Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Кореновский, Об обратном неравенстве Гёльдера,
Матем. заметки, 2007, том 81, выпуск 3, 361–373

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3679>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:10:39

Об обратном неравенстве Гёльдера

А. А. Кореновский

Получены точные положительный и отрицательный показатели суммируемости функции, удовлетворяющей обратному весовому неравенству Гёльдера по параллелепипедам.

Библиография: 17 названий.

1. Введение. Все рассматриваемые в работе функции неотрицательные на параллелепипеде $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, стороны которого параллельны координатным осям (только такие параллелепипеды и кубы рассматриваются в дальнейшем). Пусть абсолютно непрерывная на R_0 мера $d\mu(x) = w(x) dx$, где неотрицательная весовая функция w суммируема на R_0 . Согласно неравенству Гёльдера на параллелепипеде $R \subset R_0$, для ненулевых чисел $\alpha < \beta$ и функции f выполняется неравенство

$$\left\{ \frac{1}{\mu(R)} \int_R f^\alpha(x) d\mu(x) \right\}^{1/\alpha} \leq \left\{ \frac{1}{\mu(R)} \int_R f^\beta(x) d\mu(x) \right\}^{1/\beta}.$$

Через $RH_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$ обозначим класс всех функций f , удовлетворяющих обратному неравенству Гёльдера

$$\left\{ \frac{1}{\mu(R)} \int_R f^\beta(x) d\mu(x) \right\}^{1/\beta} \leq B \cdot \left\{ \frac{1}{\mu(R)} \int_R f^\alpha(x) d\mu(x) \right\}^{1/\alpha} \quad (1.1)$$

равномерно по всем параллелепипедам $R \subset R_0$, т.е. постоянная $B > 1$ не зависит от R . В случае, когда условие (1.1) предполагается выполненным лишь только по всевозможным кубам Q , содержащимся в фиксированном кубе $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$, соответствующий класс функций f будем обозначать через $\widetilde{RH}_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$. Ясно, что $RH_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B) \subset \widetilde{RH}_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$, и нетрудно показать, что при $d \geq 2$ это вложение строгое.

При $q > 1$ класс $\widetilde{RH}_{dx}^{1,q}(B) \equiv G_q(B)$ называется *классом Геринга*, а при $p > 1$ $\widetilde{RH}_{dx}^{-1/(p-1),1}(B) \equiv A_p(B)$ – *классом Макенхаупта*. Эти классы применяются в теории весовых пространств, квазиконформных отображений и в других вопросах. Фундаментальные свойства классов Геринга и Макенхаупта содержатся в следующей теореме (см. [1]–[3]).

Работа выполнена при частичной поддержке ДФФД Украины, грант № Ф7/329-2001.

ТЕОРЕМА А. а) Для любых $q > 1$, $B > 1$ найдутся $q_1 \equiv q_1(q, B, d) > q$ и $p_1 \equiv p_1(q, B, d) > 1$ такие, что вложения

$$G_q(B) \subset G_{q'}(B_1), \quad (1.2)$$

$$G_q(B) \subset A_{p'}(B_2) \quad (1.3)$$

справедливы при всех $q < q' < q_1$, $p' > p_1$, где $B_1 \equiv B_1(q, B, q', d)$, $B_2 \equiv B_2(q, B, p', d)$.

б) Для любых $p > 1$, $B > 1$ найдутся $p_2 \equiv p_2(p, B, d) < p$ ($p_2 > 1$) и $q_2 \equiv q_2(p, B, d) > 1$ такие, что вложения

$$A_p(B) \subset A_{p''}(B_3), \quad (1.4)$$

$$A_p(B) \subset G_{q''}(B_4) \quad (1.5)$$

справедливы при всех $p'' > p_2$, $1 < q'' < q_2$, где $B_3 \equiv B_3(p, B, p'', d)$, $B_4 \equiv B_4(p, B, q'', d)$.

Вложения (1.2) и (1.4) устанавливают так называемое свойство “самоулучшения показателей” классов Геринга и Макенхаупта, а (1.3) и (1.5) показывают связь этих классов друг с другом. Изучению свойств, отраженных в теореме А, посвящено большое число работ различных авторов. Так, в работах [4]–[6] найдено точное асимптотическое поведение $q_1(q, B, d)$ при $B \rightarrow 1 + 0$. Для подкласса из $G_q(B)$, состоящего из невозрастающих функций одной переменной, наибольшее значение $q_1(q, B, 1)$ вычислено в работе [7]. В работе [8] показано, что при $d = 1$ для нахождения экстремальных значений p_i и q_i , $i = 1, 2$, в теореме А достаточно рассматривать только монотонные функции. Таким образом, максимальное значение $q_1(q, B, 1)$, найденное в [7] для монотонных функций, остается таким же и в общем случае. В [8] найдено также минимальное значение $p_2(p, B, 1)$. В [9] результаты работ [7] и [8] перенесены на более общий случай. Именно, в [9] показано, что в одномерном случае условие $f \in RH_{dx}^{\alpha, \beta}(B)$ влечет суммируемость функции f в степени s , где

а) $\beta \leq s < \beta_0$, если $\alpha \cdot \beta > 0$;

б) $\alpha_0 < s \leq \alpha$, если $\alpha \cdot \beta < 0$;

причем экстремальные значения β_0 в случае а) и α_0 в случае б) являются корнем уравнения

$$\left(\frac{x}{x - \beta} \right)^{1/\beta} = B \cdot \left(\frac{x}{x - \alpha} \right)^{1/\alpha}.$$

Этот результат, по существу, является естественным обобщением точных вложений (1.2) и (1.4) при $d = 1$. Далее, в [10] доказан весовой аналог вложения (1.2) с максимальным показателем $q_1(q, B, 1)$ и, как следствие, получено вложение (1.4) с минимальным показателем $p_2(p, B, 1)$. Наилучшие значения $p_1(q, B, 1)$ и $q_2(p, B, 1)$ во вложениях (1.3) и (1.5) соответственно найдены в [11], [12]. В [13] для вложений (1.4) и (1.5) найдены не только экстремальные показатели $p_2(p, B, 1)$ и $q_2(p, B, 1)$, но и наилучшие значения постоянных B_3 и B_4 .

