Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Нгуен Минь Чи, Некоторые примеры негипоэллиптических бесконечно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 567–580

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 10:22:11

УДК 517

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ НЕГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ БЕСКОНЕЧНО ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Нгуен Минь Чи

Статья содержит примеры негипоэллиптических бесконечно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов. Построены глобальные негладкие решения соответствующих однородных уравнений.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. В статье изучается негипоэллиптичность дифференциальных операторов вида

$$G_{a,b}^c = X_2 X_1 + i(c(x)|x|^{-4} + (a(x) - b(x))|x|^{-3})e^{-1/|x|} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1)$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $i = \sqrt{-1}$,

$$e^{-1/|x|} = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ e^{1/x}, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

коэффициенты $a(x), b(x), c(x)$ удовлетворяют условиям

$$a(x) = \begin{cases} a_+ \in \mathbb{C}, & \text{если } x > 0, \\ a_- \in \mathbb{C}, & \text{если } x < 0, \end{cases} =: a, \quad b(x) = \begin{cases} b_+ \in \mathbb{C}, & \text{если } x > 0, \\ b_- \in \mathbb{C}, & \text{если } x < 0, \end{cases} =: b,$$

$$c(x) = \begin{cases} c_+ \in \mathbb{C}, & \text{если } x > 0, \\ c_- \in \mathbb{C}, & \text{если } x < 0, \end{cases} =: c,$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - ib(x) \operatorname{sgn}(x)|x|^{-2} e^{-1/|x|} \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x} - ia(x) \operatorname{sgn}(x)|x|^{-2} e^{-1/|x|} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Мы предположим, что $\operatorname{Re} a_+ \cdot \operatorname{Re} a_- \cdot \operatorname{Re} b_+ \cdot \operatorname{Re} b_- \neq 0$. Гипоэллиптичность $G_{a,b}^c$ исследована в [1] в том случае, когда $a_+ = a_- = -1$, $b_+ = b_- = 1$, $c_+ = c_-$, или $a_+ = a_- = -1$, $b_+ = b_- = 1$, $c_+ + c_- = 2$, и в [2] при $a_+ = a_- = -e^{i\varphi}$, $b_+ = b_- = e^{i\varphi}$, $c_+ = (1 - \lambda_+)e^{i\varphi}$, $c_- = (1 - \lambda_-)e^{i\varphi}$, где $\varphi \in [0, \pi/2)$, $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{C}$. Используя преобразование Фурье по одной переменной, задачу можно свести к изучению свойств семейства обыкновенных дифференциальных операторов. Недавно в [3] построены явно глобальные негладкие

решения для соответствующих однородных уравнений и дано новое доказательство негипоэллиптичности $G_{a,b}^c$ для случаев, рассмотренных в [1], [2]. В этой статье мы укажем те значения $a_+, a_-, b_+, b_-, c_+, c_-$, при которых оператор $G_{a,b}^c$ не является гипоэллиптическим. Условия гипоэллиптичности конечно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов вида, близкого с (1), были исследованы в [4], [5] (см. также [6]). В [3], [7], [8] мы также построили явные глобальные негладкие решения для всех случаев негипоэллиптичности, рассмотренных в [4], [5]. Гипоэллиптичность бесконечно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов была исследована впервые в [9]. Более полный список работ на эту тему можно найти в [10].

В п. 2 сформулированы основные теоремы. В п. 3 введены некоторые определения и обозначения, используемые в статье, и доказаны вспомогательные леммы. В п. 4 даны доказательства основных результатов.

2. Основные теоремы. Для двух комплексных чисел $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ определяем $z_1^{z_2}$ как $e^{z_2 \ln z_1}$; при этом для $z_1 = re^{i\varphi}$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, считаем, что $\ln z_1 = \ln r + i\varphi$. Общие константы будут обозначаться через C . Рассмотрим следующие случаи.

А) Случай $\operatorname{Re} a_+ < 0, \operatorname{Re} a_- < 0, \operatorname{Re} b_+ > 0, \operatorname{Re} b_- > 0$. Построим негладкое решение $u(x, y)$ в виде $F_{a,b}^c(x, y) = x \tilde{F}_{a,b}^c(x, y)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{a,b}^c(x, y) &= \begin{cases} (-a_+ e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}} (b_+ e^{-1/|x|} - iy)^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}}, & x \geq 0, \\ (-1)^{\frac{c_+}{a_+ - b_+} - \frac{c_-}{a_- - b_-}} (-a_- e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_-}{a_- - b_-}} (b_- e^{-1/|x|} - iy)^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}}, & x \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следующее условие гарантирует, что $F_{a,b}^c(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0))$:

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} - \frac{c_-}{a_- - b_-} \in \mathbb{Z}.$$

Действительно, нетрудно видеть, что функция $\tilde{F}_{a,b}^c$ является голоморфной (следовательно, гладкой) в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y)\}$. Теперь если $y > 0$, то

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y) \\ x > 0}} \tilde{F}_{a,b}^c(x, y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y) \\ x < 0}} \tilde{F}_{a,b}^c(x, y) = \frac{e^{i\pi(\frac{1}{2} + \frac{c_+}{a_+ - b_+})}}{y}.$$

Если $y < 0$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y) \\ x > 0}} \tilde{F}_{a,b}^c(x, y) &= -\frac{e^{-i\pi(\frac{1}{2} + \frac{c_+}{a_+ - b_+})}}{y}, \\ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y) \\ x < 0}} \tilde{F}_{a,b}^c(x, y) &= -\frac{e^{-i\pi(\frac{1}{2} + \frac{2c_-}{a_- - b_-} - \frac{c_+}{a_+ - b_+})}}{y}. \end{aligned}$$

Поэтому если

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} - \frac{c_-}{a_- - b_-} \in \mathbb{Z},$$

