Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миронов, Об одном семействе конформно плоских минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^3$, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 374–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 12:45:27

Об одном семействе конформно плоских минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{CP}^3$

А. Е. Миронов

В данной работе дано описание одного семейства минимальных конформно плоских лагранжевых торов в $\mathbb{CP}^3$.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. В данной статье дается описание одного семейства минимальных конформно плоских лагранжевых торов в $\mathbb{CP}^3$.

Подмногообразие в $\mathbb{CP}^3$ вещественной размерности три называется *лагранжевым*, если на нем зануляется симплектическая форма Фубини–Штуди. Подмногообразие в $\mathbb{CP}^3$ (с метрикой Фубини–Штуди) называется *минимальным*, если вариации его объема равны нулю.

В $\mathbb{CP}^2$ минимальные лагранжевы торы хорошо исследованы. Они отвечают (с точностью до конформного растяжения координат) периодическим решениям уравнения Цицейки

$$\partial_x^2 v + \partial_y^2 v = e^{-2v} - 4e^v,$$

где $ds^2 = 2e^{v(x,y)}(dx^2 + dy^2)$ – индуцированная метрика на торе. Примеры таких торов найдены в работах Кастро, Урбано [1], Джойса [2]. Шариповым [3] построены конечнозонные решения уравнения Цицейки и фактически найдены тэта-функциональные формулы, которые пригодны для построения минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{CP}^2$. Минимальные лагранжевы поверхности в $\mathbb{CP}^2$ можно задавать как композицию

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^5 \rightarrow \mathbb{CP}^2,$$

где $\mathcal{H}$ – проекция расслоения Хопфа. В [4] замечено, что если отображение φ является конформным, то компоненты вектор-функции r удовлетворяют уравнению Шрёдингера

$$Lr = \Delta r + 4e^v = 0.$$

Можно показать, что все гладкие периодические решения уравнения Цицейки конечнозонны (см. [4]), поэтому оператор Шрёдингера L конечнозonen на нулевом

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00403, программы “Молодые кандидаты”, грант МК-1017.2004.1, программы “Ведущие научные школы”, грант НШ-2185.2003.1, и программы “Фундаментальные исследования РАН” (Математические методы в нелинейной динамике).

уровне энергии и его изоспектральные деформации, отвечающие уравнениям иерархии Веселова–Новикова, задают высшие коммутирующие потоки на пространстве гладких периодических решений уравнения Цицейки. Как следствие этого мы получаем интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в $\mathbb{C}P^2$, сохраняющие спектр Флоке оператора L и конформный тип тора (деформации, отвечающие первому уравнению оставляют тор геометрически на месте, а, начиная со второго уравнения иерархии, деформации нетривиальны).

В размерности больше 2 запас явных примеров минимальных лагранжевых подмногообразий невелик, что затрудняет исследования таких подмногообразий. В [5] мы построили минимальные и гамильтоново-минимальные погружения в $\mathbb{C}^n$ многообразий следующего вида:

$$M_1 = M^k \times T^{n-k}/\Gamma,$$

где M^k – k -мерное пересечение вещественных квадрик в $\mathbb{R}^n$, T^{n-k} – $(n-k)$ -мерный тор, группа $\Gamma = \mathbb{Z}_2^{n-k}$ свободно действует на $M^k \times T^{n-k}$. В случае, когда M^k является конусом с вершиной в $0 \in \mathbb{C}^n$, эта конструкция дает минимальные и гамильтоново-минимальные подмногообразия в $\mathbb{C}P^{n-1}$; для этого нужно взять пересечение образа M_1 с единичной сферой, а затем применить проекцию расслоения Хопфа. Таким способом можно получить погружения и вложения таких подмногообразий как n -мерная бутылка Клейна K^n , $S^{n-1} \times S^1$, $K^{n-1} \times S^1$, $S^{n-2} \times T^2$ и др. Отображение многообразия M_1 выглядит следующим образом:

$$F(x, y) = (f_1(x)e^{\pi i(e_1, y)}, \dots, f_n(x)e^{\pi i(e_n, y)}), \quad (1)$$

где набор вещественных функций $f_i(x)$ задает карту на M^k , $y \in T^{n-k}$. Как нам недавно указал Д. Джойс, минимальные (но не гамильтоново-минимальные) подмногообразия из [5] могут быть получены методом перпендикулярной симметрии, развитым в [6]. В [6] также изучаются $U(1)^{n-2}$ -инвариантные минимальные лагранжевы конусы в $\mathbb{C}^n$, в частности, в [6] доказано существование семейств конусов над $S^2 \times T^{n-3}$, $S^3 \times T^{n-4}$. К сожалению, в [6] фактически не указано, какие подмногообразия можно получать методом перпендикулярной симметрии. Из основной теоремы в [5] существование конусов над указанными выше многообразиями вытекает тривиально.

