Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, О матричном уравнении $X^{-1}X^* = A$, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 548–553

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 12:55:11

УДК 519.6

О МАТРИЧНОМ УРАВНЕНИИ $X^{-1}X^* = A$

Х. Д. Икрамов

Проводится исследование условий разрешимости матричного уравнения

$$X^{-1}X^* = A,$$

отсутствующего в известных матричных руководствах. Указаны методы конструирования его решений.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Если невырожденные комплексные $(n \times n)$ -матрицы A и B (эрмитово) конгруэнтны, т.е.

$$B = P^*AP$$

для некоторой невырожденной матрицы P , то

$$B^{-1}B^* = P^{-1}(A^{-1}A^*)P.$$

Таким образом, соответствующие матрицы $A^{-1}A^*$ и $B^{-1}B^*$ подобны. Обратное, вообще говоря, неверно: из подобия матриц $A^{-1}A^*$ и $B^{-1}B^*$ не следует, что A и B конгруэнтны. Что же в таком случае можно сказать об A и B , зная, что $A^{-1}A^*$ и $B^{-1}B^*$ подобны?

Ответ на этот вопрос приводит к необходимости анализа матричных уравнений типа

$$X^{-1}X^* = A. \quad (1)$$

Известные матричные руководства, содержащие разделы о матричных уравнениях (см., например, [1]–[3]), не рассматривают уравнений этого типа. В данной статье предлагается исследование условий разрешимости уравнения (1), а также методы конструирования его решений.

Заметим, что при $n = 1$, т.е. если $X = z$ и $A = a$ суть комплексные числа, уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\bar{z}}{z} = a. \quad (2)$$

Ясно, что a должно быть числом с модулем 1: $a = e^{i\varphi}$, а решения z уравнения (2) суть все числа вида

$$z = \rho e^{-i\varphi/2}, \quad \rho \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Это простое замечание позволяет до некоторой степени предвидеть результаты для произвольного значения n .

2. Связь с матричными уравнениями Ляпунова и Сильвестра. Следствиями уравнения (1) являются соотношения

$$X^* = XA \quad (3)$$

и

$$X = A^* X^*. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3) и применяя к обеим частям полученного равенства матричную операцию сопряжения, находим

$$A^* X A = X. \quad (5)$$

Это *однородное дискретное уравнение Ляпунова* относительно матрицы X .

Из исходного уравнения (1) очевидно, что A – невырожденная матрица. Поэтому (5) можно еще переписать в виде

$$X A - A^{-*} X = 0, \quad (6)$$

что является частным случаем *однородного (непрерывного) уравнения Сильвестра*

$$X A - B X = 0.$$

Переход от (1) к (3) позволяет рассматривать и вырожденные решения X (в то же время, A остается невырожденной матрицей). Если множество решений уравнения (3) нетривиально, то оно, очевидно, является линейным пространством над $\mathbb{R}$ и составляет собственное подмножество комплексного линейного пространства решений уравнения (6).

Пусть, наоборот, Z – произвольное решение уравнения (6), т.е.

$$Z A = A^{-*} Z.$$

Прямая подстановка в (3) показывает, что матрица

$$X = Z + A^* Z^* \quad (7)$$

есть решение уравнения (3).

Предположим, что X – решение исходного уравнения (1). Тогда X удовлетворяет и (6). Учитывая невырожденность матрицы X , перепишем последнее соотношение в виде

$$A^{-*} = X A X^{-1}.$$

Таким образом, матрицы A и A^{-*} должны быть подобны. Отсюда стандартными рассуждениями (см., например, [4, задача 6.4.95]) выводится следующее заключение.

ТЕОРЕМА 1. *Если уравнение (1) совместно, то матрица A имеет следующее спектральное свойство: если λ – собственное значение этой матрицы, причем $|\lambda| \neq 1$, то $1/\bar{\lambda}$ тоже является собственным значением. При этом кратности обоих собственных значений одинаковы; одинаковы также число и размеры жордановых клеток, относящихся к λ и $1/\bar{\lambda}$.*

Мы хотим прокомментировать этот результат. Спектральное свойство, описываемое теоремой 1, хорошо известно в одном специальном контексте. Именно, им обладают изометрические операторы псевдоунитарного пространства (в терминологии книги [5]) или унитарные операторы пространства с незнакоопределенным скалярным произведением (терминология книги [6]). Такие операторы описываются соотношением (5), где X – (фиксированная) невырожденная эрмитова матрица, задающая метрику пространства. Теорема 1 подчеркивает, что эрмитовость матрицы X вовсе не обязательна для того, чтобы A обладала рассматриваемым свойством.