то функция $\tilde{F}_{a,b}^c$ непрерывна в точках $(0, y)$. Ясно, что функцию $\tilde{F}_{a,b}^c$ можно дифференцировать по y в точках $(0, y)$ любое число раз. При дифференцировании этой функции по x m раз появляется множитель $e^{-1/|x|}/P_{2m}(x)$, где $P_{2m}(x)$ – многочлен порядка $2m$ от x , который стремится к нулю, когда x стремится к нулю. Поэтому

$$\frac{\partial^m \tilde{F}_{a,b}^c}{\partial x^m} = 0$$

в точках $(0, y)$, где $|y| \neq 0$. Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} X_1(-ae^{-1/|x|} + iy) &= (b-a) \operatorname{sgn}(x)|x|^{-2}e^{-1/|x|}, & X_1(be^{-1/|x|} - iy) &= 0, \\ X_2(-ae^{-1/|x|} + iy) &= 0, & X_2(be^{-1/|x|} - iy) &= (b-a) \operatorname{sgn}(x)|x|^{-2}e^{-1/|x|}. \end{aligned}$$

Следовательно, $G_{a,b}^c F_{a,b}^c(x, y) = 0$ в $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Поскольку $F_{a,b}^c(x, y) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$ (это будет показано ниже), из теоремы Шварца вытекает, что $G_{a,b}^c F_{a,b}^c$ является линейной комбинацией δ -функции Дирака и ее производных.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что $\operatorname{Re} a_+ < 0$, $\operatorname{Re} a_- < 0$, $\operatorname{Re} b_+ > 0$, $\operatorname{Re} b_- > 0$. Тогда $G_{a,b}^c$ не гипоэллиптичен, если*

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} = k, \quad \frac{c_-}{a_- - b_-} = l$$

или

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} = -k - 1, \quad \frac{c_-}{a_- - b_-} = -l - 1,$$

где k и l – неотрицательные целые числа. Более того, $G_{a,b}^c F_{a,b}^c(x, y) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичные теоремы верны для всех случаев, описываемых следующими условиями: $\operatorname{Re} a_+ \cdot \operatorname{Re} a_- \cdot \operatorname{Re} b_+ \cdot \operatorname{Re} b_- > 0$, $\operatorname{Re} a_+ \cdot \operatorname{Re} b_+ < 0$.

Б) Случай $\operatorname{Re} a_+ < 0$, $\operatorname{Re} a_- < 0$, $\operatorname{Re} b_+ < 0$, $\operatorname{Re} b_- < 0$. В этом случае конструкция негладких решений будет зависеть от соотношений между параметрами. В случае отсутствия резонанса $a_+ \neq b_+$, $a_- \neq b_-$ рассмотрим функцию

$$E_{a,b}^c(x, y) = \begin{cases} x(-a_+e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}}(-b_+e^{-1/|x|} + iy)^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}}, & x \geq 0, \\ x(-a_-e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_-}{a_- - b_-}}(-b_-e^{-1/|x|} + iy)^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}}, & x \leq 0. \end{cases}$$

В случае полурезонанса $a_+ = b_+$, $a_- \neq b_-$ рассмотрим функцию

$$H_{a,b}^c(x, y) = \begin{cases} x(-a_+e^{-1/|x|} + iy)^{-1} \exp\left[-\frac{c_+e^{-1/|x|}}{-a_+e^{-1/|x|} + iy}\right], & x \geq 0, \\ x(-a_-e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_-}{a_- - b_-}}(-b_-e^{-1/|x|} + iy)^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}}, & x \leq 0. \end{cases}$$

В случае полурезонанса $a_+ \neq b_+$, $a_- = b_-$ рассмотрим функцию

$$K_{a,b}^c(x, y) = \begin{cases} x(-a_+e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}}(-b_+e^{-1/|x|} + iy)^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}}, & x \geq 0, \\ x(-a_-e^{-1/|x|} + iy)^{-1} \exp\left[-\frac{c_-e^{-1/|x|}}{-a_-e^{-1/|x|} + iy}\right], & x \leq 0. \end{cases}$$

В случае резонанса $a_+ = b_+$, $a_- = b_-$ рассмотрим функцию

$$R_a^c(x, y) = \begin{cases} x(-a_+e^{-1/|x|} + iy)^{-1} \exp\left[-\frac{c_+e^{-1/|x|}}{-a_+e^{-1/|x|} + iy}\right], & x \geq 0, \\ x(-a_-e^{-1/|x|} + iy)^{-1} \exp\left[-\frac{c_-e^{-1/|x|}}{-a_-e^{-1/|x|} + iy}\right], & x \leq 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что функции $E_{a,b}^c(x, y)$, $H_{a,b}^c(x, y)$, $K_{a,b}^c(x, y)$ и $R_a^c(x, y)$ являются гладкими вне начала координат и они неограничены в некоторой окрестности начала координат.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что $\operatorname{Re} a_+ < 0$, $\operatorname{Re} a_- < 0$, $\operatorname{Re} b_+ < 0$, $\operatorname{Re} b_- < 0$. Тогда $G_{a,b}^c$ не гипоеллиптичен. Более того, имеем $G_{a,b}^c E_{a,b}^c(x, y) = 0$ в случае отсутствия резонанса, $G_{a,b}^c H_{a,b}^c = 0$ или $G_{a,b}^c K_{a,b}^c = 0$ в случаях полурезонанса и $G_{a,a}^c R_a^c(x, y) = 0$ в случае резонанса.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичная теорема верна для случая $\operatorname{Re} a_+ > 0$, $\operatorname{Re} a_- > 0$, $\operatorname{Re} b_+ > 0$, $\operatorname{Re} b_- > 0$.

