Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Квадратичные преобразования и формулы Гиллеры для $1/\pi^2$, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 335–340

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:54:51

Квадратичные преобразования и формулы Гиллеры для $1/\pi^2$

В. В. Зудилин

Доказываются две новые формулы рамануджанова типа для $1/\pi^2$.
Библиография: 11 названий.

В серии работ [1]–[3] Х. Гиллера обнаружил ряд формул рамануджанова типа для $1/\pi^2$, часть из которых он доказал. Так, например, следующие два тождества установлены в [1], [3]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{n!^5} (20n^2 + 8n + 1) \left(-\frac{1}{2^2}\right)^n = \frac{8}{\pi^2}, \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5}{n!^5} (820n^2 + 180n + 13) \left(-\frac{1}{2^{10}}\right)^n = \frac{128}{\pi^2}, \quad (2)$$

где $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a) = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k)$ обозначает символ Похгаммера. В действительности, левые части всех формул Гиллеры представлены некоторыми гипергеометрическими ${}_5F_4$ -рядами, за единственным исключением [4]

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{36n^2 + 12n + 1}{2^{10n}} = \frac{32}{\pi^2}, \quad \text{где } A_n = \binom{2n}{n}^2 \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}^2 \binom{2n-2k}{n-k}^2 \quad (3)$$

(эта формула остается недоказанной). Напомним, что обобщенный гипергеометрический ряд [5] определяется для $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, формулой

$${}_{q+1}F_q \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_q \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_0)_n (a_1)_n \cdots (a_q)_n}{n! (b_1)_n \cdots (b_q)_n} z^n.$$

Формула (3) является естественным обобщением формулы Сато для $1/\pi$, содержащей в качестве слагаемых числа Апери (см. [6] и [7]), а также некоторых других тождеств вроде

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{4n+1}{36^n} = \frac{18}{\pi\sqrt{15}}, \quad \text{где } B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^4$$

(этот пример доказан Й. Янгом [8]).

Цель этой заметки — вывести два новых тождества типа (3) из (1), (2), используя гипергеометрическую технику.

Работа выполнена при поддержке стипендии Института математики им. Макса Планка (Бонн) и частичной поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

1. Квадратичные преобразования. Напомним квадратичные преобразования для ${}_2F_1$ -ряда (Гаусс)

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ 1+a-b \end{matrix} \middle| z\right) = (1-z)^{-a} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a-b \\ 1+a-b \end{matrix} \middle| \frac{-4z}{(1-z)^2}\right)$$

и для ${}_3F_2$ -ряда (Уиппл)

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix} \middle| z\right) = (1-z)^{-a} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} \frac{1}{2}a, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a, 1+a-b-c \\ 1+a-b, 1+a-c \end{matrix} \middle| \frac{-4z}{(1-z)^2}\right). \quad (4)$$

Их многомерные аналоги в правых частях обязательно содержат кратные гипергеометрические ряды (ср., например, с [9; предложение 6] и [10; теорема 5]). Здесь мы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место квадратичное преобразование*

$$\begin{aligned} & {}_5F_4\left(\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| z\right) \\ &= (1-z)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}a)_n (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a)_n}{(1+a-b)_n (1+a-c)_n} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n \\ & \quad \times \sum_{\nu=0}^n \frac{(b)_\nu (c)_\nu (1+a-d-e)_\nu}{\nu! (1+a-d)_\nu (1+a-e)_\nu} \frac{(1+a-b-c)_{n-\nu}}{(n-\nu)!} \end{aligned} \quad (5)$$

при условии, что оба ряда сходятся.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 1 может быть сформулирована в виде теоремы типа Орра (ср. с [5; раздел 2.5]): *если*

$$(1-z)^{b+c-a-1} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} b, c, 1+a-d-e \\ 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad (6)$$

то

$$\begin{aligned} & {}_5F_4\left(\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| z\right) \\ &= (1-z)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{(\frac{1}{2}a)_n (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a)_n}{(1+a-b)_n (1+a-c)_n} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2}\right)^n. \end{aligned}$$

Как следует из (6), $|f_n|^{1/n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$; поэтому условие $|4z/(1-z)^2| < 1$ обеспечивает сходимость двойного ряда в (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно провести доказательство в окрестности $z = 0$. Воспользовавшись теоремой Пфаффа–Заальшютца [5; формула (2.3.1.3)],

$$\begin{aligned} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, a+n, 1+a-d-e \\ 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| 1\right) &= \frac{(-d-n+1)_n (e)_n}{(1+a-d)_n (e-a-n)_n} \\ &= \frac{(d)_n (e)_n}{(1+a-d)_n (1+a-e)_n}, \end{aligned}$$

