Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Копецка, Малое множество в большом параллелепипеде, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 348–360

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 12:15:30

Малое множество в большом параллелепипеде

Е. Копецка

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – компактное выпуклое множество, являющееся пересечением полупространств, каждое из которых определено некоторым условием на не более, чем две координаты. Обозначим Q наименьший параллелепипед, который содержит K и имеет стороны, параллельные осям координат. В работе доказано, что при возрастании размерности d отношение $\text{diam } Q / \text{diam } K$ может оказаться сколь угодно большим. Приведены также примеры компактных множеств в банаховых пространствах, не содержащихся ни в каком компактно сжимаемом множестве.

Библиография: 10 названий.

Введение. Представим себе компактное выпуклое подмножество K в $\mathbb{R}^d$, вернее, представим, что мы строим его, постепенно откалывая пространство вокруг K . Сначала мы используем гиперплоскости, определенные лишь одной координатой (например, $x_1 = 1/2$), в результате чего получится наименьший “координатный” параллелепипед Q_1 , содержащий K ; после этого используем гиперплоскости, определенные только двумя координатами (например, $3x_1 - x_6 = 7$), и, тем самым, получим параллелепипед Q_2 , ..., и, наконец, гиперплоскости, определенные всеми d координатами, что дает $Q_d = K$. Для больших d диаметр Q_1 легко может оказаться значительно больше диаметра K . Я заинтересовалась вопросом о том, нельзя ли, по крайней мере, утверждать, что диаметр Q_1 не превосходит, скажем, утроенного диаметра Q_2 . Оказалось, что в общем случае это не так. В теореме 2.2 для каждого $k \geq 2$ построена последовательность множеств, для которой отношение $\text{diam } Q_{k-1} / \text{diam } Q_k$ стремится к бесконечности. Предложение 3.1 является бесконечным вариантом этого результата.

В предложениях 2.3 и 2.4 даны примеры семейств множеств, для которых отношение $\text{diam } Q_1 / \text{diam } Q_2$ ограничено.

Мотивировка задачи происходит из сжимаемых множеств, т.е. образов 1-липпицевых ретракций. В ℓ_2 всякое замкнутое выпуклое множество сжимаемо. В пространствах ℓ_p , $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, сжимаемые множества – это такие выпуклые множества, которые являются пересечениями полупространств, определенных только двумя координатами (см. [1]–[3]). В предложениях 3.3 и 3.4 мы строим примеры компактных множеств, которые не содержатся ни в каком компактно сжимаемом множестве. В свою очередь, это доставляет примеры, показывающие, что в классе сепарабельных недualьных пространств существующие методы решения проблемы Плато о минимальных поверхностях не достаточны.

Обозначения. Для данного натурального числа n через $[n]$ обозначим набор $\{1, \dots, n\}$. Если V – некоторое множество и $k \in \mathbb{N}$, то $\binom{V}{k}$ обозначает множество всех k -элементных подмножеств множества V ; количество элементов V обозначается $|V|$. Стандартный базис в $\mathbb{R}^d$ или ℓ_p обозначается $e_1, e_2, \dots$. Вершины некоторого графа G обозначаются V_G , а ребра – E_G ; мы пишем $G = (V_G, E_G)$.

1. Предварительные сведения: графы и гиперграфы. В этом пункте собраны сведения из теории графов, которые используются в доказательстве нашей основной теоремы 2.2. Если читатель достаточно хорошо знает комбинаторику или не желает знать ее вовсе, то он может прямо перейти к п. 2 и вернуться сюда позже за необходимыми ссылками.

Пусть V – конечное множество, а $\mathcal{M} \subset \binom{V}{k}$ – семейство его подмножеств для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Пара $G = (V, \mathcal{M})$ называется k -равномерным гиперграфом; для $k = 2$ это просто граф. Элементы V называются *вершинами*, а элементы $\mathcal{M}$ – *ребрами* G .

Путь длины j в G – это последовательность вида $P = v_1, M_1, v_2, \dots, M_j, v_{j+1}$, где $v_1, \dots, v_{j+1}$ – различные вершины G , а множества $M_1, \dots, M_j$ – различные ребра G , причем $v_i, v_{i+1} \in M_i$ для $i = 1, 2, \dots, j$. Если $j \geq 2$ и $v_1 = v_{j+1}$, то P называется *циклом* длины j . Если G – граф, то мы пишем просто $P = v_1, v_2, \dots, v_{j+1}$.

Обходом $g(G)$ гиперграфа G называется длина его наименьшего цикла. Подмножество W множества V называется *независимым*, если

$$\binom{W}{k} \cap \mathcal{M} = \emptyset.$$

Степень независимости $\alpha(G)$ гиперграфа G обозначает размер наибольшего независимого множества в G .

Пусть заданы $k, n \in \mathbb{N}$ и $p \in (0, 1)$. Вероятностное пространство случайных k -равномерных гиперграфов – это конечное вероятностное пространство, где элементарными событиями являются все k -равномерные гиперграфы на фиксированном множестве из n вершин и где вероятность гиперграфа с m ребрами равна

$$P(G) = p^m (1 - p)^{\binom{n}{k} - m}.$$

Это соответствует построению случайного гиперграфа путем включения каждого потенциального ребра независимо с вероятностью p .

Другие определения и свойства графов и гиперграфов могут быть найдены, например, в книге [4].

Следующее утверждение – классический результат Эрдёша [5]. Существуют графы, которые не содержат коротких циклов, и все же если мы хотим покрасить их вершины так, чтобы одноцветных ребер не было, то потребуется много разных красок. Мы сформулируем этот результат в виде, удобном для доказательства теоремы 2.2, и для полноты приведем его доказательство.