В) Случай $\operatorname{Re} a_+ < 0$, $\operatorname{Re} a_- < 0$, $\operatorname{Re} b_+ > 0$, $\operatorname{Re} b_- < 0$. В случае отсутствия резонанса $a_- \neq b_-$ рассмотрим функцию

$$D_{a,b}^c(x, y) = \begin{cases} x(-a_+e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}} (b_+e^{-1/|x|} - iy)^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}}, & x \geq 0, \\ (-1)^{1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+}} x(-a_-e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_-}{a_- - b_-}} (-b_-e^{-1/|x|} + iy)^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}}, & x \leq 0. \end{cases}$$

В случае резонанса $a_- = b_-$ рассмотрим функцию

$$Y_{a,b}^c(x, y) = \begin{cases} x(-a_+e^{-1/|x|} + iy)^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}} (b_+e^{-1/|x|} - iy)^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}}, & x \geq 0, \\ (-1)^{1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+}} x(-a_-e^{-1/|x|} + iy)^{-1} \exp\left[-\frac{c_-e^{-1/|x|}}{-a_-e^{-1/|x|} + iy}\right], & x \leq 0. \end{cases}$$

Если

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} \in \mathbb{Z},$$

то функции $D_{a,b}^c(x, y)$ и $Y_{a,b}^c(x, y)$ являются гладкими вне начала координат и они неограничены в некоторой окрестности начала координат.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\operatorname{Re} a_+ < 0$, $\operatorname{Re} a_- < 0$, $\operatorname{Re} b_+ > 0$, $\operatorname{Re} b_- < 0$ и $c_+/(a_+ - b_+)$ является отрицательным целым числом. Тогда $G_{a,b}^c$ не гипоеллиптичен. Более того, имеем $G_{a,b}^c D_{a,b}^c(x, y) = 0$ в случае отсутствия резонанса и $G_{a,a}^c Y_a^c(x, y) = 0$ в случае резонанса.*

Доказательство теоремы 3 не приводится, так как оно аналогично доказательству теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичные теоремы верны для всех случаев, описывающихся следующим условием: $\operatorname{Re} a_+ \cdot \operatorname{Re} a_- \cdot \operatorname{Re} b_+ \cdot \operatorname{Re} b_- < 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Так как функция $e^{-1/|x|}$ принадлежит к классу Жеврея $G^2(\mathbb{R}^1)$, то коэффициенты $G_{a,b}^c$ принадлежат к классу Жеврея $G^2(\mathbb{R}^2)$. Поэтому можно поставить вопрос о гипоеллиптичности $G_{a,b}^c$ относительно класса Жеврея порядка $s \geq 2$. Все теоремы остаются верными, если заменить фразу “не гипоеллиптичен” на фразу “не гипоеллиптичен относительно класса Жеврея порядка $s \geq 2$ ”.

3. Некоторые леммы. В статье часто встречаются выражения типа $f(z)/g(z)$ ($z \in \mathbb{C}$), которые определены и непрерывны во всех точках кроме, быть может, счетного числа изолированных точек $\{z_1, z_2, \dots, z_j, \dots\}$. В особых точках считаем, что $f(z_j)/g(z_j)$ принимает предельное значение $f(z)/g(z)$ при $z \rightarrow z_j$. Как правило, в этой работе такие пределы всегда существуют. Введем обозначение

$$\langle z, m \rangle = z(z+1) \cdots (z+m-1) = \frac{\Gamma(z+m)}{\Gamma(z)} \quad \text{для } z \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}.$$

Теперь напомним две леммы из [8] и [3].

ЛЕММА 1. *Предположим, что $\omega_1, \omega_3 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \omega_3 > -1$. Тогда*

$$\int_0^\pi (\sin \theta + i \cos \theta)^{\omega_1} \sin^{\omega_3} \theta d\theta = \frac{2^{-\omega_3} \pi \Gamma(\omega_3 + 1)}{\Gamma(1 + \frac{\omega_3 - \omega_1}{2}) \Gamma(1 + \frac{\omega_3 + \omega_1}{2})}. \quad (2)$$

Согласно договоренности, принятой в начале этого пункта, в том случае, когда

$$1 + \frac{\omega_3 - \omega_1}{2} \quad \text{или} \quad 1 + \frac{\omega_3 + \omega_1}{2}$$

являются полюсами гамма-функции, правая часть (2) есть нуль.

ЛЕММА 2. *Предположим, что $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = -2$, $\operatorname{Re} w_1, \operatorname{Re} w_2 > 0$, $\operatorname{Re} \omega_3 > -1$. Тогда*

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi (w_1 \sin \theta + i \cos \theta)^{\omega_1} (w_2 \sin \theta - i \cos \theta)^{\omega_2} \sin^{\omega_3} \theta d\theta \\ &= \frac{2\pi \Gamma(\omega_3 + 1)}{(w_1 + w_2)^{\omega_3 + 1} \Gamma(1 + \frac{\omega_3 + \omega_1 - \omega_2}{2}) \Gamma(1 + \frac{\omega_3 - \omega_1 + \omega_2}{2})}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что $\omega_1, \omega_3 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \omega_3 > -1$. Тогда*

$$\int_0^\pi (\sin \theta + i \cos \theta)^{\omega_1} \sin^{\omega_3} \theta \cos \theta d\theta = \frac{i 2^{-\omega_3 - 1} \omega_1 \pi \Gamma(\omega_3 + 1)}{\Gamma(\frac{3 + \omega_3 - \omega_1}{2}) \Gamma(\frac{3 + \omega_3 + \omega_1}{2})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\cos \theta d\theta = d \sin \theta$, то, интегрируя по частям, получаем доказываемый результат.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Предположим, что $\omega_1, \omega_3 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \omega_3 > -1$. Тогда*

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \ln(\sin \theta) (\sin \theta + i \cos \theta)^{\omega_1} \sin^{\omega_3} \theta d\theta \\ &= \frac{\pi (2\Gamma(\omega_3 + 1) \ln 2 + 2\Gamma'(\omega_3 + 1) - \Gamma(\omega_3 + 1) (\psi(1 + \frac{\omega_3 - \omega_1}{2}) + \psi(1 + \frac{\omega_3 + \omega_1}{2})))}{2\omega_3 + 1 \Gamma(1 + \frac{\omega_3 - \omega_1}{2}) \Gamma(1 + \frac{\omega_3 + \omega_1}{2})}, \end{aligned}$$

где ψ является пси-функцией Гаусса $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя обе части (2) по ω_3 , получаем требуемый результат.