Укажем на еще одну возможную интерпретацию равенства (5): конгруэнтное преобразование с трансформирующей матрицей A не изменяет матрицы X .

3. Решения уравнения (1). Покажем, что необходимое условие совместности уравнения (1), формулируемое теоремой 1, является в то же время достаточным. Проведем наш анализ применительно к уравнению (3), невырожденные решения которого совпадают с решениями (1).

Пусть Q – матрица, трансформирующая A к жордановой форме J :

$$A = QJQ^{-1}. \quad (8)$$

Полагая в (3)

$$X = Q^{-*}YQ^{-1}, \quad (9)$$

видим, что Y есть решение уравнения того же типа

$$Y^* = YJ. \quad (10)$$

Будем пока рассматривать J как блочно диагональную матрицу

$$J = K_1 \oplus \dots \oplus K_m, \quad (11)$$

где каждый из диагональных блоков K_i имеет единственное собственное значение с модулем 1 либо пару собственных значений вида $(\lambda, 1/\bar{\lambda})$, где $|\lambda| \neq 1$. Разбивая Y на блоки Y_{ij} в соответствии с (11), находим

$$Y_{ji}^* = Y_{ij}K_j, \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (12)$$

Комбинируя (12) при $i \neq j$ с симметричным соотношением

$$Y_{ij}^* = Y_{ji}K_i,$$

приходим к равенству

$$Y_{ij} = K_i^*Y_{ij}K_j,$$

означающему, что Y_{ij} удовлетворяет дискретному уравнению Сильвестра

$$Z = K_i^* Z K_j,$$

которое в силу условий, наложенных на K_i и K_j , имеет лишь тривиальное решение (см. по этому поводу [7, § 12]). Итак,

$$Y_{ij} = 0, \quad \text{если } i \neq j,$$

и матрица Y , подобно J , является блочно диагональной:

$$Y = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_m. \quad (13)$$

Таким образом, при дальнейшем анализе уравнения (10) можно ограничиться рассмотрением двух случаев:

- 1) J имеет единственное собственное значение λ_0 , причем $|\lambda_0| = 1$;
- 2) J имеет пару собственных значений $(\lambda_0, 1/\bar{\lambda}_0)$, где $|\lambda_0| \neq 1$.

Случай 1. Начнем с простейшей ситуации, когда $J = \lambda_0 I_n$. Если $\lambda_0 = e^{i\varphi_0}$, то заменой $Z = e^{i\varphi_0/2} Y$ уравнение (10) сводится к виду

$$Z = Z^*,$$

т.е. Z должна быть эрмитовой матрицей. Выбор невырожденной матрицы Z определяет невырожденную матрицу Y и посредством формулы (9) решение X исходного уравнения.

Отметим, что рассмотренная ситуация является n -мерным аналогом одномерного случая, разобранного во введении.

Пусть теперь J есть клетка Жордана порядка n для собственного значения λ_0 . Будем искать невырожденные решения уравнения (10) в виде

$$Y = \begin{pmatrix} & & & y_{1n} \\ & & y_{2,n-1} & y_{2n} \\ & \dots & \dots & \dots \\ y_{n-1,2} & \dots & \dots & y_{n-1,n} \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Вводя матрицу-перестановку

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ \dots & & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

запишем Y как произведение

$$Y = \mathcal{P} R,$$

где R – верхнетреугольная матрица. Используя обозначение

$$R_c = \mathcal{P} R^* \mathcal{P}, \quad (15)$$

находим из (10)

$$R_c = RJ. \quad (16)$$

Все три матрицы в соотношении (16) верхнетреугольные. Приравнивая их диагональные элементы, имеем

$$r_{ii}\lambda_0 = \bar{r}_{n+1-i, n+1-i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Положив $m = [n/2]$, выбрав ненулевые значения для $r_{11}, \dots, r_{mm}$ и определив остальные r_{jj} из равенств (17), мы обеспечим невырожденность матриц R и Y . Внедиагональные элементы r_{ij} найдем, приравняв внедиагональные элементы в (16).

