Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Кац, Сингулярные строго возрастающие функции
и одна задача разбиения сегмента, *Матем. заметки*,
2007, том 81, выпуск 3, 341–347

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3677>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 06:43:38

УДК 517.5

Сингулярные строго возрастающие функции и одна задача разбиения сегмента

И. С. Кац

В работе устанавливается, что эквивалентны задача построения таких подмножеств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ заданного сегмента $[a; b] \subset \mathbb{R}$, что 1) $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$, 2) $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = [a; b]$, 3) положительны лебеговы меры их пересечений с любым интервалом $J \subset [a; b]$, и задача построения строго возрастающей сингулярной функции.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Пусть V – линейное пространство вещественных функций $f(x)$ ($0 \leq x \leq 1$, $f(0) = 0$) ограниченной вариации на $[0; 1]$ с операциями сложения и умножения на скаляр, определенными обычным образом, и нормой, равной вариации функции: $\|f\|_V = \text{var}_{[0;1]} f$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f \in V$ называется *сингулярной*, если она непрерывна на $[0; 1]$ и $f'(x) = 0$ при почти всех (сокращенно, п.в.) $x \in [0; 1]$, а в том частном случае, когда сумма длин ее интервалов постоянства (нерасширимых) равна единице, мы называем ее *классической сингулярной*.

Обычно, в курсах теории функций вещественной переменной приводится пример сингулярной функции, интервалы постоянства которой образуют множество, дополнительное к канторову совершенному множеству. Это так называемая канторова лестница [1; гл. VII, § 2, с. 232–233].

Как известно, для любого совершенного, нигде не плотного множества $\mathcal{F} \subset [0; 1]$ лебеговой меры 0 можно построить неубывающую сингулярную функцию, для которой интервалы, дополнительные к $\mathcal{F}$, являются интервалами ее постоянства, а $\mathcal{F}$ – множеством ее точек роста¹ [2; гл. III, § 13, с. 154, 155]. Эта функция является классической сингулярной. Легко понять, что справедливо в некотором смысле обратное: множество точек роста любой неубывающей классической сингулярной функции является совершенным нигде не плотным множеством.

¹ Пусть функция $g(x)$ определена на сегменте $[a; b]$ и не убывает на нем. Тогда точка $x_0 \in (a; b)$ называется ее точкой роста, если $g(x_0 + h) - g(x_0 - h) > 0$ при любом сколь угодно малом $h > 0$, а точка a (точка b) называется ее точкой роста, если $g(a + h) - g(a) > 0$ ($g(b) - g(b - h) > 0$) при любом сколь угодно малом $h > 0$. Легко видеть, что при указанных выше свойствах функции $g(x)$ множество G ее точек роста замкнуто, а если она еще и непрерывна, то G – совершенное множество.

Известны также [2; гл. III, § 13, с. 155] примеры сингулярных функций, не имеющих интервалов постоянства. В этих примерах сингулярная функция $f(x)$ представлялась в виде сходящегося в V ряда

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x), \quad (1.1)$$

где $f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, – классические сингулярные функции.

Нами в [3] было установлено, что любая сингулярная функция $f \in V$ (не обязательно строго возрастающая) представима в виде сходящегося в V ряда (1.1) с классическими $f_j(x)$, а в том частном случае, когда f – неубывающая функция, $f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, могут быть выбраны неубывающими и тогда; очевидно, сингулярная функция $f(x)$ строго возрастает в том и только в том случае, когда объединение множеств точек роста функций $f_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$, из (1.1) всюду плотно в $[0; 1]$. Таким образом, вопрос о построении строго возрастающих на $[0; 1]$ сингулярных функций был в некотором смысле полностью решен.

