накрывающих P_0 и P_1 при движении вдоль γ переставляются одинаково. Аналогичные рассуждения проходят для деформаций вдоль кривых L_2 и L_3 .

Из построения видно, что множество особых точек накрывающей состоит из двух связанных компонент, каждая из которых гомеоморфно проектируется в $\mathbb{C}^2$ на график F . Таким образом, каждая из них гомеоморфна $\mathbb{R}^2$. Обозначим через F_1^* связную компоненту, вокруг которой происходит ветвление при движении по пути $\alpha_2 + \alpha_3$, а через F_2^* другую компоненту. Их объединение обозначим через F^* .

4. Доказательство стягиваемости P^* . Над $\Lambda_\varphi \times Y$ накрывающая P является прямым произведением $P|_{\Lambda_\varphi}$ на луч L_φ . Поэтому P^* можно по себе стянуть на $P^*|_H$ так, чтобы $P^*|_H$ оставалось неподвижным и при всяком φ $P^*|_{\Lambda_\varphi \times Y}$ стянулось на $P^*|_{\Lambda_\varphi \times Y}$. Это преобразование P на $P^*|_H$ обозначим через Ω_1 .

На отрезке I_1 фиксируем отрезок $I_1^0 = [1 - \varepsilon, 1]$ длины ε , где ε выбрано столь малым, что при всяком $x \in I_1^0$ значения $f_2(x)$ и $f_3(x)$ лежат строго внутри круга $K_{1,y} = \{y : |y| \leq 1/2\}$. Обозначим через C цилиндр $I_1^0 \times K_{1,y}$, через B бицилиндр $K_1 \times K_{1,y}$.

Множество $K_1 \cup I_1^0$ стягивается по себе в точку $x = 1 - \varepsilon$. Поэтому можно построить отображение Ω_2 множества $P^*|_{(I_1^0 \cup K_1) \times Y}$ в себя, тождественное на $P^*|_{C \cup B}$ и на P^* над плоскостью $x = 1 - \varepsilon$, стягивающее P^* над множеством $(I_1^0 \cup K_1) \times \{y : |y| \geq 2/3\}$ в P^* над плоскостью $x = 1 - \varepsilon$ и не изменяющее координату y (т.е. точка, лежащая в P^* над точкой (x, y) , перейдет в точку, лежащую над точкой (x', y) , причем если $|y| \geq 2/3$, то $x' = 1 - \varepsilon$). Часть $\Omega_2(P^*|_{H_1})$, расположенную над кольцом $(I_1^0 \cup K_1) \times \{1/2 \leq |y - 4| \leq 2/3\}$, преобразованием Ω_3 стянем в P^* над границей $C \cup B$ и плоскостью $x = 1 - \varepsilon$.

Множество $P^*|_{C \cup B}$ состоит из трех связных компонент: однолистной компоненты P' , проектирующейся на $C \cup B$ взаимно-однозначно, и двух двулистных компонент P'' и P''' , ветвящихся около F^* .

Преобразованием Ω_4 стянем компоненту P' на принадлежащий ей крайний диск, лежащий над $\{x = 1 - \varepsilon, |y| \leq 1/2\}$. Точки крайнего диска преобразованием Ω_4 оставляет на месте.

Компоненту $P''|_B$ преобразованием Ω_5 продеформируем на $P''|_{\partial B}$, где ∂B – граница B . Преобразование Ω_5 оставляет неподвижным $P''|_{\partial B}$ и $P''|_C$. Возможность этого видна из конструкции накрывающей $P''|_B$.

Множество ∂B представим себе в виде объединения двух заполненных торов $T' = \partial K_1 \times K_{1,y}$ и $T'' = K_1 \times \partial K_{1,y}$, склеенных по тору $T = \partial K_1 \times \partial K_{1,y}$.

Пусть $x \in I_1^0 \cup \partial K_1$, $K_y(x)$ – замкнутый круг, лежащий в плоскости $x = \text{const}$, определяемый неравенством $|y| \leq 1/2$, $d(x)$ – отрезок из $K_y(x)$ с концами на $\partial K_y(x)$, проходящий через центр круга и перпендикулярный отрезку $[(x, f_2(x)), (x, f_3(x))]$.

Поверхность $P''_{K_y(x)}$ расслаивается на полуинтервалы, открытые концы которых сходятся в двух точках $y = f_2(x)$ и $y = f_3(x)$. Замкнутые концы этих полуинтервалов замataют один раз $P''|_{\partial K_y(x)}$ и два раза $P''|_{d(x)}$. Обозначим через Ω_6 преобразование множества $\Omega_5(P'')$ в себя, стягивающее каждый из этих полуинтервалов на его замкнутый конец и оставляющее $P''|_{T''}$ на месте. Преобразование Ω_6 переводит $P''|_{T'}$ в $S' \cup P''|_T$, где $S' = P''|_{\bigcup_{x \in \partial K_1} d(x)}$. Множество S' при этом преобразовании остается неподвижным. Аналогично, $P''|_C$ переводится преобразованием Ω_6 на $P''|_{\partial C} \cup P''|_{\bigcup_{x \in I_1^0} d(x)}$. Деформацию Ω_6 доопределим на множестве $P''|_{(I_1 \setminus I_1^0) \times Y}$ таким образом, чтобы вне некоторой достаточно малой окрестности поверхности P^* над плоскостью $x = 1 - \varepsilon$ это преобразование было тождественным.

На торе T введем координаты h и λ . Для точки $(x, y) \in T$ $h = \arg(y)$, $\lambda = \arg(x - 2)$.

Из построения множества S' нетрудно видеть, что оно гомеоморфно кольцу. Граница S' состоит из двух замкнутых несамопересекающихся кривых $\partial_1 S' \subset P''|_T$ и $\partial_2 S' \subset P''|_T$, на каждой из которых h и λ монотонно пробегают значения от 0 до 2π и от 0 до 4π соответственно.

Из построения накрывающей P также видно, что $P''|_{T''}$ состоит из двух компонент T_1'' и T_2'' , гомеоморфных T'' . (Для этого можно, например, заметить, что для $x \in K_1$ мы определяли переклейки только внутри круга $\{x = \text{const}, |y| \leq 1/4\}$, но никак не на множестве, на котором $|y - 4| = 1/2$.) Гомеоморфизм осуществляется проектированием ψ .