Таким образом, в одномерном случае экстремальные значения p_i и q_i , $i = 1, 2$, в теореме А известны для всех вложений (1.2)–(1.5). Используя эти результаты, при $d = 1$ нетрудно найти максимально возможные “улучшения” каждого из показателей во вложении класса $RH_{dx}^{\alpha, \beta}(B)$ в другой класс $RH_{dx}^{\alpha', \beta'}(B')$. Следует, однако, заметить, что в упомянутых выше работах способы нахождения экстремальных показателей существенно различаются. В самом деле, в [7]–[10] доказательства основаны

на применении различных вариантов неравенств Харди, в [11], [12] производится сравнение заданной функции с предполагаемой экстремальной функцией, а в [13] доказательство базируется на использовании функции Беллмана. В данной работе осуществлен единый подход для исследования вложений класса $RH_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$, не зависящем от знаков его параметров α и β и притом в многомерном случае. Именно, как в [8], точная оценка равноизмеримой перестановки функции (см. теорему В в п. 3) позволяет свести задачу к случаю монотонной функции одной переменной. Затем, как в [7] и в последующих работах [8]–[10], применяя соответствующие весовые аналоги неравенств Харди, мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $d \geq 1$, неотрицательная функция f принадлежит классу $RH_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$ при некоторых $\alpha < \beta$, $\alpha \cdot \beta \neq 0$, и $B > 1$. Тогда для любого $\gamma \in (-\infty, \min(0, \alpha)) \cup (\max(0, \beta), +\infty)$ такого, что

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha} > B \cdot \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)^{1/\beta}, \quad (1.6)$$

найдутся положительные постоянные $B' \equiv B'(\alpha, \beta, B, \gamma)$ и $B'' \equiv B''(\alpha, \beta, B, \gamma)$, для которых неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{B'} \left\{ \frac{1}{\mu(R)} \int_R f^\alpha(x) d\mu(x) \right\}^{1/\alpha} &\leq \left\{ \frac{1}{\mu(R)} \int_R f^\gamma(x) d\mu(x) \right\}^{1/\gamma} \\ &\leq B'' \left\{ \frac{1}{\mu(R)} \int_R f^\beta(x) d\mu(x) \right\}^{1/\beta} \end{aligned} \quad (1.7)$$

справедливо для любого параллелепипеда $R \subset R_0$. Если же $d\mu(x) = dx$ и число $\gamma \in (-\infty, \min(0, \alpha)) \cup (\max(0, \beta), +\infty)$ не удовлетворяет условию (1.6), то одно из двух неравенств (1.7) теряет силу, а именно: при $\gamma < \alpha$ – левое, а при $\gamma > \beta$ – правое.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для фиксированных α, β ($\alpha \cdot \beta \neq 0$, $\alpha < \beta$) рассмотрим функцию

$$\Psi_{\alpha,\beta}(\gamma) = \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)^{-1/\beta}.$$

Эта функция определена для $\gamma \in (-\infty, \min(0, \alpha)) \cup (\max(0, \beta), +\infty)$, непрерывна, строго возрастает от 1 до $+\infty$ на $(-\infty, \min(0, \alpha))$ и строго убывает от $+\infty$ до 1 на $(\max(0, \beta), +\infty)$. Поэтому уравнение $\Psi_{\alpha,\beta}(\gamma) = B$ при любом $B > 1$ имеет ровно два корня $\gamma^- < \min(0, \alpha)$ и $\gamma^+ > \max(0, \beta)$. Поскольку неравенство (1.7) при $\gamma \in [\alpha, \beta] \setminus \{0\}$ представляет собой обычное неравенство Гёльдера с постоянными $B' = B'' = 1$, теорема 1 утверждает, что условие $f \in RH_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$ влечет выполнение неравенства (1.7) для всех $\gamma \in (\gamma^-, \gamma^+) \setminus \{0\}$ и эти значения γ^- и γ^+ , вообще говоря, нельзя улучшить.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В данной работе мы не исследуем предельные случаи $-\infty, 0, +\infty$ для значений параметров α, β, γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как видно из теоремы 1, предельные положительные и отрицательные показатели суммируемости функции $f \in RH_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$ не зависят от размерности d пространства. Это объясняется тем, что условие (1.1) принадлежности

функции f классу $RH_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$ предполагается выполненным по всевозможным параллелипипедам. Нам неизвестны точные предельные показатели суммируемости функции из класса $\widetilde{RH}_{d\mu(x)}^{\alpha,\beta}(B)$ при $d \geq 2$ даже в каком-либо нетривиальном частном случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предельный положительный показатель суммируемости функции $f \in RH_{dx}^{1,\beta}(B)$ при любом $d \geq 1$ был найден в работе [14].