4. Доказательство теоремы 1. Прежде всего нам потребуется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что $\operatorname{Re} a_+ < 0$, $\operatorname{Re} a_- < 0$, $\operatorname{Re} b_+ > 0$, $\operatorname{Re} b_- > 0$*

и

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} - \frac{c_-}{a_- - b_-} \in \mathbb{Z}.$$

Тогда

$$G_{a,b}^c F_{a,b}^c(x, y) = T_{a,b}^c \delta(x, y) + 4 \sin \left(\frac{\pi c_+}{b_+ - a_+} \right) \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x}, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} T_{a,b}^c = & \int_0^\pi A_{+, -a_+}^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}} A_{-, b_+}^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}} (\sin \theta - i b_+ \cos \theta) d\theta \\ & + c_+ \int_0^\pi \ln(\sin \theta) A_{+, -a_+}^{-1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+}} A_{-, b_+}^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}} d\theta \\ & + (-1)^{1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+} - \frac{c_-}{a_- - b_-}} \int_{-\pi}^0 A_{+, -a_-}^{\frac{c_-}{a_- - b_-}} A_{-, b_-}^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}} (|\sin \theta| - i b_- \cos \theta) d\theta \\ & + (-1)^{1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+} - \frac{c_-}{a_- - b_-}} c_- \int_{-\pi}^0 \ln(|\sin \theta|) A_{+, -a_-}^{-1 + \frac{c_-}{a_- - b_-}} A_{-, b_-}^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}} d\theta, \end{aligned}$$

здесь $A_{+, z} = z |\sin \theta| + i \cos \theta$, $A_{-, z} = z |\sin \theta| - i \cos \theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем следующие “полярные координаты”:

$$x = -\frac{\operatorname{sgn}(\sin \theta)}{\ln(\rho |\sin \theta|)}, \quad y = \rho \cos \theta, \quad \rho < 1, \quad 0 < |\theta| < \pi.$$

Очевидно, что $\rho^2 = e^{-2/|x|} + y^2$. Сначала покажем, что $F_{a,b}^c(x, y) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$. Так как $F_{a,b}^c(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0))$, достаточно доказать, что $F_{a,b}^c(x, y) \in L^1(B_\varepsilon)$, где ε есть достаточно малое число и $B_\varepsilon = \{(x, y) | \rho(x, y) < \varepsilon\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon} |F_{a,b}^c(x, y)| dx dy & \leq C \int_{-\pi}^\pi \int_0^\varepsilon \frac{d\rho d\theta}{\rho |\sin \theta| |\ln \rho \sin \theta|^3} \\ & \leq C \int_0^\varepsilon \rho^{-1} d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{|\ln \rho \sin \theta|^3 |\sin \theta|}. \end{aligned}$$

При малом фиксированном ρ сделаем замену переменной $\xi = \ln(\sin \theta) / \ln \rho$. Если $\rho \leq e^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{|\ln \rho \sin \theta|^3 |\sin \theta|} & = \frac{1}{(\ln \rho)^2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1 - e^{2\xi \ln \rho})^{1/2} |1 + \xi|^3} \\ & \leq \frac{1}{(\ln \rho)^2} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(1 - e^{-2\xi})^{1/2} |1 + \xi|^3} \leq \frac{C}{(\ln \rho)^2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{B_\varepsilon} |F_{a,b}^c(x, y)| dx dy \leq C \int_0^\varepsilon \frac{d\rho}{\rho(\ln \rho)^2} < \infty.$$

Теперь положим $\mathbb{R}_\varepsilon^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x, y) \geq \varepsilon\}$. Для каждой функции $v(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ из формулы Грина следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}_\varepsilon^2} F_{a,b}^c(x, y) G_{b,a}^{-c} v(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_\varepsilon^2} v(x, y) G_{a,b}^c F_{a,b}^c(x, y) dx dy - \int_{\rho=\varepsilon} v(x, y) B_1(F_{a,b}^c, a, b, c) ds \\ &+ \int_{\rho=\varepsilon} F_{a,b}^c(x, y) B_2(v, a, b) ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(F_{a,b}^c, a, b, c) &:= (\nu_1 - ia \operatorname{sgn}(x)|x|^{-2} e^{-1/|x|} \nu_2) X_1 F_{a,b}^c(x, y) \\ &+ i(c|x|^{-4} + (a-b)|x|^{-3}) e^{-1/|x|} \nu_2 F_{a,b}^c(x, y), \\ B_2(v, a, b) &:= (\nu_1 - ib \operatorname{sgn}(x)|x|^{-2} e^{-1/|x|} \nu_2) X_2 v(x, y), \\ (\nu_1, \nu_2)|_{\rho=\varepsilon} &= - \left(\frac{\operatorname{sgn}(x) x^{-2} e^{-2/|x|}}{(x^{-4} e^{-4/|x|} + y^2)^{1/2}}, \frac{y}{(x^{-4} e^{-4/|x|} + y^2)^{1/2}} \right) \Big|_{\rho=\varepsilon}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$(x^{-4} e^{-4/|x|} + y^2)^{-1/2} ds|_{\rho=\varepsilon} = \frac{d\theta}{\varepsilon |\sin \theta| (\ln \varepsilon |\sin \theta|)^2}.$$

Следовательно,

$$\int_{\rho=\varepsilon} F_{a,b}^c(x, y) B_2(v, a, b) ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и

$$\begin{aligned} & - \int_{\rho=\varepsilon} v(x, y) B_1(F_{a,b}^c, a, b, c) ds \\ &= \int_0^\pi v(\varepsilon, \theta) A_{+, -a_+}^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}} A_{-, b_+}^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}} (\sin \theta - ib_+ \cos \theta) d\theta \\ &+ c_+ \int_0^\pi v(\varepsilon, \theta) \ln(\varepsilon \sin \theta) A_{+, -a_+}^{-1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+}} A_{-, b_+}^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}} d\theta \\ &+ (-1)^{1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+} - \frac{c_-}{a_- - b_-}} \int_{-\pi}^0 v(\varepsilon, \theta) A_{+, -a_-}^{\frac{c_-}{a_- - b_-}} A_{-, b_-}^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}} (|\sin \theta| - ib_- \cos \theta) d\theta \\ &+ (-1)^{1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+} - \frac{c_-}{a_- - b_-}} c_- \int_{-\pi}^0 v(\varepsilon, \theta) \ln(\varepsilon |\sin \theta|) A_{+, -a_-}^{-1 + \frac{c_-}{a_- - b_-}} A_{-, b_-}^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}} d\theta. \end{aligned}$$