Нумерацию T_1'' и T_2'' будем предполагать выбранной так, чтобы $\partial_1 S' \subset T_1''$, а $\partial_2 S' \subset T_2''$.

Множество $P''|_{\partial K_y(1)}$ состоит из двух окружностей $\delta_1(K_y(1)) \in T_1''$ и $\delta_2(K_y(1)) \in T_2''$. На этих окружностях λ постоянно и равно π , а h монотонно изменяется от 0 до 2π .

Поскольку на кривых $\partial S'$ и $\delta_1(K_y(1))$ координата h монотонно пробегает значения

от 0 до 2π , то всякий диск $K_1''(y) \subset T_1''$, где $K_1''(y) = \{(x, y) : x \in K_1, y = \text{const}\}$, имеет одну точку $a_1(y) \in \partial_1 S'$ и одну точку $b_1(y) \in \delta_1(K_y(1))$.

Обозначим через Ω_7 преобразование, стягивающее диски $K_1''(y)$ на соответствующие отрезки $[a_1(y), b_1(y)]$. Положим $S_1'' = \Omega_7(T_1'') = \bigcup_{y \in \partial_{K_1, y}} [a_1(y), b_1(y)]$. Аналогично, T_2'' стягивается преобразованием Ω_7 на поверхность S_2'' . В дополнении к $T_1'' \cup T_2''$ преобразование Ω_7 определяется тождественным. Деформация Ω_7 является непрерывной, поскольку T_1'' и T_2'' связаны с другими частями $\Omega_6(P''|_{C \cup \partial B})$ лишь через кривые $\delta_1(K_y(1))$, $\delta_2(K_y(1))$, $\partial_1 S'$ и $\partial_2 S'$, которые преобразование Ω_7 оставляет на месте.

Так как $P^*|_{(I_1 \setminus I_1^0) \times Y}$ гомеоморфно прямому произведению покрывающей $P_0^* = P^*|_{\{0\} \times Y}$ и отрезка, мы можем сделать преобразование Ω_8 , стягивающее $P^*|_{(I_1 \setminus I_1^0) \times Y}$ на P_0^* и оставляющее неподвижным P_0^* и $P''|_{K_y(1)}$. Множество $\Omega_6(P''|_C)$ этим преобразованием растягивается и укладывается внутри $P^*|_{I_1 \times Y}$ таким образом, чтобы $P''|_{K_y(1)}$ оставалось на месте, а $P''|_{K_y(1-\varepsilon)}$ оказывалось лежащим в P_0^* . Положим $S = \Omega_8(\Omega_6(P''|_C))$. Через $S(x)$ будем обозначать часть S , лежащую над плоскостью $x = \text{const}$. Множество $S(1) = \Omega_6(P''|_{K_y(1)}) = \delta_1(K_y(1)) \cup \delta_1(K_y(1)) \cup d_1(1) \cup d_2(1)$ состоит из двух окружностей $\delta_1(K_y(1))$ и $\delta_2(K_y(1))$ и двух отрезков $d_1(1) \subset P''|_{d(1)}$ и $d_2(1) \subset P''|_{d(1)}$. Каждый из этих отрезков приклеен одним концом к $\delta_1(K_y(1))$, а другим к $\delta_2(K_y(1))$. Концы этих двух отрезков делят окружность $\delta_1(K_y(1))$ на две полуокружности $l_1(1)$ и $m_1(1)$ и делят окружность $\delta_2(K_y(1))$ на полуокружности $l_2(1)$ и $m_2(1)$. Будем для определенности предполагать, что $l_1(1)$ и $l_2(1)$ проектируются на плоскость $x = 1$ в верхнюю половину окружности $\delta(K_y(1))$, а $m_1(1)$ и $m_2(1)$ – в нижнюю половину этой окружности. Номера и ориентацию отрезков $d_1(1)$ и $d_2(1)$ зададим так, чтобы пути $\Pi_1(1) = l_1(1) + d_1(1) - m_2(1) + d_2(1)$ и $\Pi_2(1) = l_2(1) + d_2(1) - m_1(1) + d_1(1)$ оказались непрерывными и замкнутыми. Преобразование Ω_8 можно задать так, чтобы кривые $S(x)$ ($0 < x \leq 1$) имели одинаковую топологическую структуру:

$$\begin{aligned} S(x) &= \delta_1(K_y(x)) \cup \delta_2(K_y(x)) \cup d_1(x) \cup d_2(x) \\ &= l_1(x) \cup m_1(x) \cup l_2(x) \cup m_2(x) \cup d_1(x) \cup d_2(x). \end{aligned}$$

Положим $\sigma_1 = S \cup S' \cup S''$, где $S'' = S_1'' \cup S_2''$. Аналогичными цепочками деформаций стянем P''' на двумерный комплекс σ_2 . Применяя аналогичные преобразования, стянем $P^*|_{H_2}$ на комплексы σ_3 и σ_4 , а $P^*|_{H_3}$ на комплексы σ_5 и σ_6 . Таким образом, P^* оказалось стянутым на $\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \sigma_3 \cup \sigma_4 \cup \sigma_5 \cup \sigma_6 \cup P_0^*$.

Определим теперь преобразование Ω_9 , стягивающее P_0^* на кривую K^* , являющуюся объединением дуг $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ и δ_i за исключением указанных выше тривиальных циклов. Пусть $G_\alpha, G_\beta, G_\gamma, G_\delta$ – области, ограниченные дугами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соответственно (эти области можно считать выпуклыми), а G – дополнение объединения этих четырех областей. Область G расслаивается на лучи, начальные точки которых оббегают границу G . Над каждым таким лучом P_0^* распадается на пять лучей. Преобразование Ω_9 стягивает в $P^*|_G$ эти лучи в их начальные точки. Множество $P^*|_{F_\alpha}$ состоит из трех компонент. Одна из них ограничена дугой α_1 , две другие – дугами $\alpha_2 + \alpha_3$ и $\alpha_4 + \alpha_5$. Первую компоненту Ω_9 стягивает в точку, лежащую над $y = 0$. Вторую компоненту Ω_9 растягивает на дугу $\alpha_2 + \alpha_3$ по лучам, выходящим из точки $y = 2$; с третьей компонентой Ω_9 поступает так же. Над $G_\beta, G_\gamma, G_\delta$ преобразование Ω_9 задается аналогично.