ТЕОРЕМА 1.1 [5]. *Для любых $m, l \in \mathbb{N}$ и $k \geq 2$ найдется $d \in \mathbb{N}$ и k -равномерный гиперграф G на d вершинах такие, что $\alpha(G) < d/m$ и $g(G) > l$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем достаточно большое n и положим $p = n^{1/(2l)-(k-1)}$. Для этого значения p рассмотрим случайный k -равномерный гиперграф G на n вершинах. Оценим сначала вероятность того, что G содержит независимое множество размера $n/(2m)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\alpha(G) \geq \frac{n}{2m}\right] &\leq \binom{n}{n/(2m)} (1-p)^{\binom{n/(2m)}{k}} \leq \left(\frac{en}{n/(2m)}\right)^{n/(2m)} \exp\left(-p \left(\frac{n}{2mk}\right)^k\right) \\ &= \exp\left(n \frac{1 + \log 2m}{2m} - n^{1+1/(2l)} \frac{1}{(2mk)^k}\right) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

для достаточно больших n . Во втором неравенстве мы воспользовались тем, что $1+x \leq e^x$ для всех $x \in \mathbb{R}$, а также, что

$$\left(\frac{a}{b}\right)^b \leq \binom{a}{b} \leq \left(\frac{ea}{b}\right)^b \quad \text{при } a \geq b.$$

Поскольку G может иметь не более $n^{(k-1)i}$ циклов длины i , а каждый такой цикл присутствует в G с вероятностью p^i , мы можем оценить математическое ожидание числа X циклов длины не более l следующим образом:

$$\mathbb{E}[X] \leq \sum_{i=2}^l n^{(k-1)i} p^i \leq \sum_{i=2}^l n^{i/(2l)} \leq l\sqrt{n} = n \frac{l}{\sqrt{n}} < \frac{n}{4}$$

для достаточно больших n . Тогда по неравенству Чебышева

$$\mathbb{P}\left[X > \frac{n}{2}\right] \leq \frac{n/4}{n/2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для достаточно больших n существует такой k -равномерный гиперграф $\tilde{G}$ на n вершинах, что $\alpha(\tilde{G}) < n/(2m)$ и $\tilde{G}$ содержит не более $n/2$ циклов длины не более l . Из каждого такого цикла $v_1, M_1, v_2, M_2, \dots, v_i, M_i, v_1$ удалим одну из вершин v и все ребра $\tilde{G}$, ее содержащие. Тогда остаток есть гиперграф G на $d \geq n/2$ вершинах, у которого $g(G) > l$ и $\alpha(G) < d/m$.

Пусть $G = ([n], \mathcal{M})$ – гиперграф и C – матрица инцидентности G . Иными словами, C – это матрица размерности $n \times |\mathcal{M}|$, строки которой – характеристические функции множеств $M \in \mathcal{M}$. Для конструкции в доказательстве теоремы 2.2 нам потребуется частное решение системы линейных уравнений $Cx = 0$. Для доказательства существования мы воспользуемся следующим простым наблюдением.

ЛЕММА 1.2. Пусть $k \geq 2$ и $G = ([n], \mathcal{M})$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$, – k -равномерный гиперграф без циклов. Тогда найдутся $M \in \mathcal{M}$ и $N \subset M$ с $|N| = k-1$ такие, что если $v \in N$, то $\deg v = 1$. Иными словами, вершины N не принадлежат никакому иному ребру G , кроме M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующий двудольный граф $B(G)$ с $n + |\mathcal{M}|$ вершинами $V = U \cup W$. Вершины $B(G)$ в U представляют вершины G , вершины W представляют ребра G и вершина, представляющая $j \in [n]$, соединена с вершиной, представляющей $M \in \mathcal{M}$, тогда и только тогда, когда $j \in M$. Поскольку G не содержит циклов, $B(G)$ является лесом. Поскольку G k -равномерный, $\deg w = k$ для всех $w \in W$.

Допустим, что утверждение леммы неверно, и удалим из $B(G)$ все вершины $u \in U$ с $\deg u \leq 1$, а также и ребра, которые их содержат. Останется граф, являющийся лесом, причем все его вершины имеют степень не ниже 2, что невозможно.

В доказательстве теоремы 2.2 мы применим следующую лемму, где $a_j = 1/(k-1)$ для всех $j \in A$. Заметим, что если $k = 2$ и $|A| = 1$, например $A = \{1\}$, то легко можно выписать явное решение системы линейных уравнений:

$$a_i = \begin{cases} (-1)^{\rho(i,1)}, & \text{если } \rho(i,1) < \infty, \\ 0, & \text{если } \rho(i,1) = \infty. \end{cases}$$

Здесь $\rho(i,1)$ обозначает длину кратчайшего пути в G , соединяющего 1 и i .

ЛЕММА 1.3. Пусть $k \geq 2$ и $G = ([n], \mathcal{M})$ — k -равномерный гиперграф без циклов. Пусть $A \subset [n]$ таково, что $|A| \leq k-1$, и пусть $a_j \in \mathbb{R}$ заданы для $j \in A$. Тогда и для $i \in [n] \setminus A$ найдутся такие $a_i \in \mathbb{R}$, что

- (i) для всех ребер $M \in \mathcal{M}$ мы имеем $\sum_{i \in M} a_i = 0$;
- (ii) для всех вершин $i \in [n]$ мы имеем $|a_i| \leq \sum_{j \in A} |a_j|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по $|\mathcal{M}|$. Если $|\mathcal{M}| = 1$ и $\mathcal{M} = \{M\}$, то выбираем $t \in M \setminus A$ и полагаем

$$a_t = - \sum_{j \in M \cap A} a_j.$$

Для всех прочих $i \in [n] \setminus A$ мы полагаем $a_i = 0$.