Впредь множество $K \subset \mathbb{R}$, измеримое по Лебегу, будем называть L -измеримым, а измеримое по мере, порождаемой неубывающей функцией g , – L_g -измеримым. Соответствующие меры будем называть L -мерой и L_g -мерой. Через $m(K)$ будем обозначать L -меру множества K , а через $m_g(K)$ – L_g -меру этого множества. Борелевские множества будем называть B -измеримыми. Напомним, что B -измеримое множество L_g -измеримо, какова бы ни была неубывающая функция g и, в частности, L -измеримо.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что упорядоченная пара L -измеримых множеств $(\mathcal{P}; \mathcal{Q})$ является *весомо перемежающимся разбиением* (кратко, ВПР) сегмента $[a; b]$, если $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = [a; b]$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$, $m(\mathcal{P} \cap J) > 0$ и $m(\mathcal{Q} \cap J) > 0$ для любого интервала $J \subset [a; b]$.

В статье будет показано, что задача построения ВПР по сути эквивалентна задаче построения строго возрастающей сингулярной функции (теоремы 1 и 2). Можно считать теперь, что поставленная в [1] задача построения ВПР [1; гл. III, задача 8] (термин “ВПР” там не использовался) получила полное решение.

Стимулом к написанию настоящей работы послужила статья [4]. Она показала, что не пропал интерес к сингулярным функциям. Однако в отличие от [4], где вводилось некое вероятностное пространство, а строго возрастающая сингулярная функция строилась как функция распределения вероятностей какой-то определенной на этом пространстве случайной величины, в настоящей статье мы не выходим за рамки методов теории функций вещественной переменной.

2. Основные результаты. Пусть $(P; Q)$ – ВПР сегмента $[0; l]$ оси t , $m(P) = 1$, $l > 1$ и, следовательно, $m(Q) = l - 1$. Рассмотрим функции p и q , определенные на $[0; l]$ равенствами

$$p(t) = m([0; t] \cap P), \quad q(t) = m([0; t] \cap Q). \quad (2.1)$$

Не нарушая общности, впредь будем считать, что в ВПР $(P; Q)$ множество P и, следовательно, Q B -измеримы, ибо для L -измеримого множества P найдется такое B -измеримое множество $\hat{P}$, что $P \subset \hat{P}$, $m(\hat{P} \setminus P) = 0$ [2; гл. III, § 3, теорема (6.5), часть (ii)] и, следовательно, B -измеримое множество $\hat{Q} = [0; l] \setminus \hat{P}$ таково,

что $\widehat{Q} \subset Q$, $m(Q \setminus \widehat{Q}) = 0$. Замена ВПР $(P; Q)$ на $(\widehat{P}; \widehat{Q})$ не изменит функции $p(t)$ и $q(t)$, определенные равенствами (2.1).

Ясно, что для $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0; l]$

$$p(t_2) - p(t_1) = m((t_1; t_2] \cap P) = m((t_1; t_2) \cap P) < t_2 - t_1.$$

Следовательно, функция $p(t)$ непрерывна и, более того, абсолютно непрерывна на $[0; l]$, а так как в соответствии с определением 2 $m((t_1; t_2) \cap P) > 0$, то она строго возрастает. Аналогичные утверждения справедливы для функции $q(t)$. Кроме того, $p(l) = m([0; l] \cap P) = m(P) = 1$.

Основные результаты содержатся в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 1. *При указанных выше условиях функция $x \xrightarrow{f} y$, определенная параметрически равенствами*

$$x = p(t), \quad y = q(t), \quad 0 \leq t \leq l, \quad (2.2)$$

является строго возрастающей на $[0; 1]$ сингулярной функцией, для которой $f(0) = 0$, $f(1) = l - 1$.

Впредь будем говорить, что функция f , сингулярность которой утверждается теоремой 1, порождается ВПР $(P; Q)$ сегмента $[0; l]$ оси t .

ТЕОРЕМА 2. *Для любой строго возрастающей на $[0; 1]$ сингулярной функции $y = f(x)$, равной нулю в точке $x = 0$, найдется ВПР сегмента $[0; l]$ оси t с $l = 1 + f(1)$, которое порождает эту функцию.*

СЛЕДСТВИЕ (теорем 1 и 2). *Если f – строго возрастающая на $[0; 1]$ сингулярная функция и $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, то обратная ей функция строго возрастает на $[0; 1]$ и сингулярна.*

3. Вспомогательные предложения. Для облегчения ссылок на известные или “почти известные” факты теории меры и теории функций вещественной переменной приводим ряд вспомогательных предложений.