Подправим преобразование Ω_8 и соответствующие преобразования в определении σ_i , $i \geq 2$, таким образом, чтобы $S(0) = \sigma_1 \cap P_0^* \subset K^*$ и $\sigma_i \cap P_0^* \subset K^*$ при $i \geq 2$. Тогда,

доопределив Ω_9 с P_0^* на $\sigma = \bigcup_{i=1}^6 \sigma_i$ тождественным преобразованием, мы получим непрерывное на $\sigma \cup P_0^*$ преобразование Ω_9 , переводящее $\sigma \cup P_0^*$ на σ и оставляющее σ неподвижным.

ЛЕММА 2. Множество P^* стягивается по себе на двумерный комплекс $\sigma = \bigcup_{i=1}^6 \sigma_i$, обладающий следующими свойствами:

- 1) $\sigma_i = K_1^i \cup K_2^i \cup T_1^i \cup T_2^i$, где K_j^i и T_j^i – гомеоморфы замкнутых дисков (строго говоря, некоторые точки границы K_j^i будут склеены); в дальнейшем K_j^i будем называть квадратами, а T_j^i – треугольниками;
- 2) T_1^i и T_2^i вложены в P^* без самопересечений и не имеют общих точек (при фиксированном i); в K^* эти треугольники имеют лишь по одной точке;
- 3) $K_1^i \setminus \partial K_1^i$ и $K_2^i \setminus \partial K_2^i$ вложены в P^* без самопересечений и не имеют общих точек друг с другом и с треугольниками T_1^i и T_2^i ; две противоположные стороны $\partial_1(K_j^i)$ и $\partial_3(K_j^i)$ квадрата K_j^i лежат в K^* , а две другие – $\partial_2(K_j^i)$ и $\partial_4(K_j^i)$ – подклеены к границам треугольников T_1^i и T_2^i , причем так, что одна сторона заклеивает всю границу одного треугольника (оба конца этой стороны приходятся на одну точку границы треугольника, а именно ту, которая лежит в K^* , – отсюда и склейка пары граничных точек квадрата), а другая сторона – всю границу другого треугольника аналогичным образом;
- 4) явный вид сторон $\partial_1(K_j^i)$ и $\partial_3(K_j^i)$ квадратов K_j^i таков, как указано в таблице 1.

ТАБЛИЦА 1

	$\partial_1(K_j^i)$	$-\partial_3(K_j^i)$
K_1^1	γ_1	$\beta_1 - \alpha_3$
K_2^1	γ_3	$\alpha_3 + \beta_2$
K_1^2	γ_2	$\alpha_2 + \beta_3 - \alpha_5$
K_2^2	γ_5	$\alpha_5 + \beta_4 - \alpha_2$
K_1^3	δ_1	$-\beta_2 + \alpha_2 + \beta_3$
K_2^3	δ_4	$-\beta_3 + \alpha_3 + \beta_2$
K_1^4	δ_3	$-\beta_4 + \alpha_4$
K_2^4	δ_5	$\alpha_5 + \beta_4$
K_1^5	α_2	$\gamma_2 + \delta_5$
K_2^5	α_3	$-\delta_5 + \gamma_5$
K_1^6	α_4	$-\delta_1 + \gamma_1 + \delta_3$
K_2^6	α_5	$-\delta_3 + \gamma_3 + \delta_1$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим справедливость леммы при $i = 1$. Прежде всего подправим преобразование Ω_8 таким образом, чтобы при стремлении x к нулю дуги $d_1(x)$ и $d_2(x)$ сжимались до точек, лежащих над $y = 0$. Кривые $l_1(x) + m_1(x)$ и $l_2(x) + m_2(x)$ при подходе x к нулю в определении Ω_8 будем деформировать так, чтобы при $x = 0$ выполнялось $l_1(0) = \gamma_1$, $l_2(0) = \gamma_3$, $-m_1(0) = -\beta_2 - \alpha_3$, $-m_2(0) = \alpha_3 - \beta_1$ (в данном случае мы воспользовались тем, что цикл α_1 тривиален и при подходе к нулю может

быть стянут в точку). (В действительности это верно лишь с точностью до перенумерации l_1 и l_2 , m_1 и m_2 ; можно считать, что наша нумерация выбрана именно так, как нужно.)

Искомые треугольники T_1^1 и T_2^1 замечаются отрезками $d_1(x)$ и $d_2(x)$ ($0 \leq x \leq 1$).

Теперь по комплексу σ_1 перетянем дугу $l_1(0)$ в дугу $m_2(0)$. След этой деформации даст нам искомый квадрат K_1^1 . Делаем это так. Изменяя x от 0 до 1, мы перетянем $l_1(0)$ в $l_1(1)$. Дугу $l_1(1)$ перетянем по поверхности $S_1'' \subset T_1''$ в кривую l' (точки дуги $l_1(1)$ при этой деформации движутся по отрезкам $[a_1(y), b_1(y)]$). Крайние точки дуги $l_1(1)$ при этом остаются неподвижными. Кривая l' состоит из точек $b_1(y)$; $l' \subset \partial S'$ и изменение координаты h на ней равно π , координаты $\lambda - 2\pi$. Далее, двигая точки l' по отрезкам, лежащим над $d(x)$ ($x \in \partial K_1$), мы перетянем l' в дугу m' . Концы m' совпадают с концами $m_2(1)$. По диску $S_2'' \subset T_2''$, оставляя концы неподвижными, перетянем m' в $m_2(1)$. В свою очередь, $m_2(1)$ по поверхности S (изменяя x от 1 до 0) перетянем в дугу $m_2(0)$. След этой цепочки деформаций и есть квадрат K_1^1 . Квадрат K_2^1 строится как след деформации линии $l_2(0)$ в $m_1(0)$. Полагая $\partial_1(K_1^1) = l_1(0)$, $\partial_3(K_1^1) = -m_2(0)$, $\partial_1(K_2^1) = l_2(0)$, $\partial_3(K_2^1) = -m_1(0)$, получим искомое, поскольку правые части этих выражений уже выписаны раньше. При $i \geq 2$ доказательство утверждения аналогично.

(Отметим, что в правой колонке таблицы 1 стоят цепочки дуг, получаемые в результате деформаций вдоль кривых $\pm L_j$, указанных в лемме 1. Это следует непосредственно из этой леммы и того, что крайние точки дуг не меняются в результате деформации.)

