Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Акишев, Сходимость двойных рядов Фурье функций из симметричных пространств, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 323–327

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:04:28

Сходимость двойных рядов Фурье функций из симметричных пространств

Г. А. Акишев

В настоящей заметке установлены условия сходимости двойных рядов Фурье по тригонометрической системе функций, принадлежащих симметричному пространству.

Библиография: 9 названий.

В настоящей заметке доказаны утверждения о сходимости двойных рядов Фурье по тригонометрической системе функций, принадлежащих симметричному пространству.

Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, $I^s = [0, 2\pi)^s$ и $X(\psi)$ – симметричное пространство функций, 2π -периодических по каждой переменной x_j , $j = 1, \dots, s$, с фундаментальной функцией ψ (см. [1; с. 123]). Фундаментальную функцию $\varphi(t)$ симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0, 1]$ функцией, причем $\varphi(0) = 0$ (см. [1; с. 137]). Такие функции называются *Ф-функциями*.

Для функции $\psi(t)$ положим

$$\alpha_\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)}, \quad \beta_\psi = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)}.$$

Известно, что если $X(\psi)$ – симметричное пространство, то $1 \leq \alpha_\psi \leq \beta_\psi \leq 2$.

Примерами симметричных пространств являются:

- $L_q(I^s)$ – пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_q = \left(\int_{I^s} |f(\bar{x})|^q d\bar{x} \right)^{1/q}, \quad 1 \leq q < \infty;$$

- $L_{\psi, \infty}(I^s)$ – пространство Марцинкевича с нормой

$$\|f\|_{\psi, \infty} = \sup_{\tau > 0} \frac{\psi(\tau)}{\tau} \int_0^\tau f^*(t) dt,$$

где $f^*(t)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(\bar{x})|$, $\bar{x} \in I^s$, $\psi(t)$ – некоторая Ф-функция (см. [1; с. 137]).

Через $a_{\bar{n}}(f) = a_{n_1, \dots, n_s}(f)$ обозначим коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$ по кратной системе $\{\prod_{j=1}^s e^{in_j x_j}\}$. Через $C(\alpha, q, \dots)$ обозначим положительные постоянные, зависящие от указанных параметров, вообще говоря, разные в различных формулах.

В доказательстве основных результатов неоднократно будем пользоваться следующими утверждениями.

ЛЕММА А [2; лемма 3]. Пусть даны Φ -функции $\varphi(x), \psi(x)$, $x \in [0, 1]$. Если $1 < \beta_\psi < \alpha_\varphi < 2$, то для функции

$$\theta(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

существует Φ -функция $\theta_1(x)$ такая, что $\theta(x) \asymp \theta_1(x)$, $x \in (0, 1]$, и $\alpha_{\theta_1} > 1$.

ЛЕММА Б [2; лемма 4]. Если $1 < \alpha_\psi \leq \beta_\psi < 2$ для Φ -функций $\psi(x)$, $x \in [0, 1]$, то при любом $q \in (0, +\infty)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\psi^q(t)}{t} dt &= O(\psi^q(x)), & x \rightarrow +0, \\ \int_x^1 [t\psi^q(t)]^{-1} dt &= O(\psi^{-q}(x)), & x \rightarrow +0. \end{aligned}$$

Приведем основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L_{\psi, \infty}(I^s)$, $\sqrt{2} < \alpha_\psi$, $\beta_\psi < 2$. Тогда имеет место неравенство

$$\psi\left(\frac{1}{|Q|}\right) \left| \sum_{\bar{k} \in Q} a_{\bar{k}}(f) \right| \leq C \cdot \|f\|_{\psi, \infty},$$

где Q – произвольное конечное подмножество из $\mathbb{Z}^s$, $|Q|$ – количество его элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_{\psi, \infty}(I^s)$. Положим

$$f_1(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \text{если } |f(\bar{x})| \leq f^*(\tau), \quad \tau > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad f_0(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in I^s.$$

Известно, что (см. [3])

$$f_1^*(t) \leq \begin{cases} f^*(\tau), & 0 \leq t < \tau, \\ f^*(t), & \tau \leq t, \end{cases} \quad f_0^*(t) \leq \begin{cases} f^*(t), & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t. \end{cases} \quad (1)$$