Пусть $S \subset [0; b]$ – такое B -измеримое множество, что $m(S \cap J) > 0$ для любого интервала $J \subset [0; b]$. Положим

$$s(t) = m([0; t] \cap S) \quad \forall t \in [0; b]. \quad (3.1)$$

Ясно, что $s(t)$ строго возрастает и непрерывна на $[0; b]$.

ЛЕММА 1. *При принятых выше условиях и обозначениях для любого B -измеримого множества $K \subset [0; b]$*

$$m_s(K) = m(K \cap S). \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определенные на множестве всех B -измеримых множеств $K \subset [0; b]$ функции, стоящие в левой и правой частях (3.2), вполне аддитивны. Кроме того, для любого открытого или замкнутого с одной или двух сторон промежутка $\Delta \subset [0; b]$ с концами в точках α и β ($\alpha < \beta$) в соответствии с (3.1)

$$m_s(\Delta) = s(\beta) - s(\alpha) = m([0; \beta] \cap S) - m([0; \alpha] \cap S) = m([\alpha; \beta] \cap S) = m(\Delta \cap S),$$

ибо L -мера точки равна нулю. Поэтому упомянутые функции множеств принимают равные значения на B -измеримых множествах $K \subset [a; b]$.

ЛЕММА 2. Если $g(t)$ строго возрастает и непрерывна на $[0; b]$, то для любого B -измеримого множества $K \subset [0; b]$

$$m_g(K) = m(g(K)),$$

где $g(K)$ означает множество значений функции g на множестве K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из более общего результата (см., например, [5; гл. II, п. 5.61, (h)]) как частный случай.

ЛЕММА 3. Пусть K – B -измеримое подмножество сегмента $[0; b]$, $g(t)$ – строго возрастающая непрерывная на $[0; b]$ функция и $g'(t) = 0 \quad \forall t \in K$. Тогда $m_g(K) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как известно, если $g(t)$ не убывает на $[0; b]$, $K \subset [0; b]$ и $g'(t) \leq c \quad \forall t \in K$, где $c \geq 0$ – константа, то (см. [1; гл. VIII, § 2, лемма 2])

$$m^*(g(K)) \leq cm^*(K), \quad (3.3)$$

где m^* – символ внешней лебеговой меры. Так как по условию леммы $g'(t) = 0 \quad \forall t \in K$, то $m^*(g(K)) = 0$ и, следовательно, $m(g(K)) = 0$, а согласно лемме 2 $m_g(K) = 0$.

ЛЕММА 4. Пусть $g(t)$ – строго возрастающая на $[0; b]$ непрерывная функция. Пусть множество $M \subset [0; b]$ B -измеримо и $m_g(M) = 0$. Тогда $g'(t) = 0$ при п.в. $t \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $g'(t) > 0$ на множестве $T \subset M$ положительной L -меры. Поэтому для какого-то $k > 0$ множество $N = \{t \in T: g'(t) \geq k\}$ имеет положительную L -меру. Так как функция $g'(t)$ B -измерима [2; гл. IV, § 4, п. 4.2 и 4.3], то множества T и N B -измеримы. Приведенное в доказательстве леммы 3 предложение из [1] остается верным при замене символа $\leq$ на $\geq$ [1; гл. VIII, § 2, лемма 3]. Поэтому, так как N L -измеримо и L_g -измеримо, $m_g(N) = m(g(N)) \geq km(N) > 0$. Тем более, $m_g(M) > 0$, что противоречит условию леммы 4.

