Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Грушин, Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в бесконечных цилиндрах, возмущенных поперечными растяжениями, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 328–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3675>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 11:52:17

Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в бесконечных цилиндрах, возмущенных поперечными растяжениями

В. В. Грушин

В работе приведены достаточные условия существования собственного значения для оператора Лапласа с нулевыми условиями Дирихле в слабо возмущенном бесконечном цилиндре в случае локализованного возмущения, состоящего в растяжениях по поперечным координатам с коэффициентами, зависящими от продольной координаты. В случае, когда такое собственное значение существует, для него получена асимптотическая формула по малому параметру, характеризующему величину растяжений.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Пусть M – ограниченная связная область с бесконечно гладкой $(\nu - 1)$ -мерной границей в $\mathbb{R}^\nu$ с координатами $y = (y_1, \dots, y_\nu)$. Пусть заданы вещественнозначные функции $b_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, \nu$. В $\mathbb{R}^{\nu+1}$ с координатами (x, y) определим область

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, (y_1(1 + \varepsilon b_1(x))^{-1}, \dots, y_\nu(1 + \varepsilon b_\nu(x))^{-1}) \in M\}, \quad (1)$$

где ε – малый параметр. Соотношение (1) означает, что область Ω_ε получена из цилиндра $\Omega_0 = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, y \in M\}$ с помощью растяжений по координатам поперечных сечений y_i с коэффициентами $1 + \varepsilon b_i(x)$. Таким образом, Ω_ε можно рассматривать как локализованное возмущение бесконечного цилиндра Ω_0 .

В Ω_ε рассмотрим оператор $H_\varepsilon = -\Delta_D$ (Δ_D – оператор Лапласа с нулевыми условиями Дирихле на границе), что является математической моделью квантового волновода. В работе изучается возможность возникновения при малых ε собственного значения оператора H_ε , т.е. связанного состояния по терминологии квантовой механики, и асимптотика соответствующего собственного значения по малому параметру ε .

Изучению связанных состояний, возникающих в трубках, т.е. при различных возмущениях бесконечных цилиндров (и бесконечных полосок в двумерном случае), и приложениям этих вопросов к задачам квантовой механики посвящено большое количество работ (нужно отметить, что ранее подобные вопросы рассматривались в связи с теорией волноводов и резонаторов). В работах В.П. Маслова [1], [2], В.П. Маслова и Е.М. Воробьева [3] была построена асимптотика собственных функций и квазистационарных собственных значений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с краевыми

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00968.

условиями на эквидистантных кривых. Было показано, что, подбирая нужным образом искривленность полосы и длину участка, где происходит искривление, можно добиться, чтобы существовало лишь одно собственное значение, т.е. резонатор имел лишь одну поперечную моду. Аналогичные вопросы исследовались для областей, ограниченных эквидистантными поверхностями. В работах В.В. Белова, С.Ю. Доброхотова, С.О. Силицына [4], В.В. Белова, С.Ю. Доброхотова, С.О. Силицына, Т.Я. Тудоровского [5], В.В. Белова, С.Ю. Доброхотова, Т.Я. Тудоровского [6], [7], В.В. Белова, С.Ю. Доброхотова, В.П. Маслова, Т.Я. Тудоровского [8] с помощью канонического оператора Маслова построены быстроосциллирующие решения уравнения Шрёдингера и асимптотические собственные значения в тонких трубках. Изучению связанных состояний в трубках посвящены работы П. Дюклоа и П. Экснера [9], П. Экснера и П. Чеба [10], П. Экснера [11], [12], В. Булла, Ф. Гезтези, Б. Саймона [13], П. Экснера и С.А. Вугалтера [14], Д. Борисова, П. Экснера Р. Гадильшина и Д. Крейсирика [15], В.В. Грушина [16], [17], Р.Р. Гадильшина [18]. В работах [10], [11] было доказано существование собственного значения для слабо изогнутых волноводов, а в [9] была сосчитана его асимптотика по малому параметру. В [9] также рассматривалось возмущение волновода малым потенциалом. В [13] в двумерном случае рассматривались локальные деформации вида (1) бесконечной полосы (с одним коэффициентом $b(x)$) в некритической ситуации, т.е. когда интеграл от $b(x)$ не равен нулю. В двумерном случае в [14] было показано, что в критической ситуации собственное значение может как возникать, так и не возникать. В случае, когда собственное значение все же возникает, его асимптотика была построена в [15]. В [16] были исследованы вопросы возникновения собственного значения и его асимптотики при возмущении волновода малым локализованным дифференциальным оператором второго порядка. В качестве примера на применение полученных общих формул в [16] рассматривались и деформации вида (1) с одинаковыми $b_i(x)$ в некритическом случае, а в [17] рассматривались возмущения, связанные со слабым изгибанием и внутренним кручением волновода. В [18] рассматривались малые возмущения, которые представляют собой произвольный локализованный оператор второго порядка, рассмотрены некоторые примеры деформаций волноводов, которые сводятся к таким возмущениям. В частности, для трехмерного осесимметричного цилиндра (M – круг с центром в начале координат) рассматривалось возмущение вида (1) с одинаковыми $b_i(x)$ и показано, что в критическом случае собственное значение может как возникать, так и не возникать.