2. Неравенства Харди. Пусть действительные числа q, p отличны от нуля, v – весовая, т.е. неотрицательная, суммируемая на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функция. Для неотрицательной на $[a, b]$ функции g обозначим

$$\langle g \rangle_{q,p,v(t) dt, [a,b]} = \{v([a, b])\}^{-1/p} \left\{ \int_a^b (v([a, t]))^{q/p-1} g^q(t) v(t) dt \right\}^{1/q},$$

где

$$v([a, t]) = \int_a^t v(\tau) d\tau, \quad a \leq t \leq b.$$

Легко видеть, что для $r \neq 0$ справедливо равенство

$$\langle g^r \rangle_{q,p,v(t) dt, [a,b]} = \langle g \rangle_{rq, rp, v(t) dt, [a,b]}^r. \quad (2.1)$$

Для дальнейшего нам понадобится еще равенство

$$\frac{p}{p-q} [\langle g \rangle_{q,p,v(t) dt, [a,b]}^q - \langle g \rangle_{q,q,v(t) dt, [a,b]}^q] = \langle \langle g \rangle_{q,q,v(\tau) d\tau, [a, \cdot]} \rangle_{q,p,v(t) dt, [a,b]}^q, \quad (2.2)$$

справедливое для любых p и q таких, что $p \neq q$, $pq \neq 0$. Оно легко может быть установлено интегрированием по частям. Если считать, что

$$\langle \cdot \rangle_{0,0,v(t) dt, [a,b]}^0 = 1,$$

то, очевидно, равенство

$$\langle g \rangle_{q,q,g^p(t)v(t) dt, [a,b]} = \langle g \rangle_{p,p,v(t) dt, [a,b]}^{-p/q} \cdot \langle g \rangle_{q+p,q+p,v(t) dt, [a,b]}^{1+p/q} \quad (2.3)$$

справедливо для всех отличных от нуля p и q .

Следующая лемма представляет собой весовой аналог неравенства Харди [15]. При $p \geq q \geq 1$, $p > 1$ она доказана в [10]. В другом случае $p < 0$, $q < 0$ ее доказательство, как и в [10], аналогично доказательству неравенства Харди в [15].

ЛЕММА 2.1. Пусть $p \geq q \geq 1$, $p > 1$ или $p < 0$, $q < 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\langle \langle g \rangle_{1,1,v(\tau) d\tau, [a, \cdot]} \rangle_{q,p,v(t) dt, [a,b]}^q \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \langle g \rangle_{q,p,v(t) dt, [a,b]}^q. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем (2.4) в виде

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^q v(t) dt \\ & \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} g^q(t) v(t) dt. \end{aligned}$$

Для доказательства этого неравенства интегрируем по частям:

$$\begin{aligned}
& \frac{q}{p} \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^q v(\tau) d\tau \\
&= \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^q \Big|_{t=a}^{t=b} \\
&\quad + q \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^q v(t) dt \\
&\quad - q \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} g(t) \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^{q-1} v(t) dt \\
&= \left(\int_a^b v(t) dt \right)^{q/p} \left(\left(\int_a^b v(t) dt \right)^{-1} \int_a^b g(t) v(t) dt \right)^q \\
&\quad + q \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^q w(t) dt \\
&\quad - q \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} g(t) \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^{q-1} v(t) dt \\
&\geq q \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^q v(t) dt \\
&\quad - q \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} g(t) \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^{q-1} v(t) dt.
\end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство Гёльдера с показателем q и весом

$$\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} v(t),$$

получаем

$$\begin{aligned}
& q \left(1 - \frac{1}{p} \right) \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^q v(t) dt \\
&\leq q \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} g(t) \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^{q-1} v(t) dt \\
&\leq q \left\{ \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} g^q(t) v(t) dt \right\}^{1/q} \\
&\quad \times \left\{ \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) dy \right)^q v(t) dt \right\}^{1-1/q},
\end{aligned}$$

причем последнее неравенство справедливо как при $q \geq 1$, так и при $q < 0$. Так как $p \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, то $1 - 1/p > 0$ и полученное неравенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& q \left\{ \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} \left(\left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{-1} \int_a^t g(\tau) v(\tau) d\tau \right)^q v(t) dt \right\}^{1/q} \\
&\leq \frac{pq}{p-1} \left\{ \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{q/p-1} g^q(t) v(t) dt \right\}^{1/q}.
\end{aligned}$$

Разделим это неравенство на q , возведем обе части в степень q , домножим на

$$\left\{ \int_a^b v(t) dt \right\}^{-q/p}$$

и в результате получим (2.4).

Лемма доказана.

Следующая лемма представляет собой весовой вариант другого известного неравенства Харди [16]. В целях полноты изложения мы приводим здесь доказательство этого неравенства, позаимствованное из работы [10].