Докажем теперь, что σ стягивается по себе в точку (это преобразование обозначим через Ω_{10}). Из утверждения следует, что дуга β_1 является частью границы комплекса σ_1 и не входит в границу σ_i при $i \geq 2$, т.е. β_1 является краем комплекса σ . Сделаем преобразование, стягивающее квадрат K_1^1 по себе на кривую, состоящую из трех его сторон $\partial_1(K_1^1)$, $\partial_2(K_1^1)$ и $\partial_4(K_1^1)$, а также части α_3 стороны $\partial_3(K_1^1)$. Дуга β_1 растягивается при этом на всю эту кривую. Для полученного комплекса дуга γ_1 стала краем, так как в комплексе σ к ней примыкали лишь два квадрата K_1^1 и K_1^6 , но K_1^1 не принадлежит новому комплексу. Поэтому аналогичным образом мы можем стянуть квадрат K_1^6 . Далее проведем последовательно следующие преобразования: используя α_4 , стянем квадрат K_4^1 , $\delta_3 - K_2^2$, $\delta_1 - K_1^3$, $\gamma_3 - K_2^1$, $\beta_2 - K_2^3$, $\beta_3 - K_1^2$, $\gamma_2 - K_1^5$, $\alpha_2 - K_2^2$, $\gamma_5 - K_2^5$, $\beta_4 - K_2^4$.

В результате этих преобразований комплекс σ стянется на комплекс $\sigma' = \alpha_3 \cup \alpha_5 \cup \delta_4 \cup \delta_5 \cup (\bigcup_{i,j} T_j^i)$. Но в силу утверждения 2) леммы 2 треугольники T_j^i не имеют попарных пересечений и не самопересекаются, а следовательно, могут быть стянуты в те свои точки, которые лежат в K^* . Таким образом, мы стянули σ на $\alpha_3 \cup \alpha_5 \cup \delta_4 \cup \delta_5$. Рассмотрим кривую $-\delta_4 - \alpha_5 + \delta_5 + \alpha_3$. Она не имеет самопересечений и не замкнута, следовательно, может быть стянута в точку. Таким образом, мы получили искомое преобразование Ω_{10} .

Применяя последовательно преобразования $\Omega_1, \dots, \Omega_{10}$, мы получаем стягивание P^* в точку.

Заметим теперь, что все преобразования $\Omega_1, \dots, \Omega_{10}$ заключаются в стягивании некоторых семейств полуинтервалов или отрезков в их начальные точки (или представляются собой композицию таких преобразований). Заменив эти преобразования близкими к ним гомеоморфизмами, стягивающими эти полуинтервалы (отрезки) не в точки, а в достаточно малые дуги, мы получим сжатие P^* в малую окрестность одной точки накрывающей. Ясно, что мы можем добиться, чтобы эта окрестность проектировалась на $\mathbb{C}^2$ гомеоморфно, а также чтобы образ при этой проекции представлял собой открытый четырехмерный шар. Значит, P^* гомеоморфно $\mathbb{R}^4$.

5. Пробные сферы. Зададим ориентацию на многообразиях P и F^* . Ориентацию $\mathbb{C}^2$ мы выбираем естественным образом, а ориентацию на P мы поднимаем с $\mathbb{C}^2$. Ориентацию особой кривой F^* мы зададим, поднимая ее сначала с плоскости X на проекцию особой кривой (т.е. на график F функции $f(x)$), а затем с проекции и на саму кривую.

Для подсчета индексов самопересечения пробных сфер мы явно построим сферу S_1 . Построение же сферы S_2 мы приводить не будем из-за его громоздкости и необходимости проведения дополнительных рассуждений (хотя ее явное построение позволяет получить дополнительную информацию, см., например, следующий пункт). Вместо этого мы построим вспомогательную сферу S_3 , которая пересекает первую компоненту особой кривой в двух точках и имеет в каждой из этих точек индекс пересечения $+1$, а вторую компоненту – в одной точке и имеет с ней индекс пересечения -1 . Найдя величины $S_1 \cdot S_1$, $S_1 \cdot S_3$ и $S_3 \cdot S_3$, мы сможем найти $S_2 \cdot S_2$, воспользовавшись тем, что S_2 можно получить, подклеив к S_3 два экземпляра S_1 .

ЛЕММА 3. *Всякая деформация $\Omega(t)$ какой-либо петли вдоль кривой $\pm L_j$ порождает диск D , вложенный в регулярную часть накрывающей, граница которого с точностью до ориентации равна $\Omega(1) - \Omega(0)$. Этот диск получается подклейкой к поверхности, заметаемой семейством кривых $\Omega(t)$, пары дисков, лежащих над плоскостью $y = y_0$. Эта поверхность проектируется на плоскость X в кривую L_j , а каждый из указанных дисков – на всю область, ограниченную этой кривой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из выбора точки y_0 видно, что поскольку над некоторым кругом, лежащим в плоскости $y = y_0$, проекция которого на плоскость X содержит кривую L_j , накрывающая распадается на диски, то начальная точка кривой $\Omega(t)$ при изменении t от 0 до 1 пробегает на одном из этих дисков замкнутую несамопересекающуюся кривую, которая и ограничивает один из двух искомых дисков. То же самое верно и для концевых точек семейства дуг. Все сказанное в лемме о проекции очевидно.

Воспользовавшись леммой 1, обозначим через D_1 диск, получаемый при деформации γ_5 вдоль L_1 , через D_2 – при деформации δ_5 вдоль L_2 , через D_3 – при деформации α_3 вдоль $-L_3$, через E_1 – при деформации γ_3 вдоль L_1 , через E_2 – при деформации δ_1 вдоль L_2 , через E_3 – при деформации δ_3 вдоль L_2 , через E_4 – при деформации α_5 вдоль $-L_3$. Ориентацию дисков выберем так, чтобы границы дисков были следующими:

$$\begin{aligned}\partial D_1 &= \alpha_5 + \beta_4 - \alpha_2 - \gamma_5, & \partial D_2 &= \delta_5 - \beta_4 - \alpha_5, & \partial D_3 &= \gamma_5 - \alpha_3 - \delta_5, \\ \partial E_1 &= \alpha_3 + \beta_2 - \gamma_3, & \partial E_2 &= \alpha_2 + \beta_3 - \delta_1 - \beta_2, \\ \partial E_3 &= \delta_3 - \alpha_4 + \beta_4, & \partial E_4 &= \gamma_3 + \delta_1 - \alpha_5 - \delta_3.\end{aligned}$$

Обозначим через D_4, E_5, E_6 и E_7 диски из F , лежащие над координатной плоскостью Y и имеющие границы $\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_4 + \alpha_5, -\alpha_2 - \alpha_3$ и $-\beta_3 - \beta_4$ соответственно.