В данной статье рассматривается возмущение бесконечного цилиндра вида (1). В п. 2 с помощью специальной замены координат вопрос о возникновении собственного значения оператора H_ϵ сводится к такому же вопросу с возмущением в виде локализованного дифференциального оператора второго порядка. После этого приводится формулировка общей теоремы статьи [16], которая применяется к данной ситуации. Тем самым мы получаем результат, сформулированный в теореме 2, дающей ответ на данный вопрос в некритическом случае, т.е. в случае, когда $\mu_1 \neq 0$, где μ_1 определяется формулой (10). Хотя теорема 1 с учетом замечания к ней, приведенного в п. 2, в принципе дает ответ на поставленный вопрос и в критическом случае $\mu_1 = 0$ при условии, что $\mu_2 \neq 0$, где μ_2 определяется формулой (5), этот ответ зависит от знака μ_2 . Исследование знака μ_2 в критическом случае производится в п. 2. Здесь мы предполагаем, что все $b_i(x)$ одинаковы, так как общий случай приводит к громоздким формулам. Теорема 3 показывает, что для достаточно “тонких” трубок этот знак положителен, а для достаточно “широких” – отрицателен. Вместе с

теоремой 1 этот результат обобщает результаты исследования критического случая в [14], [15], [18].

2. Некритический случай. Пусть Ω_ε – возмущение бесконечного цилиндра, определенное в (1). С помощью замены координат

$$s = x, \quad \tau_i = y_i(1 + \varepsilon b_i(x))^{-1}, \quad i = 1, \dots, \nu,$$

переведем Ω_ε в цилиндр $\Omega = \{(s, \tau) : -\infty < s < +\infty, \tau \in M\}$, при этом H_ε переходит в оператор

$$\tilde{H}_\varepsilon = - \sum_{i=1}^{\nu} (1 + \varepsilon b_i(s))^{-2} \partial_{\tau_i}^2 - \left(\partial_s - \varepsilon \sum_{i=1}^{\nu} \dot{b}_i(s) (1 + \varepsilon b_i(s))^{-1} \tau_i \partial_{\tau_i} \right)^2, \quad (2)$$

где $\dot{b}_i$ обозначает производную от $b_i(s)$ по s . Таким образом, $\tilde{H}_\varepsilon$ есть возмущенный оператор $-\Delta_D$ в цилиндре Ω вида

$$\tilde{H}_\varepsilon = -\partial_s^2 - \partial_\tau^2 + \varepsilon A + \varepsilon^2 B, \quad (3)$$

где $A(s, \tau, \partial_s, \partial_\tau)$ и $B(s, \tau, \varepsilon, \partial_s, \partial_\tau)$ – линейные дифференциальные операторы второго порядка с бесконечно дифференцируемыми по совокупности переменных $(s, \tau) \in \bar{\Omega}$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, и аналитическими по ε коэффициентами. Будем предполагать, что коэффициенты A и B финитны, т.е. равны нулю вне некоторого ограниченного множества в $\bar{\Omega}$. В статье [16] рассматривались произвольные операторы вида (3) с указанными свойствами. Сформулируем основной результат из [16], который мы будем использовать в дальнейшем.