Используя тейлоровское разложение функции $v(x, y)$ в окрестности $(0, 0)$:

$$v(x, y) = v(0, 0) + x \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x} + y \frac{\partial v(0, 0)}{\partial y} + O(x^2 + y^2) \quad \text{при } x^2 + y^2 \rightarrow 0,$$

получаем, что

$$v(\varepsilon, \theta) = v(0, 0) - \frac{\operatorname{sgn}(\sin \theta)}{\ln(\varepsilon |\sin \theta|)} \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x} + O\left(\left(\frac{1}{\ln \varepsilon}\right)^2\right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$-\int_{\rho=\varepsilon} v(x, y) B_1(F_{a,b}^c, a, b, c) ds \rightarrow T_{a,b}^c v(0, 0) - 4 \sin\left(\frac{\pi c_+}{b_+ - a_+}\right) \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5)$$

Из (4) и (5) выводим, что

$$\begin{aligned} (G_{a,b}^c F_{a,b}^c(x, y), v(x, y)) &= (F_{a,b}^c(x, y), G_{b,a}^{-c} v(x, y)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho \geq \varepsilon} F_{a,b}^c(x, y) G_{b,a}^{-c} v(x, y) dx dy \\ &= T_{a,b}^c v(0, 0) - 4 \sin\left(\frac{\pi c_+}{b_+ - a_+}\right) \frac{\partial v(0, 0)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G_{a,b}^c F_{a,b}^c(x, y) = T_{a,b}^c \delta(x, y) + 4 \sin\left(\frac{\pi c_+}{b_+ - a_+}\right) \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x}.$$

Предложение 1 доказано.

Теперь найдем значения a, b, c такие, что правая часть (3) есть нуль. Очевидно, первое условие заключается в том, что

$$\sin \frac{\pi c_+}{b_+ - a_+} = 0$$

или

$$\frac{c_+}{b_+ - a_+} = k, \quad \frac{c_-}{b_- - a_-} = l,$$

где $k, l \in \mathbb{Z}$. Для $\tilde{k} \in \mathbb{C}$ введем функцию

$$\begin{aligned} L(w_1, w_2, \tilde{k}) &= \int_0^\pi (w_1 \sin \theta + i \cos \theta)^{\tilde{k}} (w_2 \sin \theta - i \cos \theta)^{-1-\tilde{k}} (\sin \theta - i w_2 \cos \theta) d\theta \\ &\quad - \tilde{k}(w_1 + w_2) \int_0^\pi \ln(\sin \theta) (w_1 \sin \theta + i \cos \theta)^{\tilde{k}-1} (w_2 \sin \theta - i \cos \theta)^{-1-\tilde{k}} d\theta. \end{aligned}$$

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 3. Пусть $\operatorname{Re} w_1 > 0$, $\operatorname{Re} w_2 > 0$. Тогда для любого целого числа $k \geq 0$ имеем

$$L(w_1, w_2, k) = (-1)^k \pi, \quad L(w_1, w_2, -k-1) = (-1)^k \pi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 и следствия 2 получаем

$$\begin{aligned} L(1, 1, \tilde{k}) &= \int_0^\pi (\sin \theta + i \cos \theta)^{2\tilde{k}} d\theta - 2\tilde{k} \int_0^\pi \ln(\sin \theta) (\sin \theta + i \cos \theta)^{2\tilde{k}} d\theta \\ &= \frac{\sin \tilde{k}\pi}{\tilde{k}} - (2 \ln 2 + \Gamma'(1) - \psi(1 - \tilde{k}) - \psi(1 + \tilde{k})) \sin \tilde{k}\pi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L(1, 1, k) &= (-1)^k \pi, \quad \text{если } k \geq 0, \\ L(1, 1, -k - 1) &= (-1)^k \pi, \quad \text{если } k \geq 0. \end{aligned}$$

Так как функция $L(w_1, w_2, \tilde{k})$ является аналитической по отношению к w_1, w_2 в секторе $\operatorname{Re} w_1 > 0, \operatorname{Re} w_2 > 0$, достаточно доказать, что

$$\left. \frac{\partial^{n+m} L(w_1, w_2, \tilde{k})}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \right|_{(w_1, w_2)=(1, 1)} = 0$$

для любого числа $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ и для любых неотрицательных чисел n и m таких, что $n+m > 0$. По формуле Лейбница имеем

$$\begin{aligned} &\left. \frac{(-1)^{n+m} \partial^{n+m} L(w_1, w_2, \tilde{k})}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \right|_{(w_1, w_2)=(1, 1)} \\ &= \int_0^\pi \langle -\tilde{k}, n \rangle \langle 1 + \tilde{k}, m \rangle (\sin \theta + i \cos \theta)^{2\tilde{k}-n+m} (\sin \theta)^{n+m} d\theta \\ &\quad + i \int_0^\pi \langle -\tilde{k}, n \rangle \langle 1 + \tilde{k}, m-1 \rangle m (\sin \theta + i \cos \theta)^{2\tilde{k}-n+m} (\sin \theta)^{n+m-1} \cos \theta d\theta \\ &\quad - 2\tilde{k} \int_0^\pi \langle -\tilde{k}+1, n \rangle \langle 1 + \tilde{k}, m \rangle \ln(\sin \theta) (\sin \theta + i \cos \theta)^{2\tilde{k}-n+m-1} (\sin \theta)^{n+m} d\theta \\ &\quad + \tilde{k} \int_0^\pi \langle -\tilde{k}+1, n-1 \rangle \langle 1 + \tilde{k}, m \rangle n \ln(\sin \theta) (\sin \theta + i \cos \theta)^{2\tilde{k}-n+m+1} (\sin \theta)^{n+m-1} d\theta \\ &\quad + \tilde{k} \int_0^\pi \langle -\tilde{k}+1, n \rangle \langle 1 + \tilde{k}, m-1 \rangle m \ln(\sin \theta) (\sin \theta + i \cos \theta)^{2\tilde{k}-n+m-1} (\sin \theta)^{n+m-1} d\theta. \end{aligned}$$