запишем

$$\begin{aligned}
 & {}_5F_4 \left(\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| z \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{n! (1+a-b)_n (1+a-c)_n} z^n \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, a+n, 1+a-d-e \\ 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| 1 \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c)_n}{n! (1+a-b)_n (1+a-c)_n} z^n \sum_{\nu=0}^n \frac{(-n)_{\nu} (a+n)_{\nu} (1+a-d-e)_{\nu}}{\nu! (1+a-d)_{\nu} (1+a-e)_{\nu}} \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1+a-d-e)_{\nu} (-1)^{\nu}}{\nu! (1+a-d)_{\nu} (1+a-e)_{\nu}} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(a)_{n+\nu} (b)_n (c)_n}{(n-\nu)! (1+a-b)_n (1+a-c)_n} z^n \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1+a-d-e)_{\nu} (-1)^{\nu}}{\nu! (1+a-d)_{\nu} (1+a-e)_{\nu}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+2\nu} (b)_{m+\nu} (c)_{m+\nu}}{m! (1+a-b)_{m+\nu} (1+a-c)_{m+\nu}} z^{m+\nu} \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{2\nu} (b)_{\nu} (c)_{\nu} (1+a-d-e)_{\nu}}{\nu! (1+a-b)_{\nu} (1+a-c)_{\nu} (1+a-d)_{\nu} (1+a-e)_{\nu}} (-z)^{\nu} \\
 &\quad \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} a+2\nu, b+\nu, c+\nu \\ 1+a-b+\nu, 1+a-c+\nu \end{matrix} \middle| z \right).
 \end{aligned}$$

Применение квадратичного преобразования (4) к внутреннему ${}_3F_2$ -ряду дает

$$\begin{aligned}
 & {}_5F_4 \left(\begin{matrix} a, b, c, d, e \\ 1+a-b, 1+a-c, 1+a-d, 1+a-e \end{matrix} \middle| z \right) \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a)_{2\nu} (b)_{\nu} (c)_{\nu} (1+a-d-e)_{\nu}}{\nu! (1+a-b)_{\nu} (1+a-c)_{\nu} (1+a-d)_{\nu} (1+a-e)_{\nu}} (-z)^{\nu} \\
 &\quad \times (1-z)^{-(a+2\nu)} \cdot {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}a+\nu, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\nu, 1+a-b-c \\ 1+a-b+\nu, 1+a-c+\nu \end{matrix} \middle| \frac{-4z}{(1-z)^2} \right) \\
 &= (1-z)^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}a)_{\nu} (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)_{\nu} (b)_{\nu} (c)_{\nu} (1+a-d-e)_{\nu}}{\nu! (1+a-b)_{\nu} (1+a-c)_{\nu} (1+a-d)_{\nu} (1+a-e)_{\nu}} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^{\nu} \\
 &\quad \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}a+\nu)_m (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a+\nu)_m (1+a-b-c)_m}{m! (1+a-b+\nu)_m (1+a-c+\nu)_m} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^m \\
 &= (1-z)^{-a} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(b)_{\nu} (c)_{\nu} (1+a-d-e)_{\nu}}{\nu! (1+a-d)_{\nu} (1+a-e)_{\nu}} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^{\nu} \\
 &\quad \times \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}a)_n (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)_n (1+a-b-c)_{n-\nu}}{(n-\nu)! (1+a-b)_n (1+a-c)_n} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^{n-\nu} \\
 &= (1-z)^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}a)_n (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a)_n}{(1+a-b)_n (1+a-c)_n} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^n \\
 &\quad \times \sum_{\nu=0}^n \frac{(b)_{\nu} (c)_{\nu} (1+a-d-e)_{\nu}}{\nu! (1+a-d)_{\nu} (1+a-e)_{\nu}} \frac{(1+a-b-c)_{n-\nu}}{(n-\nu)!},
 \end{aligned}$$

что в точности является требуемой формулой (5).

Подставляя $a = b = c = d = e = \frac{1}{2}$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n^5}{n!^5} z^n = \frac{1}{(1-z)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})_n (\frac{3}{4})_n}{n!^2} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^n \sum_{\nu=0}^n \frac{(\frac{1}{2})_\nu^3}{\nu!^3} \frac{(\frac{1}{2})_{n-\nu}}{(n-\nu)!}.$$

Отметим равенство

$$u_n = \sum_{\nu=0}^n \frac{(\frac{1}{2})_\nu^3}{\nu!^3} \frac{(\frac{1}{2})_{n-\nu}}{(n-\nu)!} = \sum_{\nu=0}^n \left(\frac{(\frac{1}{4})_\nu (\frac{3}{4})_{n-\nu}}{\nu! (n-\nu)!} \right)^2, \quad (7)$$

вытекающее из [5; формула (2.5.18)]. Другой способ получения (7) основан на рекуррентном соотношении

$$8(n+1)^3 u_{n+1} - (2n+1)(8n^2 + 8n + 5)u_n + 8n^3 u_{n-1} = 0, \quad (8)$$

которому удовлетворяют обе части (7). (Доказательство (8) использует алгоритм созидательного телескопирования [11; гл. 6].) Подытожим сказанное в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $|z| < 1$ и $|4z/(1-z)^2| < 1$. Тогда имеет место тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n^5}{n!^5} z^n = \frac{1}{(1-z)^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{(\frac{1}{4})_n (\frac{3}{4})_n}{n!^2} \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^n, \quad (9)$$

где числа u_n определены в (7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Стоит отметить следующее любопытное гипергеометрическое тождество:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{(\frac{1}{3})_n (\frac{2}{3})_n}{n!^2} z^n = {}_3F_2 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \middle| z \right)^2 = {}_2F_1 \left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12} \middle| z \right)^4, \quad (10)$$

поскольку двойной гипергеометрический ряд в левой части тесно связан с рядом из (9). Формула (10) родилась в нашей совместной переписке с Г. Альмквистом и Й. Янгом.

