Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Кармазин, Множество предконцов и идеальная граница многообразия без края, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 554–557

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:19:13

УДК 515.125+517.550.2

МНОЖЕСТВО ПРЕДКОНЦОВ И ИДЕАЛЬНАЯ ГРАНИЦА МНОГООБРАЗИЯ БЕЗ КРАЯ

А. П. Кармазин

В заметке изучаются взаимосвязи между простыми предконцами и элементами идеальной границы многообразия без края. Рассматриваются случаи многообразия с внутренней метрикой Мазуркевича или Римана и многообразия с квазигиперболической метрикой.

Библиография: 6 названий.

В заметке изучаются взаимосвязи между простыми предконцами и элементами идеальной границы по Громову многообразия без края. Рассматриваются два отдельных случая: случай многообразия с внутренними метриками Мазуркевича или Римана и случай многообразия с квазигиперболической метрикой.

1. Многообразия с метрикой Мазуркевича или Римана. Всюду далее N есть n -мерное ограниченное вложенное в евклидово пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ многообразие без края, атлас которого состоит из единственной карты. Точнее, $N \subset \mathbb{R}^{n+1}$ есть образ ограниченного гомеоморфизма g , заданного на ограниченной гомеоморфной шару области D из $\mathbb{R}^n$. Гомеоморфизм $g: D \rightarrow N$ будем называть *образующим* для N . Тогда на N определена внутренняя метрика Мазуркевича $\delta_N(x, y)$, равная $\inf$ евклидовых диаметров связных подмножеств из N , содержащих точки x, y из N . Если дополнительно отображение g диффеоморфно или локально липшицево, то оно индуцирует на N еще и метрику Римана $\rho_N(x, y)$. Оба метрические пространства (N, δ_N) , (N, ρ_N) являются неполными локально геодезическими пространствами.

Пусть $V_0^\delta[D]$, $V_0^\rho[D]$ суть множества простых δ - и соответственно ρ -предконцов области D (см. [1], [2]). Если $g: D \rightarrow N$ квазиизометричен относительно метрик δ_D, δ_N или ρ_D, ρ_N , то при отображении g элементы из $V_0^\delta[D]$, $V_0^\rho[D]$ перейдут в граничные элементы N , которые мы назовем простыми δ - и соответственно ρ -предконцами многообразия N . Если же g не является таковым, то предконцы на многообразии N определим непосредственно, исходя из его топологических и внутренних метрических свойств. Мы все понятия и утверждения дадим для δ -случая, считая его модельным; все схемы построений и результаты для случая ρ -теории аналогичны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность $\{V_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, связных открытых подмножеств N есть δ -предцепь, если для всех m

- 1) $V_{m+1} \subset V_m$;
- 2) $\delta_N(\partial_N V_m, \partial_N V_{m+1}) > 0$.

Здесь $\partial_N V_m = \partial V_m \cap N$. Две δ -предцепи *эквивалентны*, если они входят друг в друга. Класс эквивалентных δ -предцепей из N назовем δ -предконцом N , $V^\delta[N]$ – множество δ -предконцов N . На $V^\delta[N]$ введем отношение частичного порядка: $U \leq V$, если U входит в V . Минимальные элементы $V^\delta[N]$ называются *простыми δ -предконцами* N , множество которых обозначим через $V_0^\delta[N]$.

Мы здесь использовали общую схему Каратеодори определения граничных элементов. Введем необходимое нам далее понятие образующей кривой предконца.

Пусть $\alpha: [0, 1) \rightarrow N$ есть непрерывная кривая на N . Тогда δ -предцепь $\{V_N(\alpha[t_m, 1), \varepsilon_m)\}$ (здесь $V_N(A, \varepsilon)$ есть ε -окрестность множества A из N в метрике δ_N) определяет δ -предконец $V(\alpha)$ на N ; при этом α сходится к $V(\alpha)$. Кривую α назовем *образующей кривой* δ -предконца V , если $V(\alpha) = V$. В силу 1.1.4 из [1] если $V \in V_0^\delta[N]$, то любая кривая из N , сходящаяся к V , является ее образующей. Вследствие 2.1.5 из [1] кривая α является образующей кривой простого δ -предконца N тогда и только тогда, когда α удовлетворяет следующему V_0^δ -условию на N : для всех $t_k, s_k \in [0, 1)$ таких, что $t_k, s_k \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$, и

$$\delta_N(\alpha(t_k), \alpha(s_k)) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

всегда либо $\delta_N(\alpha_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, либо в противном случае

$$\sup_{x \in \alpha_k} \delta_N \left(x, \bar{\alpha} \setminus \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \alpha_m \right) \right) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

где $\bar{\alpha} = \alpha[0, 1)$, $\alpha_k = ([t_k, s_k])$.