Пусть теперь $|\mathcal{M}| \geq 2$. Выберем $N \subset M \in \mathcal{M}$ как в лемме 1.2 и обозначим через s ту вершину G , для которой $N \cup \{s\} = M$. Мы удалим из G вершины, принадлежащие N , и ребро M с тем, чтобы получился k -равномерный гиперграф G' , у которого на одно ребро меньше. Возможны следующие два случая.

Если $N = A$, то мы полагаем

$$a_s = - \sum_{j \in A} a_j.$$

Чтобы определить другие a_i , воспользуемся предположением индукции для G' , $A' = M \setminus N = M \setminus A$ и a_s .

Если $N \neq A$, мы применяем предположение индукции для G' и $A'' = A \setminus N$ и получаем a_i для $i \in [n] \setminus N$ (если $A'' = \emptyset$, то для $i \in [n] \setminus N$ полагаем $a_i = 0$), так что

- (i) $\sum_{i \in E} a_i = 0$ для всех ребер $E \in \mathcal{M} \setminus \{M\}$;
- (ii) $|a_i| \leq \sum_{j \in A \setminus N} |a_j|$ для всех вершин $i \in [n] \setminus N$.

Выберем $t \in N \setminus A$ и положим

$$a_t = -a_s - \sum_{j \in N \cap A} a_j.$$

Во всех оставшихся случаях, если таковые имеются, полагаем a_i равными нулю.

Гиперграф $G = (V, \mathcal{M})$ определяет естественное расстояние на V . Расстояние $\rho(u, v)$ между двумя вершинами $u, v \in V$ равно длине кратчайшего пути в G , соединяющего u и v . Если такого пути нет, мы полагаем $\rho(u, v) = \infty$. Для $A \subset V$ и $r > 0$

обозначим $V(A, r)$ r -окрестность A , т.е.

$$V(A, r) = \{v \in V : \rho(A, v) \leq r\} = \bigcup_{a \in A} \{v \in V : \rho(a, v) \leq r\},$$

и пусть $G(A, r)$ обозначает субгиперграф G , индуцированный $V(A, r)$.

ЛЕММА 1.4. Пусть $k \geq 2$ и $G = (V, \mathcal{M})$ — k -равномерный гиперграф, $A \subset V$ и $r \geq 1$. Если $g(G) \geq |A|(2r + 1)$, то $G(A, r)$ не содержит циклов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно предполагать, что $G = G(A, r)$ и что этот гиперграф связный, так как в противном случае мы можем уменьшить A . Зафиксируем $a \in A$ и для каждого b , удовлетворяющего $\rho(a, b) \leq 2r + 1$, выберем кратчайший путь между a и b . Продолжаем по индукции: если точки в $B \subset A$ уже были “присоединены” к a и $\rho(B, c) \leq 2r + 1$ для некоторого $c \in A \setminus B$, то выбираем путь длины не более $2r + 1$, соединяющий c с некоторой $b \in B$. Обозначим через $\mathcal{E}$ набор всех ребер в выбранных путях и $\tilde{A} = \bigcup_{M \in \mathcal{E}} M$. Любая пара точек в $\tilde{A}$ соединена между собой некоторым путем, проходящим лишь по ребрам $\mathcal{E}$. Поскольку мы выбрали $|A| - 1$ путей, причем длина каждого не превышает $2r + 1$, то $|\mathcal{E}| \leq (|A| - 1)(2r + 1)$. Это означает, что нет таких циклов, вершины которых находились бы только в $\tilde{A}$. В самом деле, для этого в $\mathcal{E}$ слишком мало ребер. Если бы существовали $u, v \in \tilde{A}$, $u \neq v$ и $M \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{E}$ такие, что $u, v \in M$, то M вместе с путем между u и v в $\mathcal{E}$ составили бы цикл длины не больше $(|A| - 1)(2r + 1) + 1 < g(G)$, что невозможно.

Допустим, что G содержит цикл $C = v_1, M_1, v_2, \dots, v_j, M_j, v_1$. Пусть P_i обозначает путь между v_i и $a_i \in \tilde{A}$, на котором реализуется расстояние $\rho(v_i, \tilde{A}) \leq r$, и $Q_{i,j}$ — кратчайший путь в $\mathcal{E}$ между a_i и a_j . Можно считать, что v_1 — наиболее удаленная вершина в C от $\tilde{A}$. Тогда $v_1 \notin \tilde{A}$, и потому $M_1, M_j \notin \mathcal{E}$. Поскольку P_1 — кратчайший путь от v_1 до $\tilde{A}$, он не может использовать сразу оба ребра M_1 и M_j ; допустим, что он не проходит по M_1 . Тогда P_1 вместе с $Q_{1,2}, P_2$ и M_1 составляют k -равномерный связный гиперграф H . Обозначим через w число вершин и через e число ребер в H . Поскольку $e \leq |A|(2r + 1) < g(G)$, то гиперграф H не содержит циклов и $w = (k - 1)e + 1$ (см. [4; с. 392]). Удалим из H ребро M_1 и все те вершины последнего, которые не содержатся ни в каком ином ребре H ; тогда получится k -равномерный гиперграф H' с w' вершинами и $e' = e - 1$ ребрами. Поскольку $\rho(v_2, \tilde{A}) \leq \rho(v_1, \tilde{A})$, если M_1 содержится в P_2 , то это ребро самое первое. Далее, пути P_1 и $Q_{1,2}$ не проходят по M_1 , и потому H' остается связным, причем $w' = (k - 1)e' + 1$ (см. [4]). Далее, из вершин M_1 заведомо v_1 , а также v_2 или вторая вершина P_2 остаются в H . Следовательно, $w - (k - 2) \leq w'$. В итоге получаем

$$(k - 1)(e - 1) + 2 = w - (k - 2) \leq w' = (k - 1)(e - 1) + 1,$$

т.е. противоречие.