4. Доказательство теоремы 1. Так как функция $x = p(t)$ строго возрастает и непрерывна на $[0; l]$, а множество ее значений – это сегмент $[0; 1]$ оси x , она имеет обратную $t = w(x)$, которая непрерывна и строго возрастает на $[0; 1]$, а $w([0; 1]) = [0; l]$. Для определенной равенствами (2.2) функции f справедливо равенство

$$f(x) = q(w(x)) \quad \forall x \in [0; 1]. \quad (4.1)$$

Поэтому функция f непрерывна и строго возрастает на $[0; 1]$, $f(0) = q(w(0)) = q(0) = 0$, $f(1) = q(w(1)) = q(l) = m(Q \cap [0; l]) = m(Q) = l - 1$.

Требуется установить, что $f'(x) = 0$ при п.в. $x \in [0; 1]$.

Пусть $A = p(P)$, $B = p(Q)$. Тогда $w(A) = P$, $w(B) = Q$. Так как $\{P; Q\}$ – это ВПР сегмента $[0; l]$, то $P \cap Q = \emptyset$, $P \cup Q = [0; l]$. Поэтому из строгого возрастания функции p следует, что A и B – B -измеримые множества, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = [0; 1]$. Согласно (4.1) и лемме 2,

$$m_f(A) = m(f(A)) = m(q(w(A))) = m(q(P)) = m_q(P)$$

и в соответствии с леммой 1 и вторым равенством (2.1)

$$m_f(A) = m(P \cap Q) = m(\emptyset) = 0.$$

Из леммы 4 вытекает, что $f'(x) = 0$ при п.в. $x \in A$. Утверждение теоремы будет установлено, если докажем, что A имеет “полную L -меру” на $[0; 1]$, т.е. что $m(A) = 1$. Имеем в соответствии с леммой 2

$$m(A) = m(p(P)) = m_p(P)$$

и согласно лемме 1 и первому равенству (2.1)

$$m(A) = m(P \cap P) = m(P) = 1.$$

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Пусть функция $f(x)$ строго возрастает на $[0; 1]$, сингулярна и $f(0) = 0$. Пусть $\tilde{A} = \{x \in [0; 1]: f'(x) = 0\}$. Множество $\tilde{A}$ B -измеримо. Согласно определению 1

$$m(\tilde{A}) = m([0; 1]) = 1. \quad (5.1)$$

Положим $\tilde{B} = [0; 1] \setminus \tilde{A}$. Заметим, что $\tilde{B}$ – борелевское множество и

$$m(\tilde{B}) = m([0; 1]) - m(\tilde{A}) = 1 - 1 = 0, \quad (5.2)$$

а согласно лемме 3

$$m_f(\tilde{A}) = 0. \quad (5.3)$$

Согласно (5.3)

$$m_f(\tilde{B}) = m_f([0; 1]) - m_f(\tilde{A}) = m_f([0; 1]) = f(1) - f(0) = f(1). \quad (5.4)$$

Кроме того, для любого промежутка $J \subset [0; 1]$

$$m(J \cap \tilde{A}) = m(J) > 0, \quad m_f(J \cap \tilde{B}) = m_f(J) > 0, \quad (5.5)$$

ибо $(J \cap \tilde{A}) \cup (J \cap \tilde{B}) = J$, а в силу (5.2) и (5.3) $m(J \cap \tilde{B}) = 0$, $m_f(J \cap \tilde{A}) = 0$, а $m_f(J) > 0$, так как f строго возрастает.

Рассмотрим функцию $\tilde{w}(x)$, определенную равенством

$$\tilde{w}(x) = f(x) + x \quad \forall x \in [0; 1]. \quad (5.6)$$

Она непрерывна и строго возрастает на $[0; 1]$. Отображение $x \mapsto \tilde{w}(x)$ взаимно однозначно отображает $[0; 1]$ на сегмент $[0; l]$ оси t с $l = 1 + f(1)$. Если K – борелевское множество, а значит оно L -измеримо, L_f -измеримо и $L_{\tilde{w}}$ -измеримо, то в соответствии с (5.6)

$$m_{\tilde{w}}(K) = m_f(K) + m(K). \quad (5.7)$$

Положим $\tilde{P} = \tilde{w}(\tilde{A})$, $\tilde{Q} = \tilde{w}(\tilde{B})$. Так как $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \emptyset$, $\tilde{A} \cup \tilde{B} = [0; 1]$, то $\tilde{P} \cap \tilde{Q} = \emptyset$, $\tilde{P} \cup \tilde{Q} = [0; l]$. Покажем, что $(\tilde{P}; \tilde{Q})$ – это ВПР промежутка $[0; l]$. Пусть $\mathcal{U}$ – какой-то