По свойству равноизмеримых функций в силу (1) и определения пространства Марцинкевича имеем

$$\|f_0\|_1 = \|f_0^*\|_1 \leq \frac{\tau}{\psi(\tau)} \cdot \|f\|_{\psi, \infty}. \quad (2)$$

Пользуясь определением функции f_1 , неравенством (1) и леммами А и Б и учитывая условие $\sqrt{2} < \alpha_\psi \leq \beta_\psi < 2$, получим

$$\|f_1\|_2 = \|f_1^*\|_2 \leq C \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\psi(\tau)} \|f\|_{\psi, \infty}. \quad (3)$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\left| \sum_{\bar{k} \in Q} a_{\bar{k}}(f_0) \right| \leq \sum_{\bar{k} \in Q} \|f_0\|_1 \leq c \cdot |Q| \cdot \frac{\tau}{\psi(\tau)} \|f\|_{\psi, \infty}. \quad (4)$$

Применяя неравенство Гёльдера для суммы, равенство Парсеваля и оценку (3), имеем

$$\left| \sum_{\bar{k} \in Q} a_{\bar{k}}(f_1) \right| \leq \sqrt{|Q|} \left(\sum_{\bar{k} \in Q} |a_{\bar{k}}(f_1)|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|Q|} \cdot \|f_1\|_2 \leq C \cdot \sqrt{|Q|} \cdot \frac{\sqrt{\tau}}{\psi(\tau)} \|f\|_{\psi, \infty}. \quad (5)$$

Из неравенств (4) и (5) имеем

$$\left| \sum_{\bar{k} \in Q} a_{\bar{k}}(f) \right| \leq c \frac{\sqrt{|Q|}}{\psi(\tau)} \{ \sqrt{|Q|} \cdot \tau + \sqrt{\tau} \} \cdot \|f\|_{\psi, \infty}.$$

В этом неравенстве полагая $\tau = |Q|^{-1}$, получим утверждение теоремы.

Теперь изучим вопросы сходимости ряда

$$\sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} a_{n_1 n_2} \cdot e^{i n_1 x} \cdot e^{i n_2 y}, \quad (6)$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$a_{m_1 m_2} \geq a_{n_1 n_2} \quad \text{при} \quad m_i \leq n_i, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

$$a_{n_1 n_2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n_1 + n_2 \rightarrow +\infty. \quad (8)$$

Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами исследовал М. И. Дьяченко [4] (см. также обзор [5]).

Для рядов Фурье функций из симметричных пространств справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X(\psi)$ – симметричное пространство и $\sqrt{2} < \alpha_\psi, \beta_\psi < 2^{3/4}$. Если коэффициенты Фурье функции $f \in X(\psi)$ удовлетворяют условию (7), то ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму почти всюду на $(0, 2\pi)^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 из [4] нам достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2} \Delta a_{k_1 k_2}(f) \cdot e^{i k_1 x_1} \cdot e^{i k_2 x_2}, \quad (9)$$

где $\Delta a_{nm}(f) = a_{nm}(f) - a_{n+1, m}(f) - a_{n, m+1}(f) + a_{n+1, m+1}(f)$.

В силу условия (7), теоремы 1 и $X(\psi) \subset L_{\psi, \infty}$ (см. [1; с. 162]) имеем

$$a_{n_1 n_2}(f) \leq C \cdot \|f\|_X \cdot [n_1 n_2 \cdot \psi(n_1^{-1} \cdot n_2^{-1})]^{-1}. \quad (10)$$

Так как по условию теоремы $\beta_\psi < 2^{3/4}$, то существует число p_0 такое, что $\beta_\psi < 2^{1/p_0} < 2^{3/4}$. Поэтому согласно лемме Б

$$\left(\frac{1}{n_1 n_2} \right)^{1/p_0} \cdot \left[\psi \left(\frac{1}{n_1 n_2} \right) \right]^{-1} \leq C \quad (11)$$

для любого $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$.

Теперь выберем число δ так, чтобы $2(1 - 1/p_0)(2 - \delta) > 1$. Такое число δ существует, так как $4/3 < p_0 < 2$.