2. Новые формулы для $1/\pi^2$. Для дифференциального оператора $\theta = z \frac{d}{dz}$ имеем

$$\theta(1-z)^{-1/2} = \frac{z}{2(1-z)} \cdot (1-z)^{-1/2} \quad \text{и} \quad \theta \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right) = \frac{1+z}{1-z} \cdot \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \theta \left((1-z)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^n \right) \\ &= (1-z)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \left(n \frac{1+z}{1-z} + \frac{z}{2(1-z)} \right) \cdot \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^n, \\ & \theta^2 \left((1-z)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^n \right) \\ &= (1-z)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot \left(n^2 \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2} + n \frac{z(3+z)}{(1-z)^2} + \frac{z(2+z)}{4(1-z)^2} \right) \cdot \left(\frac{-4z}{(1-z)^2} \right)^n. \end{aligned}$$

Применим эти результаты к функциям

$$20\theta^2 f(z) + 8\theta f(z) + f(z) \quad \text{и} \quad 820\theta^2 f(z) + 180\theta f(z) + 13f(z),$$

где $f(z)$ задается формулой (9), и подставим соответственно $z = -1/2^2$ и $z = -1/2^{10}$. Воспользовавшись далее тождествами (1), (2) и формулами

$$\frac{(\frac{1}{4})_n (\frac{3}{4})_n}{n!^2} = 2^{-6n} \frac{(4n)!}{n!^2 (2n)!},$$

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{1}{2})_k^3}{k!^3} \frac{(\frac{1}{2})_{n-k}}{(n-k)!} = 2^{-6n} \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}^3 \binom{2n-2k}{n-k} 2^{4(n-k)},$$

получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *Имеют место тождества*

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{(4n)!}{n!^2 (2n)!} \frac{18n^2 - 10n - 3}{(2^8 5^2)^n} = \frac{10\sqrt{5}}{\pi^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{(4n)!}{n!^2 (2n)!} \frac{1046529n^2 + 227104n + 16032}{(5^4 41^2)^n} = \frac{5^4 41 \sqrt{41}}{\pi^2},$$

где последовательность целых чисел

$$U_n = \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}^3 \binom{2n-2k}{n-k} 2^{4(n-k)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$(n+1)^3 U_{n+1} - 8(2n+1)(8n^2 + 8n + 5)U_n + 4096n^3 U_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Нам представляется крайне правдоподобным, что гипергеометрическая техника могла бы привести к ряду других формул для $1/\pi^2$.

Благодарности. Я благодарен Герту Альмквисту, Кристиану Краттенталеру и Йи-Фану Янгу за конструктивные замечания. Заключительная часть настоящей статьи была выполнена в Математическом институте им. Макса Планка (Бонн). Я признателен персоналу этого института за создание замечательных условий для работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Guillera, "Some binomial series obtained by the WZ-method", *Adv. in Appl. Math.*, **29**:4 (2002), 599–603.
- [2] J. Guillera, "About a new kind of Ramanujan-type series", *Experiment. Math.*, **12**:4 (2003), 507–510.
- [3] J. Guillera, "Generators of some Ramanujan formulas", *Ramanujan J.*, **11**:1 (2006), 41–48.
- [4] J. Guillera, *My formulas for $1/\pi^2$* , Manuscript at <http://personal.auna.com/jguillera/pi-formulas.pdf> (2005).
- [5] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.

- [6] Y. Yang, “On differential equations satisfied by modular forms”, *Math. Z.*, **246**:1–2 (2004), 1–19.
- [7] H. H. Chan, S. H. Chan, Z. Liu, “Domb’s numbers and Ramanujan–Sato type series for $1/\pi$ ”, *Adv. Math.*, **186**:2 (2004), 396–410.
- [8] Y. Yang, *Personal communication* (August 2005).
- [9] G. Almkvist, W. Zudilin, “Differential equations, mirror maps and zeta values”, *Mirror Symmetry V*, AMS/IP Stud. Adv. Math., **38**, eds. N. Yui, S.-T. Yau, and J. D. Lewis, Amer. Math. Soc. & International Press, Providence, RI, 2007, 481–515; [arXiv:math.NT/0402386](#).
- [10] W. Zudilin, “Well-poised hypergeometric transformations of Euler-type multiple integrals”, *J. London Math. Soc.* (2), **70**:1 (2004), 215–230.
- [11] M. Petkovšek, H. S. Wilf, D. Zeilberger, *A = B*, A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.

В. В. Зудилин (W. Zudilin)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: wadim@mi.ras.ru

Поступило

11.07.2006