Заметим, что в применении к доказательству теоремы 2.2 приведенные рассуждения значительно более прозрачны в случае $k = 2$ и $|A| = 1$.

2. k -координатно-выпуклые множества. Пусть $K = \text{conv}\{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_d\}$, и пусть $Q = [-1, 1]^d$ — наименьший параллелепипед с осями, параллельными координатным осям, который содержит K . Тогда в евклидовой метрике $\text{diam } Q = 2\sqrt{d} = \sqrt{d} \text{diam } K$. Это вызвало у нас интерес к решению задачи, может ли вообще возрастать, при возрастании размерности d , отношение диаметра

наименьшего “упаковывающего параллелепипеда” к диаметру содержащейся в нем так называемой 2-(координатно)-выпуклой оболочки некоторого множества $A \subset \mathbb{R}^d$. Теорема 2.2 показывает, что это и в самом деле так. Читателю, задавшемуся вопросом, что послужило мотивом для доказательства этой теоремы, рекомендуем сначала ознакомиться с предложениями 2.3 и 2.4. В них построены простые примеры семейств таких множеств, для которых названное отношение диаметров остается ограниченным, и из этих примеров можно извлечь общую идею о том, какое условие надо нарушить, чтобы сделать отношение большим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$, где $d \in \mathbb{N}$. Мы говорим, что K является k -выпуклым для некоторого $k \in [d]$, если в $\mathbb{R}^d$ существуют такие замкнутые аффинные полупространства H_α , что нормаль к каждому из них имеет не более k ненулевых координат и что $K = \bigcap H_\alpha$. Для данного множества $A \subset \mathbb{R}^d$ обозначим $k\text{-conv } A$ наименьшее k -выпуклое множество, содержащее A .

Очевидно, что $1\text{-conv } A$ – это наименьший параллелепипед с осями, параллельными осям координат, который содержит A , а $d\text{-conv } A$ – замкнутая выпуклая оболочка A . По мере возрастания k множества $k\text{-conv } A$ все ближе и ближе подходят к $\overline{\text{conv}} A$.

Если мы сгруппируем полупространства H_α в соответствии с k -наборами определяющих координат, то станет ясно, что множество K k -выпукло тогда и только тогда, когда оно является пересечением цилиндров, каждый из которых имеет замкнутое выпуклое основание в подпространстве $\mathbb{R}^d$, натянутом на k координатных векторов.

Для $\mathcal{J} \subset [d]$ обозначим $Z_{\mathcal{J}} = \text{span}\{e_i : i \in \mathcal{J}\}$ и $P_{\mathcal{J}}$ проекцию на $Z_{\mathcal{J}}$. Для $D \subset Z_{\mathcal{J}}$ обозначим $\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^d : P_{\mathcal{J}}x \in D\}$ цилиндр с основанием D .

В этих обозначениях множество K является k -выпуклым тогда и только тогда, когда найдутся такие замкнутые выпуклые множества $D_{\mathcal{J}} \subset Z_{\mathcal{J}}$, что

$$K = \bigcap_{\mathcal{J} \in \binom{[d]}{k}} \tilde{D}_{\mathcal{J}}.$$

Поскольку $P_{\mathcal{J}}(K) \subset D_{\mathcal{J}}$, то для k -выпуклых множеств мы имеем также

$$K = \bigcap_{\mathcal{J} \in \binom{[d]}{k}} \widetilde{P_{\mathcal{J}}(K)}.$$

Это означает, что если $x \in \mathbb{R}^d$, то $x \in K$ тогда и только тогда, когда $P_{\mathcal{J}}(x) \in P_{\mathcal{J}}(K)$ для всех $\mathcal{J} \in \binom{[d]}{k}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Для любого $1 \leq p < \infty$, $k \geq 2$ и $R > 1$ существует $d \in \mathbb{N}$ и симметрическое k -выпуклое множество $K \subset \ell_p^d$ такое, что

$$R \text{diam } K < \text{diam } (k-1)\text{-conv } K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = 2(R(k-1))^p$, $r = 2R(k-1)$ и $\varepsilon = 1/r$. Согласно теореме 1.1 найдется $d \in \mathbb{N}$ и k -равномерный гиперграф $G = ([d], \mathcal{M})$ такие, что $\alpha(G) < d/(2m)$ и $g(G) > 3(k-1)r$. Для $M \in \binom{[d]}{k}$ положим $Q_M = \{x \in \mathbb{R}^d :$

$|x_i| \leq 1$ для всех $i \in M$, и пусть

$$K_M = \begin{cases} Q_M, & \text{если } M \notin \mathcal{M}, \\ Q_M \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \left| \sum_{i \in M} x_i \right| \leq (k-1)\varepsilon \right\}, & \text{если } M \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

Положим

$$K = \bigcap_{M \in \binom{[d]}{k}} K_M.$$

Ясно, что $K \subset [-1, 1]^d$ и что это симметрическое k -выпуклое множество. Мы докажем, что

$$w := \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^d e_i \in (k-1)\text{-conv } K \quad (1)$$

и что для всякого $x \in K$ выполняется оценка $\|x\| \leq d^{1/p}/R(k-1)$. Тем самым, теорема будет доказана.