Далее, пользуясь неравенствами (10), (11) и леммой 5 из [4], будем иметь

$$\sum_{n_1=2}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} |\Delta a_{n_1 n_2}(f)|^2 \ln n_1 \cdot \ln n_2 \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n}^{2-\delta}(f) \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^{2(1-1/p_0)}} \right]^{2-\delta} < +\infty.$$

Следовательно, по теореме Качмажа (см. [5; с. 105]) ряд (9) сходится по Прингсхейму п.в. на $(0, 2\pi)^2$. Поэтому в силу леммы 3 из [4] получим утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\sqrt{2} < \alpha_\psi$, $\beta_\psi < 2$, то существует ряд (6), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (7), (8), являющийся рядом Фурье некоторой функции $f \in X(\psi)$, расходящийся по квадратам на всюду плотном подмножестве квадрата $(0, 2\pi)^2$.

Для обоснования достаточно заметить, что существует число p_0 такое, что $\sqrt{2} < 2^{1/p_0} < \alpha_\psi < 2$, т.е. $L_{p_0} \subset X(\psi)$, и воспользоваться теоремой 7 из [4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $2^{3/4} < \alpha_\psi$, $\beta_\psi < 2$, то существует ряд вида (6), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (7), (8) и

$$\sup_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} \left[n_1 n_2 \psi \left(\frac{1}{n_1 n_2} \right) \right] a_{n_1 n_2} < +\infty,$$

такой, что каждая последовательность $\{S_{m_k, n_k}(x, y)\}$, где $m_k, n_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, расходится почти всюду на $(0, 2\pi)^2$.

ПОЯСНЕНИЕ. Так как $2^{3/4} < \alpha_\psi$, существует число p_0 такое, что $2^{3/4} < 2^{1/p_0} < \alpha_\psi < 2$, т.е. $L_{4/3} \subset L_{p_0} \subset X(\psi)$. Теперь рассматривая ряд, построенный при доказательстве теоремы 8 из [4], используя свойство его коэффициентов и лемму Б, нетрудно убедиться, что

$$\sup_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} \left[n_1 n_2 \psi \left(\frac{1}{n_1 n_2} \right) \right] a_{n_1 n_2} < C \cdot \sum_{k=4}^{\infty} 2^{-k(2/p_0 - 3/2)} < +\infty.$$

В [4] доказано, что любая последовательность $\{S_{m_k, n_k}(x, y)\}$ расходится почти всюду на $(0, 2\pi)^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае $\psi(t) = t^{1/q}$, $1 < q < 2$, теорема 1 доказана в [6; с. 117] для регулярных систем.

Из результатов, анонсированных в [7], следуют условия сходимости двойных рядов Фурье функций из пространства Орлича.

Условие сходимости двойных тригонометрических рядов Фурье из анизотропных пространств Лебега установлено в [8].

Теоремы 1 и 2 анонсированы в [9]. В теореме 1 из [9] допущена опечатка: вместо $1/|Q|$ должно быть $\psi(1/|Q|)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978.
- [2] С. В. Лапин, *Некоторые теоремы вложения для произведений функций*, деп. в ВИНИТИ 1036-80.
- [3] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.
- [4] М. И. Дьяченко, “О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **129**:1 (1986), 55–72.
- [5] М. И. Дьяченко, “Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов”, *УМН*, **47**:5 (1992), 97–162.
- [6] Е. Д. Нурсултанов, “О коэффициентах кратных рядов Фурье из L_p пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:1 (2000), 95–122.
- [7] Г. Акишев, М. Н. Беккер, “О сходимости двойных рядов Фурье функций из пространств Орлича”, *Тезисы конференции “Современное состояние и перспективы развития математики”*, Алматы, 2000, 60–61.
- [8] Ж. Г. Джумабаева, “О сходимости рядов Фурье функций из $L_{\overline{p}}$ ”, *Вестн. КазГУ*, 2000, № 2, 10–14.
- [9] Г. Акишев, “Об условиях сходимости двойных рядов Фурье функций из симметричных пространств”, *Материалы шестой Казанской международной летней школы-конференции* (27.06–4.07.2003 г.), Казань, 2003, 8–10.

Г. А. Акишев

Карагандинский государственный университет

им. Е. А. Букетова, Республика Казахстан

E-mail: akishev@kargu.krg.kz

Поступило

15.10.2003

Исправленный вариант

06.06.2006