После некоторых вычислений, используя лемму 1, следствие 1 и следствие 2, видим, что

$$\begin{aligned} &\left. \frac{(-1)^{n+m} \partial^{n+m} L(w_1, w_2, \tilde{k})}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \right|_{(w_1, w_2)=(1, 1)} \\ &= S_1^{n,m}(\tilde{k}) + S_2^{n,m}(\tilde{k}) + S_3^{n,m}(\tilde{k}) + S_4^{n,m}(\tilde{k}) + S_5^{n,m}(\tilde{k}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_1^{n,m}(\tilde{k}) &= -\frac{\sin \pi \tilde{k} \Gamma(n+m+1)}{2^{n+m} (n-\tilde{k})}, \\ S_2^{n,m}(\tilde{k}) &= \frac{m(2\tilde{k}-n+m) \sin \pi \tilde{k} \Gamma(n+m)}{2^{n+m} (n-\tilde{k})(m+\tilde{k})}, \\ S_3^{n,m}(\tilde{k}) &= -\frac{\sin \pi \tilde{k} (2\Gamma(n+m+1) \ln 2 + 2\Gamma'(n+m+1))}{2^{n+m}} \\ &\quad + \frac{\sin \pi \tilde{k} \Gamma(n+m+1) (\psi(n-\tilde{k}+1) + \psi(m+\tilde{k}+1))}{2^{n+m}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4^{n,m}(\tilde{k}) &= \frac{1}{2^{n+m}} n \sin \pi \tilde{k} (2\Gamma(n+m) \ln 2 + 2\Gamma'(n+m) \\
&\quad - \Gamma(n+m)(\psi(n-\tilde{k}) + \psi(m+\tilde{k}+1))), \\
S_5^{n,m}(\tilde{k}) &= \frac{1}{2^{n+m}} m \sin \pi \tilde{k} (2\Gamma(n+m) \ln 2 + 2\Gamma'(n+m) \\
&\quad - \Gamma(n+m)(\psi(n-\tilde{k}+1) + \psi(m+\tilde{k}))).
\end{aligned}$$

Рассмотрим возможные случаи.

1) Пусть $\tilde{k} = k \geq 0$. Если $n > k$, то

$$S_1^{n,m}(k) = S_2^{n,m}(k) = S_3^{n,m}(k) = S_4^{n,m}(k) = S_5^{n,m}(k) = 0.$$

Если $n < k$, то нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
S_1^{n,m}(k) &= 0, \quad S_2^{n,m}(k) = 0, \quad S_3^{n,m}(k) = \frac{(-1)^{k+1} \pi \Gamma(n+m+1)}{2^{n+m}}, \\
S_4^{n,m}(k) &= \frac{(-1)^k n \pi \Gamma(n+m)}{2^{n+m}}, \quad S_5^{n,m}(k) = \frac{(-1)^k m \pi \Gamma(n+m)}{2^{n+m}}.
\end{aligned}$$

Если $n = k$, то имеем

$$\begin{aligned}
S_1^{k,m}(k) &= \frac{(-1)^{k+1} \pi \Gamma(k+m+1)}{2^{k+m}}, \quad S_2^{k,m}(k) = \frac{(-1)^k m \pi \Gamma(k+m)}{2^{k+m}}, \\
S_3^{k,m}(k) &= 0, \quad S_4^{k,m}(k) = \frac{(-1)^k k \pi \Gamma(k+m)}{2^{k+m}}, \quad S_5^{k,m}(k) = 0.
\end{aligned}$$

2) Пусть $\tilde{k} > 0$. Очевидно, если $m > -\tilde{k}$, то

$$S_1^{n,m}(\tilde{k}) = S_2^{n,m}(\tilde{k}) = S_3^{n,m}(\tilde{k}) = S_4^{n,m}(\tilde{k}) = S_5^{n,m}(\tilde{k}) = 0.$$

Если $m < -\tilde{k} - 1$, то

$$\begin{aligned}
S_1^{n,m}(\tilde{k}) &= 0, \quad S_2^{n,m}(\tilde{k}) = 0, \quad S_3^{n,m}(\tilde{k}) = \frac{(-1)^{\tilde{k}+1} \pi \Gamma(n+m+1)}{2^{n+m}}, \\
S_4^{n,m}(\tilde{k}) &= \frac{(-1)^{\tilde{k}} n \pi \Gamma(n+m)}{2^{n+m}}, \quad S_5^{n,m}(\tilde{k}) = \frac{(-1)^{\tilde{k}} m \pi \Gamma(n+m)}{2^{n+m}}.
\end{aligned}$$

Если $m = -\tilde{k}$, то

$$\begin{aligned}
S_1^{n,-\tilde{k}}(\tilde{k}) &= 0, \quad S_2^{n,-\tilde{k}}(\tilde{k}) = \frac{(-1)^{\tilde{k}} \tilde{k} \pi \Gamma(n-\tilde{k})}{2^{n-\tilde{k}}}, \quad S_3^{n,-\tilde{k}}(\tilde{k}) = 0, \\
S_4^{n,-\tilde{k}}(\tilde{k}) &= 0, \quad S_5^{n,-\tilde{k}}(\tilde{k}) = \frac{(-1)^{\tilde{k}+1} \tilde{k} \pi \Gamma(n-\tilde{k})}{2^{n-\tilde{k}}}.
\end{aligned}$$

Наконец, если $m = -\tilde{k} - 1$, то

$$S_1^{n, -\tilde{k}-1}(\tilde{k}) = 0, \quad S_2^{n, -\tilde{k}-1}(\tilde{k}) = 0, \quad S_3^{n, -\tilde{k}-1}(\tilde{k}) = \frac{(-1)^{\tilde{k}+1} \pi \Gamma(n - \tilde{k})}{2^{n-\tilde{k}-1}},$$

$$S_4^{n, -\tilde{k}-1}(\tilde{k}) = \frac{(-1)^{\tilde{k}} n \pi \Gamma(n - \tilde{k} - 1)}{2^{n-\tilde{k}-1}}, \quad S_5^{n, -\tilde{k}-1}(\tilde{k}) = \frac{(-1)^{\tilde{k}+1} (-\tilde{k} - 1) \pi \Gamma(n - \tilde{k} - 1)}{2^{n-\tilde{k}-1}}.$$

Поэтому заключаем, что

$$\left. \frac{\partial^{n+m} L(w_1, w_2, \tilde{k})}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \right|_{(w_1, w_2) = (1, 1)} = 0$$

для любого числа $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ и любой пары неотрицательных целых чисел n, m такой, что $n + m > 0$. Лемма 3 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. Заметим, что

$$T_{a,b}^c = L(-a_+, b_+, k) + (-1)^{1+k-l} L(-a_-, b_-, l).$$

Если

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} = k, \quad \frac{c_-}{a_- - b_-} = l$$

или

$$\frac{c_+}{a_+ - b_+} = -k - 1, \quad \frac{c_-}{a_- - b_-} = -l - 1,$$

где k и l – неотрицательные целые числа, то применение леммы 3 дает $T_{a,b}^c = 0$, что и завершает доказательство теоремы 1.