Кастро и Вранкен [7] рассмотрели минимальные лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}P^3$, которые допускают поле Киллинга единичной длины, интегральные кривые которого совпадают с геодезическими. Они показали, что такие подмногообразия либо получаются из конструкции Браянта [8], либо отвечают решениям уравнения $\sinh$ -Gordon.

В этой работе мы рассматриваем конформно плоские минимальные лагранжевы подмногообразия M в $\mathbb{C}P^3$. Такие подмногообразия интересны с точки зрения интегрируемых систем. Будем задавать M как образ композиции

$$\varphi = \mathcal{H} \circ r: \mathbb{R}^3 \rightarrow S^7 \rightarrow \mathbb{C}P^3,$$

тогда как и в двумерном случае, компоненты вектор-функции r удовлетворяют уравнению Шрёдингера

$$L\tilde{r} = \Delta\tilde{r} + U\tilde{r} = 0,$$

где $\tilde{r} = e^{2v}r$, $ds^2 = e^{v(x,y,z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ – индуцированная метрика на M , $U(x, y, z) = \frac{1}{4}(2\Delta v + (\nabla v)^2 + 12e^{2v})$. Если отображение φ является периодическим,

то компоненты радиус-вектора $\tilde{r}$ являются блоховскими функциями оператора L (собственными для L и для операторов трансляций – операторов сдвига на периоды). Из лагранжевости и минимальности M , а также конформности φ следует, что матрица R , составленная из координат аналога репера Френе

$$R = \begin{pmatrix} r^1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ e^{-v}r_x^1 & e^{-v}r_x^2 & e^{-v}r_x^3 & e^{-v}r_x^4 \\ e^{-v}r_y^1 & e^{-v}r_y^2 & e^{-v}r_y^3 & e^{-v}r_y^4 \\ e^{-v}r_z^1 & e^{-v}r_z^2 & e^{-v}r_z^3 & e^{-v}r_z^4 \end{pmatrix},$$

принадлежит группе $U(4)$, причем $\det R = \text{const}$ (см. ниже). С точностью до действия на r некоторой постоянной унитарной матрицы можно считать, что $\det R = 1$. Таким образом, задача построения минимальных конформно плоских подмногообразий сводится к построению отображения $r: \mathbb{R}^3 \rightarrow S^7$ такого, что $R \in SU(4)$. Введем матрицы X , Y и Z такие, что

$$R_x = XR, \quad R_y = YR, \quad R_z = ZR. \quad (2)$$

Так как $R \in SU(4)$, то X , Y и Z лежат в алгебре Ли $\mathfrak{su}(4)$. При этом они удовлетворяют уравнениям совместности (нулевой кривизны)

$$X_y - Y_x + [X, Y] = 0, \quad X_z - Z_x + [X, Z] = 0, \quad Y_z - Z_y + [Y, Z] = 0. \quad (3)$$

В этой работе мы рассматриваем полностью интегрируемый случай, когда матрицы X , Y и Z зависят только от одной переменной z . Тогда решением уравнений нулевой кривизны являются матрицы вида (6), (7) и (8) (см. ниже), а аналогом уравнения Цицейки служит нелинейное уравнение

$$v'(z)^2 + e^{2v(z)} + c_3^2 e^{-6v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2) = 0, \quad (4)$$

где c_1 , c_2 и c_3 – некоторые вещественные константы, которое после замены интегрируется с помощью абелева интеграла на гиперэллиптической кривой рода 2.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Если матрицы X, Y, Z зависят только от переменной z , то отображение r , задающее минимальное конформное отображение $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{CP}^3$, с точностью до действия группы $U(4)$ имеет вид*

$$r = (P(z)e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y)}, P(z)e^{i(\alpha_2 x + \beta_2 y)}, P(z)e^{-i((\alpha_1 + \alpha_2)x + (\beta_1 + \beta_2)y)}, P_1(z)), \quad (5)$$

$$P(z) = F(z)e^{iG(z)}, \quad F = \frac{e^{v(z)}}{\sqrt{6(c_1^2 + c_2^2)}}, \quad G(z) = c_3 \int e^{-3v(z)} dz,$$

$$P_1(z) = F_1(z)e^{iG_1(z)}, \quad F_1(z) = \frac{\sqrt{2(c_1^2 + c_2^2) - e^{2v(z)}}}{\sqrt{2(c_1^2 + c_2^2)}},$$

$$G_1(z) = c_3 \int \frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)} dz,$$

где α_1 , α_2 , c_3 – некоторые константы, c_1 и c_2 выражаются через α_1 , α_2 по формулам (28) и (29), $v(z)$ – решение уравнения (4). Если при этом α_1 , α_2 , c_3 такие, что уравнение (25) имеет два отрицательных корня и не имеет кратных корней, $v(z)$ – периодическое решение уравнения (4), α_1 , α_2 и c_4 (см. (27)) – рациональные числа, то отображение φ является периодическим по переменным x , y и z .