ЛЕММА 2.2. Пусть функция g не возрастает на $[a, b]$ и число $r \geq 1$. Тогда справедливо неравенство

$$\langle g \rangle_{r,r,v(t) dt, [a,b]} \leq \frac{1}{r} \langle g \rangle_{1,r,v(t) dt, [a,b]}. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку g^r не возрастает, то

$$g^r(t) \int_a^t v(\tau) d\tau \leq \int_a^t g^r(\tau) v(\tau) d\tau, \quad a \leq t \leq b.$$

Далее, поскольку функция

$$\psi(z) = \frac{1}{r} z^{1/r-1}$$

не возрастает на $(0, +\infty)$, из последнего неравенства вытекает

$$\frac{1}{r} \left(\int_a^t g^r(\tau) v(\tau) d\tau \right)^{1/r-1} g^r(t) v(t) \leq \frac{1}{r} \left(g^r(t) \int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{1/r-1} g^r(t) v(t).$$

Интегрируя по $[a, b]$, имеем

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \left[\left(\int_a^t g^r(\tau) v(\tau) d\tau \right)^{1/r} \right] dt \leq \frac{1}{r} \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{1/r-1} g(t) v(t) dt,$$

откуда

$$\left\{ \int_a^b g^r(\tau) v(\tau) d\tau \right\}^{1/r} \leq \frac{1}{r} \int_a^b \left(\int_a^t v(\tau) d\tau \right)^{1/r-1} g(t) v(t) dt.$$

Ясно, что это неравенство равносильно (2.5).

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим частные случаи теоремы 1 для монотонных функций одной переменной. Для функции g , заданной на отрезке $[a, b]$, условие $g \in RH_{v(t) dt}^{\alpha, \beta}(B)$ будем записывать в виде

$$\langle g \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a', b']} \leq B \cdot \langle g \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a', b']}, \quad [a', b'] \subset [a, b]. \quad (3.1)$$

Напомним, что соотношение (1.6) между параметрами в теореме 1 определяется условием

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma} \right)^{1/\alpha} > B \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} \right)^{1/\beta}. \quad (3.2)$$

ЛЕММА 3.1. Пусть ненулевые $\alpha < \beta$, функция h не возрастает на $[a, b]$ и удовлетворяет условию

$$\langle h \rangle_{\beta, \beta, v(\tau) dt, [a, t]} \leq B \cdot \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(\tau) dt, [a, t]}, \quad a \leq t \leq b. \quad (3.3)$$

Тогда для любого $\gamma > \max(0, \beta)$, удовлетворяющего условию (3.2), найдется такое B'' , что справедливо неравенство

$$\langle h \rangle_{\gamma, \gamma, v(t) dt, [a, b]} \leq B'' \cdot \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $\beta > 0$. Полагаем в (2.2) $q = \beta$, $p = \gamma$, $g = h$ и, пользуясь условием (3.3) и равенством (2.1), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{\gamma - \beta} \cdot \langle h \rangle_{\beta, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\beta - \frac{\gamma}{\gamma - \beta} \cdot \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}^\beta \\ &= \langle \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(\tau) dt, [a, \cdot]} \rangle_{\beta, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\beta \leq B^\beta \cdot \langle \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(\tau) dt, [a, \cdot]} \rangle_{\beta, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\beta \\ &= B^\beta \cdot \langle \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(\tau) dt, [a, \cdot]}^\beta \rangle_{1, \gamma/\beta, v(t) dt, [a, b]} = B^\beta \cdot \langle \langle h^\alpha \rangle_{1, 1, v(\tau) dt, [a, \cdot]}^{\beta/\alpha} \rangle_{1, \gamma/\beta, v(t) dt, [a, b]} \\ &= B^\beta \cdot \langle \langle h^\alpha \rangle_{1, 1, v(\tau) dt, [a, \cdot]}^{\beta/\alpha} \rangle_{\beta/\alpha, \gamma/\alpha, v(t) dt, [a, b]}. \end{aligned}$$

Применим лемму 2.1, в которой $q = \beta/\alpha$, $p = \gamma/\alpha$, $g = h^\alpha$. При этом учтем, что при $\alpha > 0$ имеем $p > q > 1$, а при $\alpha < 0$ будет $p < 0$, $q < 0$, так что условия леммы 2.1 выполнены. Тогда, используя еще (2.1), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{\gamma - \beta} \langle h \rangle_{\beta, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\beta - \frac{\gamma}{\gamma - \beta} \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}^\beta \\ & \leq B^\beta \left(\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \right)^{\beta/\alpha} \langle h^\alpha \rangle_{\beta/\alpha, \gamma/\alpha, v(t) dt, [a, b]} = B^\beta \left(\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \right)^{\beta/\alpha} \langle h \rangle_{\beta, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\beta. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left[\frac{\gamma}{\gamma - \beta} - B^\beta \left(\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \right)^{\beta/\alpha} \right] \langle h \rangle_{\beta, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\beta \leq \frac{\gamma}{\gamma - \beta} \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}^\beta.$$

Если γ удовлетворяет условию (3.2), то выражение в квадратных скобках слева положительно, и поэтому

$$\langle h \rangle_{\beta, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\beta \leq C \cdot \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}^\beta,$$

или, учитывая (2.1),

$$\langle h^\beta \rangle_{1, \gamma/\beta, v(t) dt, [a, b]} \leq C \cdot \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}^\beta.$$

Применяя теперь (2.5) с $r = \gamma/\beta > 1$ и невозрастающей $g = h^\beta$, получим

$$\langle h^\beta \rangle_{\gamma/\beta, \gamma/\beta, v(t) dt, [a, b]} \leq \frac{\beta}{\gamma} \langle h^\beta \rangle_{1, \gamma/\beta, v(t) dt, [a, b]} \leq C' \cdot \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}^\beta,$$

т.е. в силу (2.1)

$$\langle h \rangle_{\gamma, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\beta \leq C' \cdot \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}^\beta.$$

Так как $\beta > 0$, отсюда следует (3.4).