ЛЕММА 4. *Поверхности $S_1^* = \bigcup_{i=1}^4 D_i$ и $S_3^* = \bigcup_{i=1}^7 E_i$ являются симплициальными сферами без самопересечений. Поверхность S_1^* имеет с особой кривой F^* накрывающей лишь одну общую точку (принадлежащую F_1^*) и индекс пересечения $S_1^* \cdot F_1^* = 1$. Поверхность S_3^* имеет одну общую точку с компонентой F_2^* и индекс пересечения $S_3^* \cdot F_2^* = 1$ и две общие точки с компонентой F_1^* с суммарным индексом пересечения $S_3^* \cdot F_1^* = -2$. (Ориентации сфер задаются ориентациями дисков.)*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если рассмотреть процесс приклеивании дисков D_i по шагам, то легко заметить, что диски подклеиваются друг к другу каждый раз по связному множеству. Поэтому на S_1^* не мог образоваться нетривиальный цикл, и, следовательно, S_1^* – это сфера. Далее, из четырех дисков лишь диск D_4 имеет общую точку с особой кривой. Ее ориентация поднята с плоскости X , а ориентация диска D_4 совпадает с ориентацией плоскости Y . Следовательно, $S_1^* \cdot F_1^* = 1$.

Для проверки отсутствия самопересечений заметим, что таковые могут возникать лишь над плоскостью Y (другие точки сферы принадлежат лишь одному диску) и, более того, лишь в точках, лежащих над точкой $(0, y_0)$ (остальные точки лежат на границах двух дисков и, следовательно, тоже не вызывают подозрений). Таких точек пять – по одной на каждом из листов (на самом деле, точка на листе 1 не принадлежит сфере S_1^* вообще). Теперь, выписав для каждой точки те дуги и те диски, которым она принадлежит, нетрудно видеть, что никаких самопересечений не возникает.

Доказательство в части S_3^* совершенно аналогично. То, что диск E_5 пересекается с F_2^* , а не с F_1^* , очевидно. Единственное, что надо проверить, – это то, что диски E_6 и E_7 пересекаются именно с F_1^* , а не с F_2^* . Для E_6 это очевидно, а для E_7 нужно рассмотреть трансформацию диска D_4 вдоль пути $-L_3 + L_1$.

Малой деформацией сдвинем внутренность диска D_4 и интервал α_2 (имеется в виду дуга α_2 без начальной и конечной точек) так, чтобы их проекция на плоскость X сдвинулась с точки $x = 0$ и стала малым интервалом кривой L_1 , примыкающим к конечной точке кривой (т.е. сдвинулась на конец кривой L_1). Разумеется, вместе с интервалом α_2 мы деформируем и часть диска D_1 , примыкающую к этому интервалу. Этот сдвиг мы можем считать гомеоморфным, требуя также, чтобы продеформированный диск пересекал особую кривую лишь в одной точке и при том трансверсально. Полученную после деформации сферу мы и обозначим через S_1 . Деформация проделана, в частности, для того, чтобы часть сферы S_1 , лежащая над плоскостью Y , не содержала внутренних точек.

Сфера S_3 получается из S_3^* аналогичными построениями. А именно, интервал α_4 и внутренность диска E_5 сдвигаются на конец кривой L_2 , интервал α_2 и внутренность диска E_6 – также на конец кривой L_2 , равно как и интервалы β_3 и β_4 с внутренностью диска E_7 . Диски E_j , $j = 1, 2, 3, 4$, также претерпевают соответствующие изменения.

6. Вычисление индексов самопересечения. Для подсчета индексов самопересечения надо продеформировать сферы S_1 и S_3 в некоторые сферы S'_1 и S'_3 , также лежащие в P . Искомые преобразования мы получим с помощью преобразования Φ пространства $\mathbb{C}^2$ в себя. Преобразование Φ ставит в соответствие точке (x, y) точку $(\phi(x), y + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ – малое число, а $\phi(x)$ – гомеоморфизм плоскости X на себя такой, что $|x - \phi(x)| < \varepsilon$ и $\phi(0) = 0$. Кроме того, требуется, чтобы это преобразование растягивало каждую кривую L_j так, чтобы кривая L_j оказалась внутри кривой $L'_j = \phi(L_j)$ и всякая пара из шести кривых L_j и L'_j , $j = 1, 2, 3$, имела лишь одну общую точку $x = 0$.

ЛЕММА 5. *Сферы S_1 и S_3 можно продеформировать внутри поверхности P в сферы S'_1 и S'_3 соответственно причем так, чтобы полученные при этом отображения были композициями $\psi^{-1} \circ \Phi \circ \psi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомые отображения, а вслед за ними и нужные деформации, получаются так. Для определенности проведем рассуждения для S_1 ; аналогичные рассуждения подходят и для S_3 . Фиксируем на S_1 небольшой диск, содержащий точку пере-

сечения сферы с особой кривой F_1^* . Спроектируем этот диск в $\mathbb{C}^2$, сдвинем полученный образ преобразованием Φ , поднимем полученное на P и выделим компоненту, близкую к исходному диску. Так как сфера S_1 пересекает поверхность F_1^* трансверсально, а ε мало, то полученная поверхность – это тоже диск, близкий к исходному и пересекающий F^* лишь в одной точке. Продолжим эту процедуру проектирования, сдвига и поднятия по всевозможным путям на S_1 , выходящим из точки пересечения S_1 и F_1^* . При достаточно малых ε продолжение по путям возможно, и оно не будет зависеть от пути в силу ацикличности сферы.

Теперь легко видеть, что часть сферы S_1 , лежащая над координатной плоскостью Y , состоит из пяти дуг $\alpha_3, \alpha_5, \beta_4, \gamma_5$ и δ_5 . Аналогично, часть сферы S_3 , лежащая над координатной плоскостью Y , состоит из шести дуг $\alpha_3, \alpha_5, \beta_2, \gamma_3, \delta_1$ и δ_3 . Части же сфер S'_1 и S'_3 , лежащие над координатной плоскостью Y , состоят из образов дуг, получаемых при указанных деформациях сфер S_1 и S_3 (для обозначения образов этих дуг будем использовать штрихи).