Пусть $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ – полная ортонормированная система собственных функций $-\Delta_D^M$ (т.е. оператора Лапласа со знаком “минус” в области M с условием Дирихле),

$$0 < k_0^2 < k_1^2 \leq \dots \leq k_n^2 \leq k_{n+1}^2 \leq \dots$$

– соответствующие собственные значения. Хорошо известно, что основное собственное значение k_0^2 невырождено и $\chi_0(\tau)$ можно выбрать положительной в M (см., например, [19]). Функции $\chi_n(\tau)$ можно выбрать вещественными. Мы будем использовать стандартное обозначение

$$A_{mn}(s) = \int_M \bar{\chi}_m(\tau) A \chi_n(\tau) d\tau;$$

аналогичным образом определяются $B_{mn}(s, \varepsilon)$. Зададим числа μ_1 и μ_2 формулами

$$\mu_1 = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} A_{00}(s) ds, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = & -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\chi}_0(\tau) \left(\mu_1 [A, s] + A \int_{-\infty}^s (s-s') A_{00}(s') ds' + B_{00}(s, 0) \right) \chi_0(\tau) ds d\tau \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \bar{\chi}_0(\tau) A(\mathcal{E}_{\rho_n} * A_{n0}) \chi_n(\tau) ds d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

где $[A, s]$ – коммутатор оператора A и оператора умножения на s , знак “звездочка” означает свертку функций,

$$\mathcal{E}_{\rho_n}(s) = -\frac{1}{2\rho_n} e^{-\rho_n|s|}, \quad \rho_n = \sqrt{k_n^2 - k_0^2}.$$

Как доказано в [16], для общих операторов вида (3) имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\operatorname{Re} \mu_1 > 0$ или $\operatorname{Re} \mu_1 = 0$ и $\operatorname{Re} \mu_2 > 0$, то при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение λ оператора $\tilde{H}_\varepsilon$, удовлетворяющее неравенству*

$$|\lambda - k_0^2| < \mu_0^2. \quad (6)$$

Это собственное значение простое и имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику

$$\lambda = k_0^2 - \mu^2, \quad \mu = \varepsilon \mu_1 + \varepsilon^2 \mu_2 + O(\varepsilon^3).$$

В случае вещественных коэффициентов операторов A и B такое собственное значение вещественно.

Если же $\operatorname{Re} \mu_1 < 0$ или $\operatorname{Re} \mu_1 = 0$ и $\operatorname{Re} \mu_2 < 0$, то при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ собственных значений, удовлетворяющих неравенству (6), для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ не существует.

Заметим, что, используя аргументы из статьи [17], можно показать, что при достаточно малых ε интервал $(-\infty, k_0^2 - \mu_0^2]$ не содержит точек спектра оператора H_ε ; следовательно, неравенство (6) в этой теореме для оператора H_ε можно заменить на неравенство

$$\lambda - k_0^2 < \mu_0^2. \quad (7)$$

Теперь мы применим эту теорему к оператору (2). Из (2) получаем

$$A = \sum_{i=1}^{\nu} 2b_i \partial_{\tau_i}^2 + \dot{b}_i \tau_i \partial_{\tau_i} \partial_s + \partial_s \dot{b}_i \tau_i \partial_{\tau_i}, \quad (8)$$

$$B|_{\varepsilon=0} = - \sum_{i=1}^{\nu} (3b_i^2 \partial_{\tau_i}^2 + \partial_s \dot{b}_i b_i \tau_i \partial_{\tau_i} + \dot{b}_i b_i \tau_i \partial_{\tau_i} \partial_s) - \left(\sum_{i=1}^{\nu} \dot{b}_i \tau_i \partial_{\tau_i} \right)^2. \quad (9)$$

Из (8) следует, что в нашем случае

$$\mu_1 = - \sum_{i=1}^{\nu} (\partial_{\tau_i}^2)_{00} \int_{\mathbb{R}} b_i(s) ds. \quad (10)$$

В случае, когда μ_1 , определенное этой формулой, отлично от нуля, из теоремы 1 и замечания к ней вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Если $\mu_1 > 0$, где μ_1 определяется формулой (10), то при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение оператора H_ε , удовлетворяющее неравенству (7). Это собственное значение невырожденно и имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику*

$$\lambda(\varepsilon) = k_0^2 - \varepsilon^2 \mu_1^2 + O(\varepsilon^3).$$

Если же $\mu_1 < 0$, то при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_0 > 0$ собственных значений, удовлетворяющих неравенству (7), для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ не существует.