Осталось рассмотреть случай $\beta < 0$. Положим $v_0 = h^\beta v$. Тогда $v = h^{-\beta} v_0$ и в силу (2.3) условие (3.3) принимает вид

$$\langle h \rangle_{-\beta, -\beta, v_0(\tau) d\tau, [a, t]}^{1-\beta/\alpha} \leq B \cdot \langle h \rangle_{\alpha-\beta, \alpha-\beta, v_0(\tau) d\tau, [a, t]}^{1-\beta/\alpha}, \quad a \leq t \leq b,$$

или, поскольку $1 - \beta/\alpha > 0$,

$$\langle h \rangle_{-\beta, -\beta, v_0(\tau) d\tau, [a, t]} \leq B^{\alpha/(\alpha-\beta)} \langle h \rangle_{\alpha-\beta, \alpha-\beta, v_0(\tau) d\tau, [a, t]}, \quad a \leq t \leq b.$$

Положим $\alpha_0 = \alpha - \beta$, $\beta_0 = -\beta$, $B_0 = B^{\alpha/(\alpha-\beta)}$. Тогда $\alpha_0 < 0 < \beta_0$, и мы приходим к уже рассмотренному случаю, согласно которому для $\gamma_0 > \beta_0$, удовлетворяющего условию

$$\left(1 - \frac{\alpha_0}{\gamma_0}\right)^{1/\alpha_0} > B_0 \left(1 - \frac{\beta_0}{\gamma_0}\right)^{1/\beta_0}, \quad (3.5)$$

справедливо неравенство

$$\langle h \rangle_{\gamma_0, \gamma_0, v_0(t) dt, [a, b]} \leq B_0'' \cdot \langle h \rangle_{\beta_0, \beta_0, v_0(t) dt, [a, b]}.$$

Полагая $\gamma = \gamma_0 + \beta$ и учитывая равенство $v_0 = h^\beta v$, перепишем это неравенство в виде

$$\langle h \rangle_{\gamma-\beta, \gamma-\beta, h^\beta v(t) dt, [a, b]} \leq B_0'' \cdot \langle h \rangle_{-\beta, -\beta, h^\beta v(t) dt, [a, b]}$$

или в силу (2.3)

$$\langle h \rangle_{\gamma, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^{\gamma/(\gamma-\beta)} \leq B_0'' \cdot \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(t) dt, [a, b]}^{\gamma/(\gamma-\beta)}.$$

Поскольку $\gamma/(\gamma - \beta) > 0$, это неравенство равносильно (3.4). Если еще учесть, что (3.5) равносильно (3.2), то это завершает рассмотрение случая $\beta < 0$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. Пусть ненулевые $\alpha < \beta$, функция h не убывает на $[a, b]$ и удовлетворяет условию

$$\langle h \rangle_{\beta, \beta, v(\tau) d\tau, [a, t]} \leq B \cdot \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(\tau) d\tau, [a, t]}, \quad a \leq t \leq b. \quad (3.6)$$

Тогда для любого $\gamma < \min(0, \alpha)$, удовлетворяющего условию (3.2), найдется такое $B' > 0$, что справедливо неравенство

$$\langle h \rangle_{\gamma, \gamma, v(t) dt, [a, b]} \geq \frac{1}{B'} \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a, b]}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве леммы 3.1, рассмотрим сначала случай $\alpha < 0$. Полагаем в (2.2) $q = \alpha$, $p = \gamma$, $g = h$ и, пользуясь условием (3.6) и равенством (2.1), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \langle h \rangle_{\alpha, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\alpha - \frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a, b]}^\alpha \\ &= \langle \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(\tau) d\tau, [a, \cdot]} \rangle_{\alpha, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\alpha \leq B^{-\alpha} \langle \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(\tau) d\tau, [a, \cdot]} \rangle_{\alpha, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\alpha \\ &= B^{-\alpha} \langle \langle h \rangle_{\beta, \beta, v(\tau) d\tau, [a, \cdot]}^\alpha \rangle_{1, \gamma/\alpha, v(t) dt, [a, b]} = B^{-\alpha} \langle \langle h^\beta \rangle_{1, 1, v(\tau) d\tau, [a, \cdot]}^{\alpha/\beta} \rangle_{1, \gamma/\alpha, v(t) dt, [a, b]} \\ &= B^{-\alpha} \langle \langle h^\beta \rangle_{1, 1, v(\tau) d\tau, [a, \cdot]}^{\alpha/\beta} \rangle_{\alpha/\beta, \gamma/\beta, v(t) dt, [a, b]}. \end{aligned}$$

Применим лемму 2.1, в которой $q = \alpha/\beta$, $p = \gamma/\beta$, $g = h^\beta$. При этом учтем, что при $\beta < 0$ имеем $p > q > 1$, а при $\beta > 0$ будет $p < 0$, $q < 0$, так что условия леммы 2.1 выполнены. Тогда, используя еще (2.1), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \langle h \rangle_{\alpha, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\alpha - \frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a, b]}^\alpha \\ & \leq B^{-\alpha} \left(\frac{\gamma}{\gamma - \beta} \right)^{\alpha/\beta} \langle h^\beta \rangle_{\alpha/\beta, \gamma/\beta, v(t) dt, [a, b]} = B^{-\alpha} \left(\frac{\gamma}{\gamma - \beta} \right)^{\alpha/\beta} \langle h \rangle_{\alpha, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\alpha. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left[\frac{\gamma}{\gamma - \alpha} - B^{-\alpha} \left(\frac{\gamma}{\gamma - \beta} \right)^{\alpha/\beta} \right] \langle h \rangle_{\alpha, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\alpha \leq \frac{\gamma}{\gamma - \alpha} \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a, b]}^\alpha.$$