5. Доказательство теоремы 2. 1) *Случай отсутствия резонанса.* Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Единственное отличие заключается в том, что

$$(G_{a,b}^c E_{a,b}^c(x, y), v(x, y)) = (E_{a,b}^c(x, y), G_{b,a}^{-c} v(x, y))$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho \geq \varepsilon} E_{a,b}^c(x, y) G_{b,a}^{-c} v(x, y) dx dy = M_{a,b}^c v(0, 0),$$

где

$$M_{a,b}^c = \int_0^\pi A_{+, -a_+}^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}} A_{+, -b_+}^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}} (\sin \theta - i b_+ \cos \theta) d\theta$$

$$+ c_+ \int_0^\pi \ln(\sin \theta) A_{+, -a_+}^{-1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+}} A_{+, -b_+}^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}} d\theta$$

$$- \int_{-\pi}^0 A_{+, -a_-}^{\frac{c_-}{a_- - b_-}} A_{+, -b_-}^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}} (|\sin \theta| - i b_- \cos \theta) d\theta$$

$$- c_- \int_{-\pi}^0 \ln(|\sin \theta|) A_{+, -a_-}^{-1 + \frac{c_-}{a_- - b_-}} A_{+, -b_-}^{-1 - \frac{c_-}{a_- - b_-}} d\theta.$$

Отложим доказательство теоремы 2 на некоторое время. Введем функцию

$$P(w_1, w_2, \omega_1) = \int_0^\pi (w_1 \sin \theta + i \cos \theta)^{\omega_1} (w_2 \sin \theta + i \cos \theta)^{-1 - \omega_1} (\sin \theta + i w_2 \cos \theta) d\theta$$

$$+ \omega_1 (w_2 - w_1) \int_0^\pi \ln(\sin \theta) (w_1 \sin \theta + i \cos \theta)^{\omega_1 - 1} (w_2 \sin \theta + i \cos \theta)^{-1 - \omega_1} d\theta.$$

ЛЕММА 4. *Предположим, что $\operatorname{Re} w_1 > 0$, $\operatorname{Re} w_2 > 0$. Тогда для любого числа $\omega_1 \in \mathbb{C}$*

$$P(w_1, w_2, \omega_1) = \pi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что

$$P(1, 1, \omega_1) = \int_0^\pi d\theta = \pi.$$

Поскольку функция $P(w_1, w_2, \omega_1)$ является аналитической по отношению к w_1, w_2 в секторе $\operatorname{Re} w_1 > 0$, $\operatorname{Re} w_2 > 0$, то достаточно доказать, что

$$\left. \frac{\partial^{n+m} P(w_1, w_2, \omega_1)}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \right|_{(w_1, w_2) = (1, 1)} = 0$$

для любых неотрицательных целых чисел n, m таких, что $n + m > 0$. По формуле Лейбница имеем

$$\begin{aligned} & \left. \frac{(-1)^{n+m} \partial^{n+m} P(w_1, w_2, \omega_1)}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \right|_{(w_1, w_2) = (1, 1)} \\ &= \int_0^\pi \langle -\omega_1, n \rangle \langle 1 + \omega_1, m \rangle (\sin \theta + i \cos \theta)^{-n-m} (\sin \theta)^{n+m} d\theta \\ & - i \int_0^\pi \langle -\omega_1, n \rangle \langle 1 + \omega_1, m - 1 \rangle m (\sin \theta + i \cos \theta)^{-n-m} (\sin \theta)^{n+m-1} \cos \theta d\theta \\ & + \omega_1 \int_0^\pi \langle -\omega_1 + 1, n - 1 \rangle \langle 1 + \omega_1, m \rangle n \ln(\sin \theta) (\sin \theta + i \cos \theta)^{-1-n-m} (\sin \theta)^{n+m-1} d\theta \\ & - \omega_1 \int_0^\pi \langle -\omega_1 + 1, n \rangle \langle 1 + \omega_1, m - 1 \rangle m \ln(\sin \theta) (\sin \theta + i \cos \theta)^{-1-n-m} (\sin \theta)^{n+m-1} d\theta. \end{aligned}$$

Из леммы 1, следствия 1 и леммы 2 следует, что

$$\begin{aligned} & \left. \frac{(-1)^{n+m} \partial^{n+m} P(w_1, w_2, \omega_1)}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \right|_{(w_1, w_2) = (1, 1)} \\ &= I_1^{n,m}(\omega_1) + I_2^{n,m}(\omega_1) + I_3^{n,m}(\omega_1) + I_4^{n,m}(\omega_1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1^{n,m}(\omega_1) &= -\frac{(m + \omega_1) \sin \pi \omega_1 \Gamma(n - \omega_1) \Gamma(m + \omega_1)}{2^{n+m}}, \\ I_2^{n,m}(\omega_1) &= \frac{m \sin \pi \omega_1 \Gamma(n - \omega_1) \Gamma(m + \omega_1)}{2^{n+m}}, \\ I_3^{n,m}(\omega_1) &= \frac{n(m + \omega_1) \sin \pi \omega_1 \Gamma(n - \omega_1) \Gamma(m + \omega_1)}{2^{n+m}(n + m)}, \\ I_4^{n,m}(\omega_1) &= -\frac{m(n - \omega_1) \sin \pi \omega_1 \Gamma(n - \omega_1) \Gamma(m + \omega_1)}{2^{n+m}(n + m)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left. \frac{\partial^{n+m} P(w_1, w_2, \omega_1)}{\partial w_1^n \partial w_2^m} \right|_{(w_1, w_2) = (1, 1)} = 0$$

для любой пары неотрицательных целых чисел n, m такой, что $n + m > 0$. Лемма 4 доказана.