На множестве кривых из N введем следующую метрическую характеристику: для кривых $\alpha, \beta: [0, 1) \rightarrow N$ таких, что их предельные множества $C(\alpha, 1), C(\beta, 1)$ лежат на ∂N , полагаем

$$\mu^\delta(\alpha, \beta) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} r_H(\alpha[t_k, 1), \beta[s_k, 1)),$$

где $\inf$ берется по всевозможным $t_k, s_k \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$, а $r_H(A, B)$ есть отклонение по Хаусдорфу между относительно замкнутыми подмножествами A, B из N , определенное на основе метрики δ_N .

В силу результатов из [1] кривые α, β являются образующими кривыми одного и того же δ -предконца V тогда и только тогда, когда $\mu^\delta(\alpha, \beta) = 0$. В частности, если $U, V \in V_0^\delta[N]$, α, β суть образующие кривые U и V соответственно, то по определению полагаем $\mu^\delta(U, V) \equiv \mu^\delta(\alpha, \beta)$.

Основываясь на идеях Громова, на пространствах $(N, \delta_N), (N, \rho_N)$ можно следующим естественным образом ввести понятие асимптотического предела, элемента идеальной границы N .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\alpha, \beta: [0, 1) \rightarrow N$ суть δ -геодезические лучи на N , уходящие на ∂N . Скажем, что они *асимптотически δ -эквивалентны*, если $\mu^\delta(\alpha, \beta) = 0$. Класс асимптотически δ -эквивалентных δ -геодезических лучей из N назовем *асимптотическим δ -пределом* на N . Соответствующее фактормножество обозначим через $\partial_\infty^\delta N$. Элементы $\partial_\infty^\delta N$ образуют *идеальную δ -границу* N .

Рассмотрим взаимосвязи между простыми предконцами и асимптотическими пределами N .

Пусть $\alpha: [0, 1) \rightarrow N$ есть δ -геодезический луч на N , уходящий на ∂N , $b(\alpha)$ – элемент $\partial_\infty^\delta N$, представителем которого является α . Очевидно, α удовлетворяет V_0^δ -условию на N и поэтому является образующей кривой некоторого простого δ -предконца $V(\alpha)$ многообразия N . При этом в силу условия $\mu^\delta(\alpha, \beta) = 0$ любой представитель $\beta: [0, 1) \rightarrow N$ элемента $b(\alpha)$ является образующей кривой $V(\alpha)$ и сходится к этому элементу. Таким образом, любой представитель $b(\alpha)$ сходится к $V(\alpha)$.

С другой стороны, для любого элемента $V \in V_0^\delta[N]$ всегда найдется δ -геодезический луч $\alpha: [0, 1) \rightarrow N$, сходящийся к V . Следовательно, $V = V(\alpha)$ и V содержит элемент $b(\alpha)$. Тем самым, получено следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Любой элемент $\partial_\infty^\delta N$ лежит в некотором элементе $V_0^\delta[N]$. Обратно, любой элемент $V_0^\delta[N]$ содержит в точности один элемент $\partial_\infty^\delta N$, и между множествами $\partial_\infty^\delta N$ и $V_0^\delta[N]$ существует естественное взаимно однозначное соответствие.*

По построению свойство кривой удовлетворять V_0^δ -условию инвариантно при δ -квазиизометриях многообразий. (Гомеоморфизм $h: N \rightarrow N'$ называется δ -квазиизометрией, если метрики $\delta_N, \delta_{N'}$ квазиинвариантны при этом отображении.) Отсюда и из теоремы 1 получаем следующий аналог теоремы Линделёфа для δ -квазиизометрий многообразий.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $h: N \rightarrow N'$ есть δ -квазиизометрия многообразий N, N' . Тогда образ $h \circ \alpha: [0, 1) \rightarrow N'$ любого δ -геодезического луча α из N , уходящего на ∂N , удовлетворяет V_0^δ -условию на N' . Кроме того, если $\mu^\delta(\alpha, \beta) = 0$ для δ -геодезических лучей $\alpha, \beta: [0, 1) \rightarrow N$, то предельные множества $C(h \circ \alpha, 1)$, $C(h \circ \beta, 1)$ лучей α, β при отображении h совпадают.*

Заменяя всюду δ_N на ρ_N , мы получим все перечисленные выше понятия и утверждения для случая ρ -теории многообразий.