Если γ удовлетворяет условию (3.2), то выражение в квадратных скобках слева положительно, и поэтому

$$\langle h \rangle_{\alpha, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\alpha \leq C \cdot \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a, b]}^\alpha$$

или, учитывая (2.1),

$$\langle h^\alpha \rangle_{1, \gamma/\alpha, v(t) dt, [a, b]} \leq C \cdot \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a, b]}^\alpha.$$

Применяя теперь (2.5) с $r = \gamma/\alpha > 1$ и невозрастающей $g = h^\alpha$, получим

$$\langle h^\alpha \rangle_{\gamma/\alpha, \gamma/\alpha, v(t) dt, [a, b]} \leq \frac{\alpha}{\gamma} \langle h^\alpha \rangle_{1, \gamma/\alpha, v(t) dt, [a, b]} \leq C' \cdot \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a, b]}^\alpha,$$

т.е. в силу (2.1)

$$\langle h \rangle_{\gamma, \gamma, v(t) dt, [a, b]}^\alpha \leq C' \cdot \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a, b]}^\alpha.$$

Так как $\alpha < 0$, отсюда следует (3.7).

Осталось рассмотреть случай $\alpha > 0$. Положим $v_0 = h^\alpha v$. Тогда $v = h^{-\alpha} v_0$, и в силу (2.3) условие (3.6) принимает вид

$$\langle h \rangle_{\beta - \alpha, \beta - \alpha, v_0(\tau) d\tau, [a, t]}^{1 - \alpha/\beta} \leq B \cdot \langle h \rangle_{-\alpha, -\alpha, v_0(\tau) d\tau, [a, t]}^{1 - \alpha/\beta}, \quad a \leq t \leq b,$$

или, поскольку $1 - \alpha/\beta > 0$,

$$\langle h \rangle_{\beta - \alpha, \beta - \alpha, v_0(\tau) d\tau, [a, t]} \leq B^{\beta/(\beta - \alpha)} \langle f \rangle_{-\alpha, -\alpha, v_0(\tau) d\tau, [a, t]}, \quad a \leq t \leq b.$$

Положим $\alpha_0 = -\alpha$, $\beta_0 = \beta - \alpha$, $B_0 = B^{\beta/(\beta - \alpha)}$. Тогда $\alpha_0 < 0 < \beta_0$, и мы приходим к уже рассмотренному случаю, согласно которому для $\gamma_0 < \alpha_0$, удовлетворяющего условию

$$\left(1 - \frac{\alpha_0}{\gamma_0} \right)^{1/\alpha_0} > B_0 \left(1 - \frac{\beta_0}{\gamma_0} \right)^{1/\beta_0}, \quad (3.8)$$

справедливо неравенство

$$\langle h \rangle_{\gamma_0, \gamma_0, v_0(t) dt, [a, b]} \geq \frac{1}{B'_0} \langle h \rangle_{\alpha_0, \alpha_0, v_0(t) dt, [a, b]}.$$

Полагая $\gamma = \gamma_0 + \alpha$ и учитывая равенство $v_0 = h^\alpha v$, перепишем это неравенство в виде

$$\langle h \rangle_{\gamma-\alpha, \gamma-\alpha, h^\alpha(t)v(t) dt, [a,b]} \geq \frac{1}{B'_0} \langle h \rangle_{-\alpha, -\alpha, h^\alpha(t)v(t) dt, [a,b]}$$

или в силу (2.3)

$$\langle h \rangle_{\gamma, \gamma, v(t) dt, [a,b]}^{\gamma/(\gamma-\alpha)} \geq \frac{1}{B'_0} \langle h \rangle_{\alpha, \alpha, v(t) dt, [a,b]}^{\gamma/(\gamma-\alpha)}.$$

Поскольку $\gamma/(\gamma - \alpha) > 0$, это неравенство равносильно (3.7). Если еще учесть, что (3.8) равносильно (3.2), то тем самым завершается рассмотрение случая $\alpha > 0$.

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 1 в общем случае введем сначала некоторые обозначения. Для функции f через $f|E$ обозначаем сужение f на множество E . Для μ -измеримой на параллелепипеде $R_0 \subset \mathbb{R}^d$ функции f и μ -измеримого множества $E \subset R_0$ *невозрастающей равноизмеримой перестановкой* функции f на E называется невозрастающая на $[0, \mu(E)]$ функция $(f|E)_\mu^{[\downarrow]}$ такая, что при любом $\lambda \geq 0$ справедливо равенство

$$\mu(\{x \in E : f(x) > \lambda\}) = |\{t \in [0, \mu(E)] : (f|E)_\mu^{[\downarrow]}(t) > \lambda\}|,$$

где символом $|\cdot|$ обозначается мера Лебега. Функция $(f|E)_\mu^{[\downarrow]}$ может быть определена равенством

$$(f|E)_\mu^{[\downarrow]}(t) = \sup_{e \subset E, \mu(e)=t} \inf_{x \in e} f(x), \quad 0 \leq t \leq \mu(E).$$

Аналогично, *неубывающая равноизмеримая перестановка* $(f|E)_\mu^{[\uparrow]}$ функции f на E определяется равенством

$$(f|E)_\mu^{[\uparrow]}(t) = \sup_{e \subset E, \mu(e)=t} \inf_{x \in e} f(x), \quad 0 \leq t \leq \mu(E).$$