3. Критический случай. Перейдем к рассмотрению критического случая, когда $\mu_1 = 0$, где μ_1 определяется формулой (10). Будем рассматривать только случай, когда все $b_i(x)$ одинаковы, так что $b_i(x) = b(x)$, $i = 1, \dots, \nu$, где $b(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $b(x) \not\equiv 0$. В этом случае $\mu_1 = -k_0^2 \int_{\mathbb{R}} b(s) ds$ и условие $\mu_1 = 0$ означает, что $\int_{\mathbb{R}} b(s) ds = 0$. Формулы (8) и (9) упрощаются:

$$A = 2b\partial_\tau^2 + \partial_s \dot{b} \tau \partial_\tau + \dot{b} \tau \partial_\tau \partial_s, \quad B|_{\varepsilon=0} = -3b^2 \partial_\tau^2 - \partial_s \dot{b} b \tau \partial_\tau - \dot{b} b \tau \partial_\tau \partial_s - \dot{b}^2 (\tau \partial_\tau)^2. \quad (11)$$

Для вычисления величины μ_2 нам понадобятся

$$A_{00}(s) = -2k_0^2 b + \ddot{b}(\tau \partial_\tau)_{00}, \quad A_{n0}(s) = (\tau \partial_\tau)_{n0} \ddot{b}, \quad n > 0, \quad (12)$$

$$\int_{\mathbb{R}} B_{00}(s, 0) ds = 3k_0^2 \int_{\mathbb{R}} b^2(s) ds - ((\tau \partial_\tau)^2)_{00} \int_{\mathbb{R}} \dot{b}^2 ds. \quad (13)$$

При вычислении последнего интеграла и других слагаемых в формулах (4), (5) нужно иметь в виду, что слагаемые, в которых ∂_s стоит на последнем месте, дают нулевой результат и такой же результат после интегрирования дают слагаемые, в которых ∂_s стоит на первом месте, что следует из формулы интегрирования по частям. Поэтому при вычислении правой части в (13) в операторе B нужно учитывать только первое и последнее слагаемые, а при вычислении остальных слагаемых в формуле для μ_2 в операторе A можно опустить второе слагаемое. Через b_{-1} и b_{-2} будем обозначать первую и вторую первообразные от b , обращающиеся в нуль на $-\infty$:

$$b_{-1}(s) = \int_{-\infty}^s b(s') ds', \quad b_{-2}(s) = \int_{-\infty}^s (s - s') b(s') ds'.$$

С учетом сделанных замечаний после очевидных интегрирований по частям получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \bar{\chi}_0 A \left(\int_{-\infty}^s (s - s') A_{00}(s') ds' \chi_0 \right) ds d\tau \\ &= \int_{\Omega} \bar{\chi}_0 (2b\partial_\tau^2 + \dot{b} \tau \partial_\tau \partial_s) (-2k_0^2 b_{-2} + b(\tau \partial_\tau)_{00}) \chi_0 ds d\tau \\ &= -4k_0^4 \int_{\mathbb{R}} b_{-1}^2 ds + ((\tau \partial_\tau)_{00})^2 \int_{\mathbb{R}} \dot{b}^2 ds. \end{aligned} \quad (14)$$

Интегрированием по частям устанавливаются соотношения

$$(\tau \partial_\tau)_{00} = -\frac{\nu}{2}, \quad (\tau \partial_\tau)_{n0} = -(\tau \partial_\tau)_{0n}, \quad n > 0. \quad (15)$$