ЗАМЕЧАНИЕ. В общем случае элементы идеальной границы не инвариантны при квазиизометриях. Кроме того, вообще говоря, многообразие N не секвенциально предкомпактно в пространствах $N \cup \partial_\infty^\delta N$, $N \cup \partial_\infty^\rho N$. В то же время, с помощью конструкции из [3], основанной на факторизации элементов из $V^\delta[N]$ или $V^\rho[N]$, любое многообразие N всегда можно компактифицировать.

2. Случай многообразия с квазигиперболической метрикой. Пусть образующий гомеоморфизм g многообразия N диффеоморфен или локально липшицев. Тогда на N одновременно определены метрики δ_N и ρ_N , последняя, в свою очередь, индуцирована некоторым линейным элементом ds_N . Тогда величина

$$k_N(x, y) = \inf_{\gamma} \int \frac{ds_N}{\delta_N(z, \partial N)},$$

где $\inf$ берется по всем кусочно-спрямляемым кривым из N , соединяющим точки $x, y \in N$, определяет метрику на N , называемую *квазигиперболической*. Пространство (N, k_N) является полным геодезическим пространством, каждый k -геодезический луч которого уходит на “бесконечность”, т.е. является неспрямляемым.

Пусть $V_0^k[N]$ есть множество простых k -предконцов N . Тогда N секвенциально предкомпактно в $N \cup V_0^k[N]$ (см. [2]). Однако элементы из $V_0^k[N]$ слишком “мелки”, их классификация тривиальна, и граничные вопросы k -квазиизометрий, решаемые с их помощью, малосодержательны. Мы укрупним граничные элементы из $V_0^k[N]$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скажем, что элементы U, V из $V_0^k[N]$ k -близки, если $\mu^k(U, V) < \infty$. Классы k -близких простых k -предконцов назовем k -конусами N , $K[N]$ – множество k -конусов N . Для элементов S, T из $K[N]$ введем отношение порядка: $S \leq T$, если S входит в T ; $K_0[N]$ – множество минимальных элементов $K[N]$, которые мы назовем основными k -конусами N .

Определим идеальную k -границу в точности по схеме Громова (см. [4], [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Два k -геодезических луча $\alpha, \beta: [0, 1) \rightarrow N$ асимптотически k -эквивалентны, если $\mu^k(\alpha, \beta) < \infty$. Классы асимптотически k -эквивалентных k -геодезических лучей N назовем асимптотическими k -пределами N . Они образуют идеальную k -границу $\partial_\infty^k N$.

Используя в точности схему рассуждений δ -теории, мы получим аналоги теорем 1 и 2 для многообразия (N, k_N) и квазигиперболических гомеоморфизмов на нем. Ясно, что элементы из $K_0[N]$ инвариантны при k -квазиизометриях, чего нельзя сказать об элементах из $\partial_\infty^k N$.

В заключение отметим следующий факт. В [6] замечено, что свойство $\mu^k(\alpha, \beta) < \infty$ для кривых области $D \subset \mathbb{R}^2$, уходящих на ∂D , является инвариантным для отображений с ограниченным интегралом Дирихле и вблизи ∂D они и k -квазиизометрии ведут себя одинаково. При этом внутри D k -квазиизометрии локально липшицевы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кармазин А. П. Простые предконцы пространственных областей. Томский ун-т. Деп. ВИНТИ № 2220-В92. М.: ВИНТИ, 1992.
- [2] Кармазин А. П. Метрические структуры пространственных областей и граничное поведение квазиизометрий. Ред. Сиб. матем. ж. Деп. ВИНТИ № 3244-В99. М.: ВИНТИ, 1999.
- [3] Кармазин А. П. // Матем. труды. Т. 1. № 2. Новосибирск: Изд-во ИМ РАН, 1998. С. 79–110.
- [4] Gromov M. Asymptotic Invariants of Infinite Groups, Geometric Group Theory. V. 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
- [5] Буяло С. В. Геодезические в пространствах Адамара // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 2. С. 93–123.
- [6] Суворов Г. Д. Метрическая теория простых концов и граничные свойства плоских отображений с ограниченными интегралами Дирихле. Киев: Наукова думка, 1981.