Ясно, что равенства

$$\int_E f^p(x) d\mu(x) = \int_0^{\mu(E)} [(f|E)_\mu^{[\downarrow]}(t)]^p dt = \int_0^{\mu(E)} [(f|E)_\mu^{[\uparrow]}(t)]^p dt \quad (3.9)$$

справедливы при любом действительном p . Далее, при $p > 0$ имеем

$$[(f|E)_\mu^{[\downarrow]}]^p = (f^p|E)_\mu^{[\downarrow]}, \quad [(f|E)_\mu^{[\uparrow]}]^p = (f^p|E)_\mu^{[\uparrow]},$$

а при $p < 0$

$$[(f|E)_\mu^{[\downarrow]}]^p = (f^p|E)_\mu^{[\uparrow]}, \quad [(f|E)_\mu^{[\uparrow]}]^p = (f^p|E)_\mu^{[\downarrow]}.$$

Далее нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА В [17]. Пусть положительная на $(0, +\infty)$ функция φ выпукла вниз и такая, что $\varphi(0) = \varphi(0+)$ (равное, быть может, $+\infty$). Далее, пусть мера μ абсолютно непрерывна на параллелепипеде $R_0 \subset \mathbb{R}^d$, а неотрицательная на R_0 функция f удовлетворяет обратному неравенству Йенсена

$$\frac{1}{\mu(R)} \int_R \varphi(f(x)) d\mu(x) \leq B \cdot \varphi\left(\frac{1}{\mu(R)} \int_R f(x) d\mu(x)\right), \quad R \subset R_0,$$

где постоянная $B > 1$ не зависит от параллелепипеда R . Тогда для любого интервала $I \subset [0, \mu(R_0)]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I \varphi((f|R_0)_\mu^{[\downarrow]}(t)) dt &\leq B \cdot \varphi\left(\frac{1}{|I|} \int_I (f|R_0)_\mu^{[\downarrow]}(t) dt\right), \\ \frac{1}{|I|} \int_I \varphi((f|R_0)_\mu^{[\uparrow]}(t)) dt &\leq B \cdot \varphi\left(\frac{1}{|I|} \int_I (f|R_0)_\mu^{[\uparrow]}(t) dt\right). \end{aligned}$$

Из этой теоремы, в частности, вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Пусть функция $f \in RH_{d\mu(x)}^{\alpha, \beta}(B)$ на параллелепипеде $R_0 \subset \mathbb{R}^d$. Тогда для любого параллелепипеда $R \subset R_0$ справедливы неравенства

$$\langle (f|R)_\mu^{[\downarrow]} \rangle_{\beta, \beta, d\tau, [0, t]} \leq B \cdot \langle (f|R)_\mu^{[\downarrow]} \rangle_{\alpha, \alpha, d\tau, [0, t]}, \quad 0 \leq t \leq \mu(R), \quad (3.10)$$

$$\langle (f|R)_\mu^{[\uparrow]} \rangle_{\beta, \beta, d\tau, [0, t]} \leq B \cdot \langle (f|R)_\mu^{[\uparrow]} \rangle_{\alpha, \alpha, d\tau, [0, t]}, \quad 0 \leq t \leq \mu(R). \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Фиксируем произвольный параллелепипед $R \subset R_0$. Тогда в силу (3.10) функция $h \equiv (f|R)_\mu^{[\downarrow]}$ удовлетворяет условию леммы 3.1 с $[a, b] = [0, \mu(R)]$ и $v \equiv 1$. Поэтому для $\gamma > \max(0, \beta)$, удовлетворяющего условию (1.6), справедливо неравенство (3.4), которое в силу (3.9) равносильно правому неравенству в (1.7). Аналогично, из (3.11) и леммы 3.2 получаем, что левое неравенство в (1.7) справедливо для $\gamma < \min(0, \alpha)$, удовлетворяющего условию (1.6).

Осталось показать, что при $d\mu(x) = dx$ левое неравенство в (1.7) теряет силу при $\gamma \leq \gamma^-$, а правое неравенство в (1.7) теряет силу при $\gamma \geq \gamma^+$, где числа γ^- и γ^+ определены в замечании 1. Пусть размерность пространства $d = 1$ и пусть, например, $\gamma \geq \gamma^+$. Положим

$$f_0(x) = x^{-1/\gamma^+}, \quad x \in [0, 1].$$

Тогда ясно, что для функции f_0 правое неравенство в (1.7) не выполняется, и поэтому остается показать, что

$$f_0 \in RH_{dx}^{\alpha, \beta}(B), \quad (3.12)$$

где

$$B = \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma^+}\right)^{1/\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\beta}{\gamma^+}\right)^{-1/\beta}. \quad (3.13)$$

Если $\beta > 0$, то, обозначая $g = f_0^\alpha$, перепишем (3.12) в виде

$$\frac{1}{|I|} \int_I g^{\beta/\alpha}(x) dx \leq B^\beta \left(\frac{1}{|I|} \int_I g(x) dx \right)^{\beta/\alpha}, \quad I \subset [0, 1].$$

Зафиксируем отрезок $I \subset [0, 1]$ и найдем такое $b > 0$ (возможно, большее 1), что

$$\frac{1}{b} \int_0^b g(x) dx \equiv \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma^+}\right)^{-1} b^{-\alpha/\gamma^+} = \frac{1}{|I|} \int_I g(x) dx.$$