промежуток из $[0; l]$. Он является $\tilde{w}$ -образом некоторого промежутка $J \subset [0; 1]$. Так как $\mathcal{U} = \tilde{w}(J)$, $\tilde{P} = \tilde{w}(\tilde{A})$, в соответствии с леммой 2 и равенствами (5.7), (5.3), (5.5)

$$\begin{aligned} m(\mathcal{U} \cap \tilde{P}) &= m(\tilde{w}(J \cap \tilde{A})) = m_{\tilde{w}}(J \cap \tilde{A}) = m_f(J \cap \tilde{A}) + m(J \cap \tilde{A}) \\ &= m(J \cap \tilde{A}) = m(J) > 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Кроме того, так как $\tilde{w}(\tilde{B}) = \tilde{Q}$, из леммы 2 и равенств (5.7), (5.2), (5.5) следует, что

$$\begin{aligned} m(\mathcal{U} \cap \tilde{Q}) &= m(\tilde{w}(J \cap \tilde{B})) = m_{\tilde{w}}(J \cap \tilde{B}) = m_f(J \cap \tilde{B}) + m(J \cap \tilde{B}) \\ &= m_f(J \cap \tilde{B}) = m_f(J) > 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из (5.8), (5.9) и произвола в выборе $\mathcal{U} \subset [0; l]$ вытекает, что $(\tilde{P}; \tilde{Q})$ – ВПР сегмента $[0; l]$ оси t . Докажем, что это ВПР порождает функцию $f(x)$. Заметим еще, что в соответствии с леммой 2 и равенствами (5.7), (5.3) и (5.1)

$$m(\tilde{P}) = m(\tilde{w}(\tilde{A})) = m_{\tilde{w}}(\tilde{A}) = m_f(\tilde{A}) + m(\tilde{A}) = m(\tilde{A}) = 1. \quad (5.10)$$

По аналогии с тем, как были введены с помощью (2.1) функции $p(t)$ и $q(t)$, введем функции $\tilde{p}(t)$ и $\tilde{q}(t)$ равенствами

$$\tilde{p}(t) = m(\tilde{P} \cap [0; t]), \quad \tilde{q}(t) = m(\tilde{Q} \cap [0; t]) \quad \forall t \in [0; l]. \quad (5.11)$$

Покажем, что функции $t = \tilde{w}(x)$ и $x = \tilde{p}(t)$ взаимно обратны.

Пусть x_0 – произвольная точка из $[0; 1]$ и $t_0 = \tilde{w}(x_0)$. Согласно (5.11) $\tilde{p}(t_0) = m(\tilde{P} \cap [0; t_0])$. Так как $[0; t_0] = \tilde{w}([0; x_0])$, в соответствии с (5.8) с $[0; t_0]$ вместо $\mathcal{U}$ и $[0; x_0]$ вместо J

$$\tilde{p}(t_0) = m([0; x_0]) = x_0. \quad (5.12)$$

Так как функции $\tilde{p}(t)$ и $\tilde{w}(x)$ строго возрастают, $\tilde{w}([0; 1]) = [0; l]$ и $\tilde{p}([0; l]) = [0; 1]$, из (5.12) и произвола в выборе $x_0 \in [0; 1]$ следует, что, действительно, функции $t = \tilde{w}(x)$ и $x = \tilde{p}(t)$ взаимно обратны. Так как $(\tilde{P}; \tilde{Q})$ – ВПР сегмента $[0; l]$ и выполняется равенство (5.10), согласно теореме 1 функция $h(x)$, определенная равенством

$$h(x) = \tilde{q}(\tilde{w}(x)) \quad \forall x \in [0; 1], \quad (5.13)$$

является сингулярной, строго возрастающей на $[0; 1]$ функцией. Осталось показать, что $h(x) = f(x) \quad \forall x \in [0; 1]$.