ЛЕММА 6. Пусть S – одна из сфер S_1 и S_3 , S' – одна из сфер S'_1 и S'_3 . Тогда всякая точка пересечения сфер S и S' является точкой пересечения какой-нибудь пары петель $\Omega \in S$ и $\Omega' \in S'$ из вышеупомянутого набора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если общая точка сфер S и S' не лежит над плоскостью Y , то поскольку она не может принадлежать каким-то кривым из наборов $\{L_j\}$ и $\{L'_j\}$ одновременно, то она лежит над частью плоскости X , ограниченной какой-то из кривых $\{L_j\}$. Но тогда ее проекция на плоскость Y должна иметь координату y_0 (так как эта точка принадлежит S) и координату $y_0 + \varepsilon$ (так как она принадлежит S'). Но эти условия несовместны, следовательно, общая точка лежит над плоскостью Y . Значит, она является точкой пересечения дуг из упомянутого набора.

На нетривиальных дугах $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j, j = 1, \dots, 5$, зададим ориентацию, объявив все эти дуги положительно ориентированными, а на штрихованных дугах ориентация индуцируется нештрихованными.

Приведем удобную для нас формулу вычисления индекса пересечения. Пусть A – общая точка пары дуг $\Omega \in S$ и $\Omega' \in S'$. Фиксируем на S и S' малые окрестности этой точки и обозначим через Δ и Δ' проекции этих окрестностей на плоскость X . Фиксируем далее малые окрестности этой точки и обозначим через Γ и Γ' их проекции на плоскость Y . Зададим ориентацию на полученных дугах. На Γ и Γ' ориентация переносится с Ω и Ω' . С Δ и Δ' поступим следующим образом. Малая окрестность A на S состоит из частей двух дисков, в (ориентированные) границы которых Ω входит с противоположными знаками, причем пересечение этих дисков лежит над плоскостью Y (так как это просто часть дуги Ω). Поэтому Δ также состоит из двух связных частей, имеющих одну общую точку $x = 0$ и являющихся проекциями этих двух дисков. Значит, корректно определить ориентацию на Δ можно так, чтобы ее начало соответствовало диску, в (ориентированную) границу которого Ω входит с положительным знаком, а конец – диску, в границу которого Ω входит с отрицательным знаком. Аналогично определим ориентацию на дуге Δ' .

ЛЕММА 7. Индекс пересечения сфер S и S' в точке A , принадлежащей дугам Ω и Ω' , вычисляется по формуле

$$\text{ind}(\Omega, \Omega', A) = -(\Delta \cdot \Delta') \cdot (\Gamma \cdot \Gamma').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В правой части в каждой из скобок учитывается один касательный вектор к первой поверхности и один – ко второй. Нетрудно видеть, что при введенной выше ориентации на дугах пары векторов из первой и второй скобок в таком порядке определяют на каждой из поверхностей правильную ориентацию. При вычислении индекса пересечения составляется определитель четвертого порядка, первая пара столбцов которого – касательные векторы к первой поверхности, вторая пара столбцов – касательные векторы ко второй поверхности (естественно, порядок векторов должен соответствовать положительной ориентации на поверхностях). Чтобы получить нашу формулу, требуется перестановка двух средних столбцов (отсюда и берется знак минус).

Перейдем непосредственно к вычислению индексов (само)пересечения.

Для вычисления $S_1 \cdot S'_1 = -3$ воспользуемся таблицами 2 и 3.

ТАБЛИЦА 2

Δ	α'_3	α'_5	β'_4	γ'_5	δ'_5
α_3	+1	0	0	+1	0
α_5	+1	+1	+1	0	+1
β_4	+1	+1	+1	0	+1
γ_5	-1	0	0	-1	0
δ_5	0	-1	-1	+1	-1

ТАБЛИЦА 3

Γ	α'_3	α'_5	β'_4	γ'_5	δ'_5
α_3	+1	0	-1	+1	-1
α_5	0	+1	-1	+1	+1
β_4	0	0	+1	0	+1
γ_5	0	0	0	+1	+1
δ_5	0	0	0	0	+1

Эти таблицы получаются непосредственной проверкой (нужно нарисовать рисунок взаимного расположения петель, учитывая, на каких листах лежат петли). Далее, попарно перемножая, складывая и меняя знак, получим, что $S_1 \cdot S'_1 = -3$.

ТАБЛИЦА 4

Δ	α'_3	α'_5	β'_2	γ'_3	δ'_1	δ'_3
α_3	0	+1	0	+1	0	0
α_5	+1	0	+1	0	-1	+1
β_4	+1	0	+1	0	-1	+1
γ_5	0	-1	0	-1	0	0
δ_5	-1	+1	-1	+1	+1	-1

ТАБЛИЦА 5

Γ	α'_3	α'_5	β'_2	γ'_3	δ'_1	δ'_3
α_3	+1	0	-1	+1	0	+1
α_5	0	+1	0	0	+1	-1
β_4	0	0	0	-1	-1	-1
γ_5	0	0	0	0	0	-1
δ_5	0	0	0	0	0	-1

Аналогично, с помощью таблиц 4 и 5 находим, что $S_1 \cdot S'_3 = 0$, а с помощью таблиц 6 и 7 находим, что $S_3 \cdot S'_3 = -3$.

ТАБЛИЦА 6

Δ	α'_3	α'_5	β'_2	γ'_3	δ'_1	δ'_3
α_3	+1	0	+1	0	-1	+1
α_5	-1	+1	-1	+1	+1	-1
β_2	+1	0	+1	0	-1	+1
γ_3	0	-1	0	-1	0	0
δ_1	+1	-1	+1	-1	-1	+1
δ_3	-1	+1	-1	+1	+1	-1

ТАБЛИЦА 7

Γ	α'_3	α'_5	β'_2	γ'_3	δ'_1	δ'_3
α_3	+1	0	-1	+1	0	+1
α_5	0	+1	0	0	+1	-1
β_2	0	0	+1	+1	-1	0
γ_3	0	0	0	+1	-1	+1
δ_1	0	0	0	0	+1	0
δ_3	0	0	0	0	0	+1

Теперь ясно, что $S_1 \cdot S_1 = S_3 \cdot S_3 = -3$ и $S_1 \cdot S_3 = S_3 \cdot S_1 = 0$.