Поскольку $\beta/\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, функция $\varphi(t) = t^{\beta/\alpha}$ выпукла вниз. Поэтому из неравенства

$$\frac{1}{|I|} \int_I g^{\beta/\alpha}(x) dx \leq \frac{1}{b} \int_0^b g^{\beta/\alpha}(x) dx$$

(см. [8]) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I g^{\beta/\alpha}(x) dx &\leq \left(1 - \frac{\beta}{\gamma^+}\right)^{-1} b^{-\beta/\gamma^+} \\ &= B^\beta \left(\left(1 - \frac{\alpha}{\gamma^+}\right)^{-1} b^{-\alpha/\gamma^+} \right)^{\beta/\alpha} = B^\beta \left(\frac{1}{|I|} \int_I g(x) dx \right)^{\beta/\alpha}, \end{aligned}$$

где число B определено равенством (3.13). Таким образом, (3.12) справедливо при $\beta > 0$. Если же $\beta < 0$, то, обозначая $g = f_0^\beta$, перепишем (3.12) в виде

$$\frac{1}{|I|} \int_I g^{\alpha/\beta}(x) dx \leq B^{-\alpha} \left(\frac{1}{|I|} \int_I g(x) dx \right)^{\alpha/\beta}, \quad I \subset [0, 1].$$

Зафиксируем отрезок $I \subset [0, 1]$ и найдем такое b , что

$$\frac{1}{b} \int_0^b g(x) dx \equiv \left(1 - \frac{\beta}{\gamma^+}\right)^{-1} b^{-\beta/\gamma^+} = \frac{1}{|I|} \int_I g(x) dx.$$

Поскольку $\alpha < \beta < 0$, функция $\varphi(t) = t^{\alpha/\beta}$ ($t > 0$) выпукла вниз. Поэтому, снова используя неравенство

$$\frac{1}{|I|} \int_I g^{\alpha/\beta}(x) dx \leq \frac{1}{b} \int_0^b g^{\alpha/\beta}(x) dx$$

(см. [8]), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I g^{\alpha/\beta}(x) dx &\leq \left(1 - \frac{\alpha}{\gamma^+}\right)^{-1} b^{-\alpha/\gamma^+} \\ &= B^{-\alpha} \left(\left(1 - \frac{\beta}{\gamma^+}\right)^{-1} b^{-\beta/\gamma^+} \right)^{\alpha/\beta} = B^{-\alpha} \left(\frac{1}{|I|} \int_I g(x) dx \right)^{\alpha/\beta}, \end{aligned}$$

где число B определено равенством (3.13). Итак, (3.12) справедливо также и при $\beta < 0$.

Аналогично показываем, что при $d = 1$ и левое неравенство в (1.7) теряет силу при $\gamma \leq \gamma^-$. Наконец, случай $d \geq 2$ легко сводится к одномерному, если рассматривать функции, постоянные по всем переменным, кроме одной.

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Muckenhoupt, "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **165** (1972), 207–226.
- [2] F. W. Gehring, "The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping", *Acta Math.*, **130** (1973), 265–277.
- [3] R. R. Coifman, Ch. Fefferman, "Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals", *Studia Math.*, **51** (1974), 241–250.
- [4] B. Bojarski, "Remarks on the stability of reverse Hölder inequalities and quasiconformal mappings", *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math.*, **10** (1985), 89–94.

- [5] B. Bojarski, *On Gurov–Reshetnyak classes*, Preprint, Univ. of Warsaw, 1989; *Publ. Sci., Univ. Joensuu*, **14**, 1989, 21–42, !!!!!to the editor - moreref.
- [6] I. Wik, “Reverse Hölder inequalities with constant close to 1”, *Ric. Math.*, **39**:1 (1990), 151–157.
- [7] L. D’Apuzzo, C. Sbordone, “Reverse Hölder inequalities. A sharp result”, *Rend. Math. Appl.* (7), **10**:2 (1990), 357–366.
- [8] А. А. Кореновский, “О точном продолжении обратного неравенства Гёльдера и условия Макенхаупта”, *Матем. заметки*, **52**:6 (1992), 32–44.
- [9] A. Popoli, “Optimal integrability in B_p^q classes”, *Matematiche*, **52**:1 (1997), 159–170.
- [10] A. Popoli, “Weighted reverse Hölder inequalities”, *Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli* (4), **62** (1995), 187–211.
- [11] Н. А. Малаксиано, “О точных вложениях классов Геринга в классы Макенхаупта”, *Матем. заметки*, **70**:5 (2001), 742–750.
- [12] N. Malaksiano, “The precise embeddings of the one-dimensional Muckenhoupt classes in Gehring classes”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **68**:1–2 (2002), 237–248.
- [13] В. И. Васюнин, “Точная константа в обратном неравенстве Гёльдера для макенхауптовских весов”, *Алгебра и анализ*, **15**:1 (2003), 73–117.
- [14] J. Kinnunen, *Sharp result on reverse Hölder inequalities*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. Diss., **95**, Suomalainen Tiedekatemia, Helsinki, 1994.
- [15] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.
- [16] G. H. Hardy, G. E. Littlewood, G. Polya, “Some simple inequalities satisfied by convex functions”, *Messenger*, **58** (1929), 145–152.
- [17] А. А. Кореновский, “Оценка перестановки функции, удовлетворяющей “обратному неравенству Йенсена””, *Укр. матем. журн.*, **57**:2 (2005), 158–169.

А. А. Кореновский

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова,
Институт математики, экономики и механики,
г. Одесса, Украина
E-mail: anakor@paco.net

Поступило

15.04.2005

Исправленный вариант

30.09.2006