Чтобы доказать (1), нам нужно для любого $A \in \binom{[d]}{k}$ найти такую $z \in K$, что $z_n = 1/(k-1)$ для всех $n \in A$. Мы найдем ее следующим образом. Поскольку $g(G) > 3(k-1)r$, то по лемме 1.4 $G(A, r)$ не содержит циклов. Применим лемму 1.3 к $G(A, r)$ и $a_j = 1/(k-1)$ для $j \in A$; в результате получим $|a_i| \leq 1$ для всех $i \in V(A, R)$, так что $\sum_M a_j = 0$ для всех тех $M \in \mathcal{M}$, для которых $M \subset V(A, R)$. Положим

$$z_i = \begin{cases} a_i(1 - \varepsilon\rho(A, i)), & \text{если } i \in V(A, r), \\ 0, & \text{если } i \in [d] \setminus V(A, r), \end{cases}$$

где ρ – расстояние, заданное G . Поскольку $\varepsilon r = 1$, то $|z_i| \leq 1$ для всех i . Отметим, что если G – граф и $A = \{n\}$ для некоторого $n \in [d]$, то можно написать явно

$$z_i = \begin{cases} (-1)^{\rho(n, i)}(1 - \varepsilon\rho(n, i)), & \text{если } i \in V(n, r), \\ 0, & \text{если } i \in [d] \setminus V(n, r). \end{cases}$$

Чтобы проверить, что $z \in K$, рассмотрим некоторое $M \in \mathcal{M}$. Если $i, j \in M$, то ясно, что

$$|\rho(A, i) - \rho(A, j)| \leq 1.$$

Если $M \subset V(A, r)$, то обозначим через N множество тех $i \in M$, которые удалены от A на большее расстояние D . Тогда

$$\left| \sum_{i \in M} z_i \right| = \left| \sum_{i \in M} a_i(1 - \varepsilon\rho(A, i)) \right| = \left| (1 - \varepsilon D) \sum_{i \in M} a_i + \varepsilon \sum_{i \in M \setminus N} a_i \right| \leq 0 + \varepsilon(k-1).$$

Если $M \subset [d] \setminus V(A, r)$, то

$$\sum_{i \in M} z_i = \sum 0 = 0.$$

Если M пересекает и $V(A, r)$, и его дополнение, то для $i \in M$ имеем $\rho(A, i) \subset \{r, r+1\}$. Следовательно, $z_i = 0$ или $z_i = a_i(1 - \varepsilon r) = 0$ и $\sum_{i \in M} z_i = 0$.

Пусть теперь $x \in K$ произвольная. Пусть $W = \{i \in [d] : |x_i| > \varepsilon\}$ обозначает множество “больших” координат x . Мы утверждаем, что

$$|W| < \frac{d}{m}. \quad (2)$$

Тогда

$$\|x\| \leq \left(\frac{d}{m} + \left(d - \frac{d}{m} \right) \varepsilon^p \right)^{1/p} \leq d^{1/p} \left(\frac{1}{2R^p(k-1)^p} + \frac{1}{(2R(k-1))^p} \right)^{1/p} \leq \frac{d^{1/p}}{R(k-1)}.$$

Итак, чтобы завершить доказательство, осталось проверить (2). Разобьем W на две части W_+, W_- следующим образом:

$$W_{\pm} = \{i \in W : \operatorname{sgn} x_i = \pm 1\}.$$

Если мы допустим, что оценка (2) неверна, то размер одного из этих множеств, скажем W_+ , не меньше $d/(2m)$. Тогда оно не может быть независимым в G и найдется $M \in \binom{W_+}{k} \cap \mathcal{M}$. Это ведет к противоречию, поскольку получается, что

$$k\varepsilon < \sum_{i \in M} x_i \leq (k-1)\varepsilon.$$

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – ограниченное, симметрическое и выпуклое множество, $r_i = \max\{x_i : x \in K\}$ и $r = \max r_i$. Тогда $K \subset Q := \prod_{i=1}^d [-r_i, r_i]$ и $\operatorname{diam} Q \leq 2\sqrt{d}r \leq \sqrt{d} \operatorname{diam} K$. Если же расстояние измеряется в смысле ℓ_p с $1 \leq p < \infty$, то ясно, что $\operatorname{diam} Q \leq d^{1/p} \operatorname{diam} K$, а в l_{∞} мы имеем $\operatorname{diam} Q = \operatorname{diam} K$.

Пусть заданы $k \geq 2$ и $1 \leq p < \infty$. Более внимательное рассмотрение оценок, участвующих в доказательствах теорем 1.1 и 2.2, показывает, что для каждого $d \geq 2$ существует такое k -выпуклое множество $K \subset \ell_p^d$, что

$$\frac{\operatorname{diam} (k-1)\text{-conv } K}{\operatorname{diam} K} \geq \frac{c}{k^{3p}} \cdot \frac{\log d}{\log \log d},$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Рассмотрим теперь два семейства симметрических 2-выпуклых множеств K , для которых диаметр “упаковывающего параллелепипеда” Q не превосходит утроенного диаметра K . В обоих случаях причина состоит в том, что Q имеет вершину w , для которой $w/3 \in K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $1 \leq p < \infty$ и A – ограниченное подмножество положительного конуса в ℓ_p^d , $K = 2\text{-conv}(A \cup -A)$. Тогда $\operatorname{diam} 1\text{-conv } K \leq 2 \operatorname{diam} K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что A – замкнутое множество. Положим

$$Q := 1\text{-conv } K = \prod_{i=1}^d [-a_i, a_i].$$

Мы докажем, что для вершины $w = (a_1, a_2, \dots, a_d)$ параллелепипеда Q выполнено $w/2 \in K$. Пусть $\{i, j\} \in \binom{[d]}{2}$. Тогда $P_{i,j}Q$ – это прямоугольник $[-a_i, a_i] \times [-a_j, a_j]$ в $Z_{i,j}$ и $w_{i,j} := P_{i,j}(w) = a_i e_i + a_j e_j$. Поскольку координаты всех точек в A неотрицательны, то найдутся такие $z_i, z_j \in A$, что $P_{i,j}(z_i) \in [a_i e_i, w_{i,j}]$ и $P_{i,j}(z_j) \in [a_j e_j, w_{i,j}]$.