Для построения сферы S_2 мы подклеим к сфере S_3 две сферы, гомеоморфные сфере S_1 (разумеется, будем следить, чтобы полученная сфера S_2^* имела лишь трансверсальные самопересечения). Из леммы 4 следует, что $S_2^* \cdot F_1^* = 0$. Более того, существует сфера, гомологичная S_2^* и не имеющая общих точек с F_1^* , а также не имеющая самопересечений; для доказательства этого факта можно построить эту сферу явно, что, как уже сказано, мы здесь делать не будем. Эту сферу мы и обозначим через S_2 .

Проверим справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 8. *Имеет место равенство $S_2 \cdot S_2 = -15$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если мы рассмотрим наряду со сферой S_2 сферу S_2' , получаемую из S_2 малым сдвигом, и рассмотрим их индекс пересечения, то мы заметим, что он состоит из девяти слагаемых, отвечающих попарным пересечениям частей, составляющих каждую из сфер S_2 и S_2' . В этой сумме четыре слагаемых (те, которые соответствуют пересечению S_3 с каким-либо из экземпляров S_1) равны 0, а остальные равны -3 . Таким образом, $S_2 \cdot S_2' = -15$ и, значит, $S_2 \cdot S_2 = -15$.

Для завершения доказательства утверждения 1 нужно проверить, что группа двумерных целочисленных гомологий с компактным носителем накрывающей P действительно изоморфна $\mathbb{Z}^2$. Очевидно, что сферы S_1 и S_2 являются ее образующими. Если некоторая их линейная комбинация гомологична нулю, то она имеет индекс пересечения 0 с каждой из компонент F_1^* и F_2^* . Отсюда следует, что эта линейная комбинация обязана быть тривиальной, что и означает изоморфность группе $\mathbb{Z}^2$.

Теперь утверждение 1 доказано полностью.

7. О других известных примерах накрывающих. Заметим, что в определениях накрывающих (и Витушкина, и этой) функция $f(x)$ и сама накрывающая определяются сначала над плоскостью Y , потом над множествами H_1 , H_2 и H_3 и лишь затем над всем пространством. Если поменять определения функции (и накрывающей) над парой множеств (скажем, H_2 и H_3 ; в действительности это неважно, так как накрывающие будут гомеоморфны), то согласованность накрывающих над различными множествами в точке $x = 0$ сохранится. Это позволит продолжить накрывающую до накрывающей над всем $\mathbb{C}^2$, и при этом доказательства гомеоморфности особых кривых пространству $\mathbb{R}^2$, а регулярной части – пространству $\mathbb{R}^4$ останутся верными (их можно будет повторить дословно). Полученные накрывающие могут оказаться, вообще говоря, негомеоморфными исходным.

В действительности дело обстоит так. Нетрудно видеть, что определения сфер S_1 , S_2 , S_3 можно оставить без изменений (с учетом, разумеется, перемены множеств H_2 и H_3 местами). При этом в таблицах для подсчета индексов (само)пересечений части, соответствующие проекциям на плоскость Y , можно оставить без изменений. Сделав необходимые изменения в оставшейся части, получим, что в случае Витушкина $S \cdot S = -3$, как и было до модификации. В описываемом же примере $S_1 \cdot S_1 = -3$, $S_1 \cdot S_3 = +2$, а $S_3 \cdot S_3 = -5$. Следовательно, $S_2 \cdot S_2 = -9$. Таким образом, получена новая накрывающая, негомеоморфная исходной.

Значения канонических классов при этих модификациях, очевидно, не меняются.

В заключение отметим, что примером Витушкина трехлистной накрывающей, вышеописанным примером пятилистной накрывающей и их модификациями известные ныне примеры накрывающих не ограничиваются.

Помимо различных модификаций всех этих примеров (в которых, скажем, проекция кривой ветвления может быть графиком не четырехзначной функции, а k -значной, где $k > 4$) существуют примеры семилистных и девятилистных накрывающих. По всей вероятности, аналогичные примеры можно построить и для произвольного нечетного числа листов. Исследование топологических свойств и характеристик этих накрывающих, возможно, даст новую информацию о возможном контрпримере к гипотезе о якобиане.

8. Приложение. Алгебраическое доказательство стягиваемости. Для построения невырожденной диаграммы Рудольфа (о диаграммах Рудольфа см., например, [2]) нам потребуется малое изменение функции $f(x)$, влекущее за собой, разумеется, малую деформацию ее графика. Изменив необходимым образом определение накрывающей, мы можем дословно провести изложенное выше доказательство теоремы 1 для модифицированной накрывающей.

Прежде всего стянем F на $F|_{K_0}$, где K_0 — ε_1 -раздутие множества K . Модифицируем функцию так, чтобы при обходе вдоль границы круга K_2 значения $\{f_1, f_4\}$ переставлялись, двигаясь по окружности с центром не в $-5/2$, а в $-5/2 - \varepsilon_3$. После этого умножим модифицированную функцию на $e^{-i\varepsilon_2}$. Пусть теперь $f(x)$ обозначает полученную функцию. Если взять $0 < \varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \ll \varepsilon_3 \ll 1$, то диаграмма Рудольфа будет иметь вид, как на рис. 1 (в чем нетрудно убедиться прямыми вычислениями, следя за движением точек). Обозначим диаграмму через B_+ .

Рис. 1

График $f(x)$ гомеоморфен кругу; для проверки этого достаточно пройти по границе K_0 и убедиться, что значения функции переставляются циклически, после чего воспользоваться формулой Римана–Гурвица. (Заметим, что отсюда же следует тот факт, что исходная функция имела на бесконечности точку ветвления четвертого порядка.)

Следуя [2, § 3], явно напишем копредставление группы $\pi_1(K_0 \times \mathbb{C} \setminus F)$ (здесь F — график модифицированной функции $w = f(z)$) с положительной бесконечно удаленной точкой оси $\text{Im } w$ в качестве базисной точки. Возьмем центральную компоненту связности множества $K_0 \setminus B_+$. Пусть z_0 — произвольная точка на этой компоненте, $f(z_0) = \{w_j\}$, $j = 1, 2, 3, 4$, причем $\text{Re } w_j < \text{Re } w_k$ при $j < k$ (на компоненте связности $K_0 \setminus B_+$ действительные части всех значений $f(z)$ различны). Обозначим через a, b, c, d пути в слое $z = z_0$, которые приходят из бесконечности вдоль вещественного луча $\text{Re } w = \text{Re } w_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, соответственно, обходят точку w_j в положительном направлении, после

чего уходит обратно по тому же лучу. Тогда с помощью стандартной процедуры мы находим, что $\pi_1(K_0 \times (\mathbb{C} \setminus F)) = \langle a, b, c, d \mid ab = bd, acd = bab, bcd = cdc \rangle$.