Проиллюстрируем сказанное, вычислив R для $n = 2$ и $n = 3$. В первом случае

$$r_{22} = \bar{r}_{11}\bar{\lambda}_0, \quad \bar{r}_{12} = r_{11} + \lambda_0 r_{12}.$$

Если $\lambda_0 = e^{i\varphi_0}$, то второе соотношение можно записать в виде

$$\overline{e^{i\varphi_0/2}r_{12}} - e^{i\varphi_0/2}r_{12} = e^{-i\varphi_0/2}r_{11}.$$

Оно показывает, между прочим, что число $e^{-i\varphi_0/2}r_{11}$ должно быть чисто мнимым. Им определяется мнимая часть числа $e^{i\varphi_0/2}r_{12}$; действительная же часть может быть выбрана произвольно.

При $n = 3$ имеем соотношения

$$\begin{aligned} r_{33} &= \bar{r}_{11}\bar{\lambda}_0, & \bar{r}_{22} &= r_{22}\lambda_0, \\ \bar{r}_{23} &= r_{11} + \lambda_0 r_{12}, & \bar{r}_{12} &= r_{22} + \lambda_0 r_{23}, & \bar{r}_{13} &= r_{12} + \lambda_0 r_{13}. \end{aligned} \quad (18)$$

Следствием третьего и четвертого из них является равенство

$$r_{11} = -r_{22}\lambda_0 = -\bar{r}_{22}. \quad (19)$$

Выбор ненулевого значения для r_{22} , согласованный со вторым соотношением (18), однозначно определяет r_{11} и r_{33} в силу (19) и (18). Равенство

$$\bar{r}_{13} = r_{12} + \lambda_0 r_{13}, \quad (20)$$

как и в случае $n = 2$, показывает, что число $e^{-i\varphi_0/2}r_{12}$ должно быть чисто мнимым. Взяв для r_{12} и r_{13} значения, удовлетворяющие (20), положим

$$r_{23} = \bar{r}_{11} + \bar{\lambda}_0 \bar{r}_{12},$$

что заканчивает построение матрицы R .

В самом общем случае J есть прямая сумма нескольких жордановых клеток для собственного значения λ_0 :

$$J = J_1 \oplus \dots \oplus J_k.$$

Тогда и невырожденное решение можно найти в виде аналогичной суммы

$$Y = Y_1 \oplus \dots \oplus Y_k,$$

где каждое из слагаемых Y_i строится по изложенному выше рецепту.

Случай 2. Представим J как прямую сумму

$$J = J_{11} \oplus J_{22},$$

где J_{11} имеет единственное собственное значение λ_0 , а J_{22} – единственное собственное значение $1/\bar{\lambda}_0$. Таким же образом разобьем на блоки искомое решение Y :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}.$$

Приравнивая в (10) блоки $(1, 1)$, получаем

$$Y_{11}^* = Y_{11} J_{11},$$

а затем

$$Y_{11} = J_{11}^* Y_{11} J_{11} \quad (21)$$

(см. аналогичные выкладки в начале п. 3). В силу предположений о спектре матрицы J_{11} уравнение (21) имеет лишь тривиальное решение.

Подобным же образом покажем, что $Y_{22} = 0$, т.е.

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & Y_{12} \\ Y_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для внедиагональных блоков уравнение (10) дает соотношения

$$Y_{21}^* = Y_{12} J_{22}, \quad Y_{12}^* = Y_{21} J_{11}. \quad (22)$$

Из них вытекает равенство

$$Y_{12} J_{22} = J_{11}^{-*} Y_{12}.$$

Рассматриваемое как однородное уравнение Сильвестра относительно Y_{12} , оно допускает невырожденные решения (см. анализ этого уравнения в [1, гл. VIII, § 1]). Полагая

$$Y_{21} = (Y_{12} J_{22})^* = Y_{12}^* J_{11}^{-1},$$

мы удовлетворим оба соотношения (22). Соответствующая матрица Y есть решение уравнения (10).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
- [2] Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
- [3] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1990.
- [4] Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.
- [5] Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
- [6] Gohberg I., Lancaster P., Rodman L. Matrices and Indefinite Scalar Products. Boston: Birkhäuser-Verlag, 1983.
- [7] Икрамов Х. Д. Численное решение матричных уравнений. М.: Наука, 1984.