Поскольку K симметрическое, то отсюда очевидно, что $w_{i,j}/2 \in P_{i,j}(K)$. Следовательно, $w/2 \in K$, а так как $\text{diam } Q = 2\|w\|$, то, тем самым, наше неравенство доказано.

Рассмотрим еще одно 2-выпуклое множество, очень похожее на то, которое использовалось в доказательстве теоремы 2.2. Однако здесь интересующее нас отношение диаметров оказывается ограниченным числом 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $A \in \ell_p^d$ – такое симметрическое множество, что $x_i \in \{0, \pm 1\}$ для всех $x \in A$ и $i \in [d]$. Пусть $K = 2\text{-conv } A$. Тогда $\text{diam } 1\text{-conv } K \leq 3 \text{diam } K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрасывая координаты, где все $x \in A$ обращаются в нуль, мы можем считать, что $1\text{-conv } A = Q := [-1, 1]^d$. Чтобы установить наше неравенство, достаточно показать, что в Q найдется такая вершина w , что $w/3 \in K$.

Пусть $\{i, j\} \in \binom{[d]}{2}$. Существует только десять разновидностей $P_{i,j}(K)$. Это может быть квадрат $[-1, 1]^2$, или квадрат с вершинами $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 1)$, или один из пары шестиугольников, содержащих этот квадрат, или один из четырех параллелепипедов, у которых одна диагональ обязательно общая с $[-1, 1]^2$, а другая диагональ – это отрезок $[-1, 1]$ на i -й или j -й оси координат. Или, наконец, $P_{i,j}(K)$ может совпасть с одной из двух диагоналей $[-1, 1]^2$. В первой восьмерке случаев элементарные свойства медиан треугольников влекут, что $P_{i,j}(x/3) \in P_{i,j}(K)$ для любой вершины x параллелепипеда Q . В оставшихся двух случаях это, конечно, не всегда так, и мы должны осуществить выбор w с определенной осторожностью. Положим

$$E = \left\{ \{i, j\} \in \binom{[d]}{2} : P_{i,j}(K) \text{ является диагональю } [-1, 1]^2 \right\}.$$

Ясно, что $\{i, j\} \in E$ в точности тогда, когда существует такая $\alpha_{i,j} \in \{-1, 1\}$, что если $x \in A$ произвольная, то либо $x_i x_j = \alpha_{i,j}$, либо $x_i = x_j = 0$. Мы ищем в Q такую вершину w , что $w_i w_j = \alpha_{i,j}$ для всех $\{i, j\} \in E$. Рассмотрим граф $G = ([d], E)$. Утверждается, что каждая компонента $H = (V_H, E_H)$ графа G есть полный граф такой, что найдется такая $w^H \in A$, что

$$w_i^H w_j^H = \alpha_{i,j} \quad \text{для всех } \{i, j\} \in E_H$$

и что если $z \in A$, то либо z обращается в нуль на V_H , либо $z = w^H$ или $z = -w^H$ на V_H . Чтобы определить нужную w , мы после этого просто положим $w_i = w_i^H$ для $i \in V_H$.

Для доказательства этого утверждения обозначим через $P = (V_P, E_P)$ путь в G , соединяющий пару вершин $m, n \in [d]$ по ребрам $f_1, \dots, f_k$, где $f_i = \{j_i, j_{i+1}\}$ и $j_1 = m, j_{k+1} = n$. Если $z \in A$ и $z_m = 0$, то по определению E мы также имеем

$$z_m = z_{j_1} = z_{j_2} = \dots = z_{j_{k+1}} = z_n = 0.$$

Если $z_m \neq 0$, то $z_{j_i} z_{j_{i+1}} = \alpha_{f_i}$ для $i = 1, \dots, k$ и, следовательно,

$$z_m z_n = \prod_{i=1}^k \alpha_{f_i}.$$

Это означает, что для любой компоненты $H = (V_H, E_H)$ графа G и любой $m \in V_H$ значения $z \in A$ на V_H полностью определены значением z_m . Более того, если $z_m \neq 0$,

то для любых $i, j \in V_H$ и троп $P_i = (V_{P_i}, E_{P_i})$, $P_j = (V_{P_j}, E_{P_j})$, ведущих от i и j к m , мы имеем

$$z_i z_j = z_m z_i z_m z_j = \prod_{f \in E_{P_i}} \alpha_f \prod_{f \in E_{P_j}} \alpha_f$$

и, следовательно, H – полный граф. Чтобы определить w^H , мы фиксируем некоторую $m \in V_H$ и выбираем $w^H \in A$, для которой $w_m^H \neq 0$.

3. Сжимаемые множества. В предыдущем пункте мы определили 2-выпуклые подмножества в ℓ_p^d . Точно так же можно определить эти множества и в ℓ_p . Пусть $1 \leq p < \infty$. Множество $K \subset \ell_p$ называется *2-выпуклым*, если оно является пересечением полупространств вида $ax_i + bx_j \leq c$.

Подмножество A банахова пространства X называется *сжимаемым*, если существует 1-липшицева ретракция $r: X \rightarrow A$. Последнее означает, что $r(x) = x$ для всех $x \in A$ и $\|r(x) - r(y)\| \leq \|x - y\|$ для всех $x, y \in X$.

Если $1 < p < \infty$ и $p \neq 2$, то множество $K \subset \ell_p$ сжимаемо тогда и только тогда, когда оно 2-выпукло [1]–[3].