Продолжим доказательство части 1 теоремы 2. В силу леммы 4 имеем

$$M_{a,b}^c = P\left(-a_+, -b_+, \frac{c_+}{a_+ - b_+}\right) - P\left(-a_-, -b_-, \frac{c_-}{a_- - b_-}\right) = 0.$$

Откуда $G_{a,b}^c E_{a,b}^c(x, y) = 0$.

2) *Случай полурезонанса*. Пусть для определенности $a_+ \neq b_+$, $a_- = b_-$. Второй случай полурезонанса рассматривается аналогично. Как и в первой части доказательства теоремы 2, имеем

$$\begin{aligned} (G_{a,b}^c K_{a,b}^c(x, y), v(x, y)) &= (K_{a,b}^c(x, y), G_{b,a}^{-c} v(x, y)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho \geq \varepsilon} K_{a,b}^c(x, y) G_{b,a}^{-c} v(x, y) dx dy = \overline{M}_{a,b}^c v(0, 0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \overline{M}_{a,b}^c &= \int_0^\pi A_{+, -a_+}^{\frac{c_+}{a_+ - b_+}} A_{+, -b_+}^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}} (\sin \theta - i b_+ \cos \theta) d\theta \\ &+ c_+ \int_0^\pi \ln(\sin \theta) A_{+, -a_+}^{-1 + \frac{c_+}{a_+ - b_+}} A_{+, -b_+}^{-1 - \frac{c_+}{a_+ - b_+}} d\theta \\ &- \int_{-\pi}^0 A_{+, -a_-}^{-1} \exp\left[-\frac{c_- |\sin \theta|}{A_{+, -a_-}}\right] (|\sin \theta| - i a_- \cos \theta) d\theta \\ &- c_- \int_0^\pi \ln(\sin \theta) A_{+, -a_-}^{-2} \exp\left[-\frac{c_- \sin \theta}{A_{+, -a_-}}\right] d\theta. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

$$\overline{M}_{a,b}^c = P\left(-a_+, -b_+, \frac{c_+}{a_+ - b_+}\right) - \overline{P}(a_-, c_-),$$

где $P(a_-, c_-)$ является пределом $P(a_-, b_-, c_-/(a_- - b_-))$ при $b_- \rightarrow a_-$. В силу леммы 4 $\overline{P}(a_-, c_-) = \pi$. Отсюда вытекает, что $\overline{M}_{a,b}^c = 0$. Следовательно, $G_{a,b}^c K_{a,b}^c(x, y) = 0$.

3) *Случай резонанса*. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} (G_{a,a}^c R_a^c(x, y), v(x, y)) &= (R_a^c(x, y), G_{a,a}^{-c} v(x, y)) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\rho \geq \varepsilon} R_a^c(x, y) G_{a,a}^{-c} v(x, y) dx dy = N_a^c v(0, 0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 N_a^c &= \int_0^\pi A_{+,-a_+}^{-1} \exp \left[-\frac{c_+ \sin \theta}{A_{+,-a_+}} \right] (\sin \theta - ia_+ \cos \theta) d\theta \\
 &\quad + c_+ \int_0^\pi \ln(\sin \theta) A_{+,-a_+}^{-2} \exp \left[-\frac{c_+ \sin \theta}{A_{+,-a_+}} \right] d\theta \\
 &\quad - \int_{-\pi}^0 A_{+,-a_-}^{-1} \exp \left[-\frac{c_- |\sin \theta|}{A_{+,-a_-}} \right] (|\sin \theta| - ia_- \cos \theta) d\theta \\
 &\quad - c_- \int_0^\pi \ln(\sin \theta) A_{+,-a_-}^{-2} \exp \left[-\frac{c_- \sin \theta}{A_{+,-a_-}} \right] d\theta \\
 &= \overline{P}(a_+, c_+) - \overline{P}(a_-, c_-) = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, $G_{a,a}^c R_a^c(x, y) = 0$. Теорема 2 доказана.

Автор благодарит рецензента за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Hoshiro T. Some examples of hypoelliptic operators of infinitely degenerate type // Osaka J. Math. 1993. V. 30. P. 771–782.
- [2] Reissig M., Yagdjian K. An interesting connection between hypoellipticity and branching phenomena for certain differential operators with degeneracy of infinite order // Rend. Mat. Appl. (7). 1995. V. 15. P. 481–510.
- [3] Tri N. M. Non-smooth solutions for a class of infinitely degenerate elliptic differential operators // Vietnam J. Math. 2000. V. 28. P. 159–172.
- [4] Gilioli A., Treves F. An example in the solvability theory of linear PDEs // Amer. J. Math. 1974. V. 96. P. 367–385.
- [5] Menikoff A. Some examples of hypoelliptic partial differential equations // Math. Ann. 1976. V. 221. P. 176–181.
- [6] Helffer B., Rodino L. Opérateurs différentiels ordinaires intervenant dans l'étude de l'hypoellipticité // Boll. U. M. I. 1977. V. 14-B (5). P. 491–522.
- [7] Tri N. M. Remark on non-uniform fundamental solutions and non-smooth solutions of a class of differential operators with double characteristics // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1999. V. 6. P. 437–452.
- [8] Tri N. M. Note on necessary conditions of hypoellipticity of some classes of differential operators with double characteristics // Kodai Math. J. 2000. V. 23. P. 281–297.
- [9] Федий В. С. Об одном условии гипоеллиптичности // Матем. сб. 1971. Т. 85. С. 18–48.
- [10] Morimoto Y., Morioka T. The positivity of Schrödinger operators and the hypoellipticity of second-order degenerate elliptic operators // Bull. Sci. Math. 1997. V. 121. P. 507–547.

Ханойский институт математики

Поступило
03.03.2000
Исправленный вариант
18.12.2000