Пусть x_0 – произвольная точка из $[0; 1]$. Согласно (5.11) и (5.13)

$$h(x_0) = \tilde{q}(\tilde{w}(x_0)) = m(\tilde{Q} \cap [0; \tilde{w}(x_0)]).$$

Так как $[0; \tilde{w}(x_0)] = \tilde{w}([0; x_0])$, в соответствии с (5.9) с $[0; \tilde{w}(x_0)]$ вместо $\mathcal{U}$ и $[0; x_0]$ вместо J

$$h(x_0) = m([0; \tilde{w}(x_0)] \cap \tilde{Q}) = m_f([0; x_0]) = f(x_0) - f(0) = f(x_0).$$

Итак, $h(x_0) = f(x_0)$. Теорема доказана.

6. Доказательство следствия теорем 1 и 2. Пусть f – строго возрастающая на $[0; 1]$ сингулярная функция и $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Согласно теореме 2 существует ВПР $(P; Q)$ сегмента $[0; 2]$ оси t , которое порождает эту функцию, т.е. функция $y = f(x)$ задается параметрически равенствами (2.1), (2.2). Обратная функция $f^{-1}(y) = x$ задается параметрически теми же равенствами и согласно теореме 1 она является строго возрастающей на $[0; 1]$ и сингулярной, ибо $(Q; P)$ также является ВПР сегмента $[0; 2]$.

7. Дополнительные сведения. Пользуясь случаем, хочу обратить внимание на работу [6], в которой устанавливается зависимость поведения определенной на $[0; 1]$ неубывающей классической сингулярной функции f от конфигурации совершенного множества $\mathcal{F} \subset [0; 1]$ ее точек роста. Ясно, что с увеличением β , $0 \leq \beta \leq 1$, множество $\mathcal{F}_\beta \subset \mathcal{F}$, в точках x которого

$$\lim_{s \downarrow 0} \frac{f(x+s) - f(x-s)}{s^\beta} < \infty,$$

сужается. Супремум множества значений β , для которых $m_f(\mathcal{F}_\beta) > 0$, мы назовем *степенью равномерности* функции f . В [6] установлена (частный случай теоремы А из [6]) с помощью спектральной теории струны

ТЕОРЕМА. Пусть $l_1, l_2, l_3, \dots$ – занумерованная в порядке невозрастания последовательность длин интервалов постоянства неубывающей классической сингулярной функции f , определенной на $[a; b]$. Тогда, если для некоторого $\alpha \in (0; 1/2]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-2} \sum_{j=n+1}^{\infty} l_j \right)^\alpha < \infty,$$

то степень равномерности функции f не превышает $\alpha/(1 - \alpha)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, ГИТТЛ, М., 1957.
- [2] С. Сакс, *Теория интеграла*, ИЛ, М., 1973.
- [3] И. С. Кац, “К вопросу о структуре сингулярных функций ограниченной вариации”, *УМН*, 8:5 (1953), 157–159.
- [4] А. А. Рябинин, В. Д. Быстрицкий, В. А. Ильичев, “О сингулярных строго монотонных функциях”, *Матем. заметки*, 76:3 (2004), 439–451.
- [5] Э. Камке, *Интеграл Лебега–Стилтьеса*, ГИФМЛ, М., 1959.
- [6] И. С. Кац, “Локальные свойства классической сингулярной функции и спектр струны”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1993, №6, 17–21.

И. С. Кац

Одесская национальная академия пищевых технологий

Поступило

04.07.2005

Исправленный вариант

09.11.2005