Пусть $K \subset c_0$ – компактное множество. Тогда, как известно, существует такая $z \in c_0$, что $|x_i| \leq z_i$ для всех $x \in K$ и $i \in \mathbb{N}$. В обозначениях п. 2 это значит, что всякое компактное множество содержится в некотором 1-выпуклом компактном множестве. Мы стали изучать отношение $\text{diam } 1\text{-conv } A / \text{diam } 2\text{-conv } A$ в надежде, что в пространствах ℓ_p , по крайней мере, компактные сжимаемые множества обладают указанным свойством с $z \in \ell_p$. Из теоремы 2.2 следует, что эта надежда не оправдывается. Следующее утверждение можно рассматривать как бесконечномерный вариант теоремы 2.2: в пространстве ℓ_p существует такое 2-выпуклое компактное множество K , что $1\text{-conv } K$ неограничено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $1 \leq p < \infty$. Тогда существует такое компактное сжимаемое множество $K \subset \ell_p$, что ни для какого $z \in \ell_p$ соотношения $|x_i| \leq z_i$ не могут быть выполнены сразу для всех $x \in K$ и $i \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $k = 2$ и $R_n = n$ определим d_n и K_n в соответствии с теоремой 2.2. Применяя шкалирование, мы можем предполагать, что $\text{diam } K_n = 2/n^{1+1/p}$. Напишем

$$\ell_p = \ell_p^{d_1} \oplus_p \ell_p^{d_2} \oplus_p \dots$$

и положим $K = \prod_{n=1}^{\infty} K_n$. Тогда ясно, что K – это 2-выпуклое множество, а потому оно является сжимаемым. Множество K также и компактно, потому что если $x \in K$, то норма проекции x на $\ell_p^{d_m} \oplus_p \ell_p^{d_{m+1}} \oplus_p \dots$ равномерно ограничена величиной

$$\left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \right)^{1/p} < \infty.$$

Выберем $w^n \in 1\text{-conv } K_n$ так, что $\|w^n\| = n \text{ diam } K_n / 2 = 1/n^{1/p}$. Пусть $z \in c_0$ такая, что $|x_i| \leq z_i$ для всех $x \in K$ и $i \in \mathbb{N}$. Тогда $z \geq \|w^n\|$ на координатах, соответствующих n -му блоку ℓ_p . Поэтому

$$\|z\|_p^p \geq \sum \left(\frac{1}{n^{1/p}} \right)^p = \sum \frac{1}{n} = \infty.$$

Заметим, что сжимаемые множества, которые содержат единичный шар пространства ℓ_p в конечномерном случае обязательно имеют большой диаметр, а в бесконечномерном они неограничены.

ЛЕММА 3.2. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, и B – единичный шар в $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\} \subset \ell_p$. Если K – такое сжимаемое множество, что $B \subset K$, то $\text{diam } K \geq n^{1/p}/2^{1/p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что

$$z = \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{2^{1/p}} \in K.$$

Поскольку $B \subset K$, а K 2-выпуклое, то достаточно проверить, что $P_{i,j}(z) \in P_{i,j}(B)$ для всех $1 \leq i < j \in \mathbb{N}$. Если $i \leq n$, то $P_{i,j}(B)$ – это одномерный или двумерный единичный шар, а так как $\|P_{i,j}(z)\| \leq 1$, то в этом случае ясно, что $P_{i,j}(z) \in P_{i,j}(B)$. Если же $n < i$, то $P_{i,j}(z) = P_{i,j}(B) = 0$.

Так как метрическая проекция на любое замкнутое выпуклое подмножество гильбертова пространства является 1-липшицевым отображением, то все замкнутые выпуклые подмножества ℓ_2 сжимаемы. Семейство всех сжимаемых подмножеств в ℓ_1 содержит все 2-выпуклые множества, но оно строго шире. Согласно результату [6] подмножество A в ℓ_1 сжимаемо тогда и только тогда, когда оно метрически выпукло по отношению к норме и является пересечением некоторого семейства замкнутых цилиндров, каждый из которых имеет (не обязательно выпуклое) 2-мерное основание в $\text{span}\{e_i, e_j\}$.

Подмножество C банахова пространства X называется *оптимальным*, если для всякой $x \in X \setminus C$ найдется такая $y \in X$, $y \neq x$, что

$$\|y - z\| \leq \|x - z\| \quad \text{для всех } z \in C.$$

Пусть отображение $f: X \rightarrow X$ 1-липшицево и $\text{fix } f$ обозначает множество неподвижных точек f . Если $\text{fix } f$ – непустое множество, то оно оптимальное. В самом деле, если $x \in X \setminus \text{fix } f$ и $z \in \text{fix } f$, то $f(x) \neq x$ и

$$\|f(x) - z\| = \|f(x) - f(z)\| \leq \|x - z\|.$$

Множество $K \subset \ell_p$, $1 < p < \infty$, оптимально тогда и только тогда, когда оно сжимаемо [2], [7].

Теперь мы построим компактные множества, которые не содержатся ни в одном компактном сжимаемом множестве. Интерес к этому происходит из проблемы Плато о построении минимальных поверхностей [8]. Спрашивается, для любой ли границы B , содержащейся в некотором компактном подмножестве банахова пространства X , существует минимальная поверхность с этой границей? Амброзио и Кирхгейм доказали, что это так, если X – это $C(K)$ -пространство. Они построили минимальную поверхность, удерживая минимизирующую последовательность “поверхностей” с границей B , так называемые потоки, внутри некоторого компакта K с тем, чтобы обеспечить сходимость. Это возможно, поскольку B содержится в компактном сжимаемом множестве. Произвольная минимизирующая последовательность может быть сжата в K применением 1-липшицевой ретракции. Следующее предложение показывает, что такой подход, к сожалению, не всегда применим.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Тогда существует компакт $C \subset \ell_p$ такой, что если $C \subset K$ и K – сжимаемое множество, то K неограниченно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $r_k > 0$ так, что $\sum r_k^p < \infty$, и после этого выберем $n_k \in \mathbb{N}$, $n_0 = 0$, так, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k n_k^{1/p} = \infty.$$