Накрывающую, построенную в п. 3, стянем на накрывающую над множеством $K_0 \times \mathbb{C}$, а потом продеформируем вместе с графиком функции $f(z)$ и множеством K_0 на накрывающую над множеством $K_0 \times \mathbb{C}$.

Как известно, классы эквивалентности m -листных неразветвленных накрытий данного пространства Y задаются гомоморфизмами группы $\pi_1(Y, y_0)$ в симметрическую группу S_m . Нетрудно проверить (используя перестановки листов в определении P_0), что нашу накрывающую P (кроме той ее части, которая проектируется на проекцию особой кривой, а это не только точки ветвления накрывающей!) можно задать следующим гомоморфизмом φ (мы считаем, что S_m действует на $\{1, \dots, m\}$ справа):

$$\varphi(a) = (14)(35), \quad \varphi(b) = (23)(45), \quad \varphi(c) = (14)(35), \quad \varphi(d) = (15)(24).$$

Это неразветвленное накрытие над $K_0 \times \mathbb{C} \setminus D$ единственным образом продолжается до разветвленного накрытия над всем $K_0 \times \mathbb{C}$, которое, как следует из единственности, гомеоморфно $P|_{K_0 \times \mathbb{C}}$.

Поскольку перестановка, соответствующая малой петле вокруг F , состоит из двух циклов длины 2 и одного цикла длины 1, то поднятие F на накрывающую состоит из трех связанных компонент, вдоль двух из которых накрывающая имеет двулистное ветвление, а в окрестности третьей проектируется в $\mathbb{C}^2$ локально гомеоморфно.

Действуя по аналогии с [2, § 4], выберем в качестве шрейеровской системы представителей правых смежных классов группы $\pi_1(K_0 \times \mathbb{C} \setminus F)$ по подгруппе, состоящих из всех классов путей h таких, что $\varphi(h)$ оставляет на месте 1, множество $\{1, dcb, dc, c, d\}$. Тогда из теоремы Рейдемейстера–Шрейера следует, что фундаментальная группа нашего неразветвленного накрытия над $K_0 \times \mathbb{C} \setminus F$ изоморфна группе с образующими $\{a_j, b_j, c_j, d_j\}$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, и соотношениями

$$\begin{aligned} b_3 &= c_5 = c_1 = d_1 = 1, \\ a_1 c_4 d_1 b_4^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1} &= b_1 c_1 d_4 c_2^{-1} d_4^{-1} c_1^{-1} = a_1 b_4 d_1^{-1} b_1^{-1} = 1, \\ a_2 c_2 d_2 b_5^{-1} a_3^{-1} b_2^{-1} &= b_2 c_3 d_5 c_4^{-1} d_2^{-1} c_2^{-1} = a_2 b_2 d_3^{-1} b_2^{-1} = 1, \\ a_3 c_5 d_3 b_2^{-1} a_2^{-1} b_3^{-1} &= b_3 c_2 d_2 c_1^{-1} d_5^{-1} c_3^{-1} = a_3 b_5 d_2^{-1} b_3^{-1} = 1, \\ a_4 c_1 d_4 b_3^{-1} a_5^{-1} b_4^{-1} &= b_4 c_5 d_3 c_5^{-1} d_1^{-1} c_4^{-1} = a_4 b_1 d_5^{-1} b_4^{-1} = 1, \\ a_5 c_3 d_5 b_1^{-1} a_4^{-1} b_5^{-1} &= b_5 c_4 d_1 c_3^{-1} d_3^{-1} c_5^{-1} = a_5 b_3 d_4^{-1} b_5^{-1} = 1. \end{aligned}$$

Добавив соотношение $b_1 = 1$, отражающее стягиваемость в точку малой петли вокруг компоненты прообраза F , вдоль которой накрывающая не имеет ветвления, мы получим копредставление для регулярной части накрывающей. Теперь, используя равенство некоторых образующих единице и исключая последовательно образующие, можно убедиться, что группа тривиальна.

Поскольку регулярная часть P^* накрывающей P оказалась диффеоморфна многообразию, имеющему тривиальную фундаментальную группу, то P^* односвязна.

Для доказательства стягиваемости P^* достаточно проверить стягиваемость $P^*|_{K_0 \times \mathbb{C}}$, для чего мы поступим аналогично [2, § 5]. По лемме 5.1 из [2] нам достаточно доказать, что $\chi(P^*|_{K_0 \times \mathbb{C}}) = 1$, где χ – эйлерова характеристика.

Используя лемму 5.2 статьи [2] считаем

$$\chi(P|_{K_0 \times \mathbb{C}}) = \chi(K_0) \deg(\psi) - \chi(F^*) = 1 \cdot 5 - 2 = 3.$$

(Мы пользуемся тем, что F^* состоит из двух непересекающихся кругов, эйлерова характеристика каждого из которых равна, очевидно, 1.) Выбрав разбиение P так, чтобы F^* входило в него в качестве подразбиения, получим, что

$$\chi(P^*|_{K_0 \times \mathbb{C}}) = \chi(P|_{K_0 \times \mathbb{C}}) - \chi(F^*) = 3 - 2 = 1,$$

что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Витушкин А. Г. Некоторые примеры в связи с задачей полиномиальных преобразований $\mathbb{C}^n$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 269–279.
- [2] Оревков С. Ю. Диаграммы Рудольфа и аналитическая реализация накрытия Витушкина // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 2. С. 206–224.
- [3] Оревков С. Ю. О трехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1986. Т. 50. № 6. С. 1231–1240.
- [4] Домрина А. В., Оревков С. Ю. О четырехлистных полиномиальных отображениях $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 847–862.
- [5] Витушкин А. Г. Описание гомологий разветвленной покрывающей над $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 839–846.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: egorov@mail.ru

Поступило
23.03.2001