Собирая вместе формулы (13)–(15), получаем

$$\mu_2 = 2k_0^4 \int_{\mathbb{R}} b_{-1}^2 ds - \frac{3}{2} k_0^2 \int_{\mathbb{R}} b^2 ds + \left(\frac{1}{2} ((\tau \partial_\tau)^2)_{00} - \frac{\nu^2}{8} \right) \int_{\mathbb{R}} \dot{b}^2 ds + C, \quad (16)$$

где

$$C = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((\tau \partial_\tau)_{n0})^2 \int_{\mathbb{R}} \ddot{b} \mathcal{E}_{\rho_n} * \ddot{b} ds. \quad (17)$$

С помощью равенства Парсеваля легко устанавливается, что при $b(x) \not\equiv 0$ интегралы, входящие в выражение (17), отрицательны; следовательно, $C \geq 0$. В критическом случае нас прежде всего интересует знак μ_2 , поскольку именно этот знак в

силу теоремы 1 и замечания к ней определяет будут или нет при достаточно малых ε возникать собственные значения оператора H_ε , удовлетворяющие неравенству (7) с некоторым достаточно малым μ_0 . Мы покажем, что μ_2 может иметь разные знаки даже при фиксированном критическом $b(x)$ в зависимости от выбора области M .

Перейдем от области M к гомотетичной области M_δ , состоящей из $y \in \mathbb{R}^\nu$, для которых $y/\delta \in M$. Соответствующие значения μ_2 и C , вычисленные по формулам (16) и (17), для области M_δ , будем обозначать как $\mu_2(\delta)$ и $C(\delta)$ соответственно. Собственные значения оператора $-\Delta_D$ для области M_δ , очевидно, равны k_n^2/δ^2 , где k_n^2 – собственные значения для M , а $(\tau\partial_\tau)_{n0}$ не зависит от δ .

ТЕОРЕМА 3. При фиксированном критическом $b(x) \not\equiv 0$ имеют место неравенства: $\mu_2(\delta) > 0$ при достаточно малых δ и $\mu_2(\delta) < 0$ при достаточно больших δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя в формуле (16) k_0^2 на k_0^2/δ_0^2 и учитывая, что $C(\delta) \geq 0$, получим неравенство

$$\mu_2(\delta) \geq 2\delta^{-4}k_0^4 \int_{\mathbb{R}} b_{-1}^2 - \frac{3}{2}\delta^{-2}k_0^2 \int_{\mathbb{R}} b^2 ds + \left(\frac{1}{2}((\tau\partial_\tau)^2)_{00} - \frac{\nu^2}{8} \right) \int_{\mathbb{R}} \dot{b}^2 ds,$$

из которого следует, что $\mu_2(\delta) > 0$ при достаточно малых δ .

Чтобы показать, что $\mu_2(\delta) < 0$ при достаточно больших δ , преобразуем C в формуле (17). С помощью равенства $\mathcal{E}_{\rho_n} = \rho_n^2 \mathcal{E} + \delta$ и интегрирования по частям получим

$$\int_{\mathbb{R}} \ddot{b} \mathcal{E}_{\rho_n} * \ddot{b} ds = -\rho_n^2 \int_{\mathbb{R}} \dot{b} \mathcal{E}_{\rho_n} * \dot{b} ds - \int_{\mathbb{R}} \dot{b}^2 ds.$$

Поэтому

$$C = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} ((\tau\partial_\tau)_{n0})^2 \int_{\mathbb{R}} \dot{b}^2 ds + C_1,$$

где

$$C_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2 ((\tau\partial_\tau)_{n0})^2 \int_{\mathbb{R}} \dot{b} \mathcal{E}_{\rho_n} * \dot{b} ds. \quad (18)$$

В силу равенства Парсеваля для рядов по ортонормированной системе

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((\tau\partial_\tau)_{n0})^2 = \|\tau\partial_\tau \chi_0\|^2 - ((\tau\partial_\tau)_{00})^2 = \frac{\nu^2}{4} - ((\tau\partial_\tau)^2)_{00}.$$

Поэтому

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{\nu^2}{4} - ((\tau\partial_\tau)^2)_{00} \right) \int_{\mathbb{R}} \dot{b}^2 ds + C_1.$$