Обозначим B_k единичный шар в n_k -мерном подпространстве $\text{span}\{e_i : i \in I_k\}$ пространства ℓ_p , где

$$I_k = \left\{ i \in \mathbb{N} : \sum_{m < k} n_m < i \leq \sum_{m \leq k} n_m \right\}.$$

Пусть C – это ниточка n_k -мерных бусин $r_k B_k$ в ℓ_p , т.е. (с небольшим искажением в обозначении)

$$C = \prod_{k=1}^{\infty} r_k B_k = \left\{ x \in \ell_p : \sum_{i \in I_k} |x_i|^p \leq r_k^p \text{ для всех } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Поскольку $\sum r_k^p < \infty$, то C – компакт. Допустим, что множество $K \supset C$ сжимаемое. Так как $r_k B_k \subset K$, то из леммы 3.2 следует, что $\text{diam } K \geq r_k n_k^{1/p}/2$, и потому $\text{diam } K = \infty$.

Если X – дуальное банахово пространство, то обобщенная проблема Плато может быть решена в X [8], [9]. Здесь сходимость минимизирующей последовательности обеспечивается w^* -компактностью. Сейчас мы видоизменим пример из предложения 3.3 для неддуальных пространств. Тем самым, будет показано, что в классе сепарабельных неддуальных пространств известные методы решения проблемы Плато недостаточны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Существует такое неддуальное банахово пространство X и компактное множество $C \subset X$, что если $C \subset K$ и K сжимаемое, то K неограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $p \neq 2$, $1 < p < \infty$. Выберем $r_k > 0$ и $n_k \in \mathbb{N}$ так, что

$$\lim r_k = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} r_k n_k^{1/p} = \infty.$$

Положим

$$X = \ell_p^{n_1} \oplus \ell_p^{n_2} \oplus \ell_p^{n_3} \oplus \dots,$$

где ‘ $\oplus$ ’ обозначает c_0 -сумму по отношению к норме

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|x_k\|}{2^k}.$$

Так как X сепарабельное и содержит c_0 , то это пространство неддуальное (см., например, [10; с. 114]). Обозначим через B_k единичный шар k -го блока $X_k \cong \ell_p^{n_k}$

пространства X и через P_k проекцию на X_k . Тогда P_k – 1-липшицево отображение. Вновь определим C как ниточку n_k -мерных бусин $r_k B_k$, но в этот раз уже в пространстве X . Иными словами (опять с небольшим искажением в обозначении),

$$C = \prod_{k=1}^{\infty} r_k B_k = \{x \in X : P_k(x) \in r_k B_k \text{ для всех } k \in \mathbb{N}\}.$$

Так как $\lim r_k = 0$, то C – компакт. Допустим, что $K \supset C$ – сжимаемое множество, а $r: X \rightarrow K$ – соответствующая 1-липшицева ретракция. Отображение $f_k: X_k \rightarrow X_k$, определяемое как $f_k(x) = P_k(r(x))$, является 1-липшицевым, и при этом $r_k B_k \in \text{fix } f_k$. Заметим, что $\text{fix } f_k \subset K$. В самом деле, если $x \in \text{fix } f_k$ и $r(x) \in X_k$, то $x = P_k(r(x)) = r(x) \in K$. Если $x \in X_k$ и $r(x) \in X \setminus X_k$, то $\|f_k(x)\| < \|r(x)\| \leq \|x - 0\|$, а потому $x \notin \text{fix } f_k$. Множество неподвижных точек $\text{fix } f_k$ является оптимальным подмножеством $X_k \cong \ell_p^{n_k}$ и поэтому сжимаемо (см. [7]). Поскольку

$$\text{diam } K \geq \text{diam } \text{fix } f_k \geq \frac{r_k n_k^{1/p}}{2}$$

в силу леммы 3.2, то получаем $\text{diam } K = \infty$.

Автор выражает большую признательность Р. Хольцману и В. Мюллеру за обучение некоторым аспектам теории графов. Большое спасибо К.И. Осколкову за перевод статьи на русский язык.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Hetzelt, *Über die beste Coapproximation in $\mathbb{R}^n$* , Dissertation, University of Erlangen-Nürnberg, 1981.
- [2] W. J. , P. Enflo, “Contractive projections on ℓ_p spaces”, *Analysis at Urbana*, vol. I (Urbana, IL, 1986–1987), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **137**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989, 151–161.
- [3] P. Enflo, “Contractive projections onto subspaces of L^p spaces”, *Function spaces* (Edwardsville, IL, 1990), Lecture Notes in Pure Appl. Math., **136**, 1992, 79–95.
- [4] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North-Holland Mathematical Library, **6**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1976.
- [5] P. Erdős, “Graph theory and probability”, *Canad. J. Math.*, **11** (1959), 34–38.
- [6] U. Westphal, “Contractive projections on ℓ^1 ”, *Constructive Approximation*, **8**:2 (1992), 223–231.
- [7] B. Beauzami, “Projections contractantes dans les espaces de Banach”, *Bull. Sci. Math.* (2), **102**:1 (1978), 43–47.
- [8] L. Ambrozio, A. Kirchheim, “Currents in metric spaces”, *Acta Math.*, **185**:1 (2000), 1–80.
- [9] S. Wenger, “Isoperimetric inequalities of Euclidean type in metric spaces”, *Geom. Funct. Anal.*, **15**:2 (2005), 534–554.
- [10] Y. Benjamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Non-Linear Functional Analysis*, vol. 1, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **48**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

Е. Копецка

Mathematical Institute, Czech Academy of Sciences,
Prague, Czech Republic
Institut für Mathematik, Johannes Kepler Universität,
Linz, Austria
E-mail: eva@bayou.uni-linz.ac.at

Поступило
27.06.2006