В результате формулу (16) можно записать в виде

$$\mu_2 = 2k_0^4 \int_{\mathbb{R}} b_{-1}^2 ds - \frac{3}{2}k_0^2 \int_{\mathbb{R}} b^2 ds + C_1;$$

следовательно,

$$\mu_2(\delta) = 2\delta^{-4}k_0^4 \int_{\mathbb{R}} b_{-1}^2 ds - \frac{3}{2}\delta^{-2}k_0^2 \int_{\mathbb{R}} b^2 ds + C_1(\delta),$$

где $C_1(\delta)$ получается, если в формуле (17) для C_1 заменить ρ_n на $\rho_n(\delta) = \delta^{-1} \times \sqrt{k_n^2 - k_0^2}$. Поскольку $C_1(\delta) \leq 0$, отсюда следует, что $\mu_2(\delta) < 0$ при достаточно больших δ .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, “Асимптотика собственных функций уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с крайевыми условиями на эквидистантных кривых и рассеяние электромагнитных волн в волноводе”, *Докл. АН СССР*, **123**:4 (1958), 631–633.
- [2] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **8**:1 (2001), 83–105.
- [3] В. П. Маслов, Е. М. Воробьев, “Об одномодовых открытых резонаторах”, *Докл. АН СССР*, **179**:3 (1968), 558–561.
- [4] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, С. О. Сеницын, “Асимптотические решения уравнения Шрёдингера в тонких трубках”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **9**:1 (2003), 1–11.
- [5] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, С. О. Сеницын, Т. Я. Тудоровский, “Квазиклассическое приближение и канонический оператор Маслова для нерелятивистских уравнений квантовой механики в нанотрубках”, *Докл. РАН*, **393**:4 (2003), 460–464.
- [6] V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhoto, T. Ya. Tudorovskii, “Quantum and classical dynamics of electron in thin curved tubes with spin and external electromagnetic fields taken into account”, *Russ. J. Math. Phys.*, **11**:1 (2004), 109–119.
- [7] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, Т. Я. Тудоровский, “Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках. I. Редукция к пространственно-одномерным уравнениям”, *ТМФ*, **141**:2 (2004), 267–303.
- [8] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов, Т. Я. Тудоровский, “Обобщенный адиабатический принцип для описания динамики электрона в искривленных нанотрубках”, *УФН*, **175**:9 (2005), 1004–1010.
- [9] P. Duclos, P. Exner, “Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions”, *Rev. Math. Phys.*, **7**:1 (1995), 73–102.
- [10] P. Exner, P. Šeba, “Bound states in curved quantum waveguides”, *J. Math. Phys.*, **30**:11 (1989), 2574–2580.
- [11] P. Exner, “Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature”, *J. Math. Phys.*, **34**:1 (1993), 23–28.
- [12] P. Exner, “A quantum pipette”, *J. Math. A*, **28** (1995), 5323–5330.
- [13] W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renger, B. Simon, “Weakly coupled bound states in quantum waveguides”, *Proc Amer. Math. Soc.*, **125**:5 (1997), 1487–1495.
- [14] P. Exner, S. A. Vugalter, “Bound states in a locally deformed waveguide: the critical value”, *Lett. Math. Phys.*, **39**:1 (1997), 59–68.
- [15] D. Borisov, P. Exner, R. Gadyl’shin, D. Krejcirik, “Bound states in a weakly deformed strips and layers”, *Ann. Henri Poincaré*, **2**:3 (2001), 553–572.
- [16] В. В. Грушин, “О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях”, *Матем. заметки*, **75**:3 (2004), 360–371.
- [17] В. В. Грушин, “Асимптотическое поведение собственных значений оператора Шрёдингера с поперечным потенциалом в слабо искривленных бесконечных цилиндрах”, *Матем. заметки*, **77**:5 (2005), 656–664.
- [18] Р. Р. Гадильшин, “О локальных возмущениях квантовых волноводов”, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 358–371.
- [19] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики.*, т. 4: Анализ операторов, Мир, М., 1982.

В. В. Грушин

Московский государственный институт
электроники и математики
E-mail: pm@miem.edu.ru

Поступило
13.12.2005