Условия теоремы будут выполнены, например, при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $c_3 = 2$. При этом знаменатель в формуле для $G_1(z)$ не обращается в нуль. В этом случае отображение φ является периодическим по x и y , а периодичности по z можно добиться бесконечно малыми шевелениями $c_3 = 2$.

Интересно отметить, что тензор Вейля метрики на многообразиях, получающихся из конструкции Кастро и Вранкена [7], равен 0; следовательно, эти многообразия являются конформно плоскими.

В пункте 2 мы дадим доказательство теоремы 1 и покажем, что построенные в этой теореме примеры многообразий отличаются от многообразий, построенных в [5], [7].

Автор благодарит И. Кастро, приславшего отклик статьи [7].

2. Доказательство теоремы 1. Обозначим через S^7 единичную сферу в $\mathbb{C}^4$, а через $\mathcal{H}: S^7 \rightarrow \mathbb{C}P^3$ – расслоение Хопфа (слоями расслоения Хопфа служат окружности, которые являются пересечениями комплексных прямых в $\mathbb{C}^4$, проходящих через 0, с S^7). Эрмитова структура на $\mathbb{C}P^3$ задается следующим образом. Пусть η_1 и η_2 – касательные векторы к $\mathbb{C}P^3$ в точке $p \in \mathbb{C}P^3$, S_p^1 – слой расслоения Хопфа, отвечающий точке p . Через ξ_1 и ξ_2 обозначим горизонтальные поднятия векторов η_1 и η_2 на S^7 , т.е. ξ_1 и ξ_2 – касательные векторы к S^7 в некоторой точке $r \in S_p^1$ такие, что они ортогональны S_p^1 и $d\mathcal{H}(\xi_j) = \eta_j$. Тогда эрмитово произведение векторов η_1 и η_2 определяется по формуле

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{FS} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi_1, \xi_2 \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – эрмитово произведение в $\mathbb{C}^4$. Ясно, что $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{FS}$ не зависит от их поднятия. Вещественная и мнимая части $\langle \cdot, \cdot \rangle_{FS}$ являются соответственно метрикой Фубини–Штуди и симплектической формой Фубини–Штуди.

Лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}P^3$ можно задавать следующим образом. Обозначим через K лагранжев конус в $\mathbb{C}^4$ с вершиной в 0, т.е. конус вещественной размерности 4, на котором зануляется симплектическая форма $\omega = \text{Im}\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_4 \wedge dy_4,$$

где $z_j = x_j + iy_j$ – координаты в $\mathbb{C}^4$. Проекция $\mathcal{H}(\bar{K})$ пересечения $\bar{K} = S^7 \cap K$ является лагранжевым подмногообразием в $\mathbb{C}P^3$. При этом $\mathcal{H}(\bar{K})$ локально изометрично $\bar{K}$. Действительно, выберем касательный репер e_1, e_2, e_3 к $\bar{K}$ в точке $r \in \bar{K}$. Так как $(r, e_j) = 0$, где $(\cdot, \cdot) = \text{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^4$ и $(ir, e_j) = \omega(r, e_j) = 0$, то касательное пространство к $\bar{K}$ в точке r ортогонально слою расслоения Хопфа, проходящему через r . Следовательно, локальная изометричность $\bar{K}$ и $\mathcal{H}(\bar{K})$ вытекает из того, что $\mathcal{H}$ является римановой субмерсией. Так как $\omega(e_i, e_j) = 0$, то лагранжевость $\mathcal{H}(\bar{K})$ вытекает из определения формы Фубини–Штуди.

Важной характеристикой лагранжевого подмногообразия $\mathcal{H}(\bar{K}) \subset \mathbb{C}P^3$ служит лагранжев угол $\beta(p)$ – функция, которая определяется следующим образом. Выберем ортогональный касательный репер в точке p к подмногообразию $\mathcal{H}(\bar{K})$ и поднимем его на $\bar{K}$. Получим касательный репер e_1, e_2, e_3 к $\bar{K}$, приложенный в точке $r \in \bar{K}$. Положим

$$e^{i\beta(p)} = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_4(r, e_1, e_2, e_3).$$

В общем случае функция $\beta(p)$ является многозначной на $\mathcal{H}(\overline{K})$. При обходе по циклам ее значение может измениться на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Через лагранжев угол (см., например, [5]) определяется средняя кривизна подмногообразия $\mathcal{H}(\overline{K})$ по формуле

$$H = J(\nabla\beta),$$

где ∇ – градиент на $\mathcal{H}(\overline{K})$ в индуцированной метрике, J – оператор комплексной структуры на $\mathbb{C}P^3$.

Таким образом, лагранжевы подмногообразия в $\mathbb{C}P^3$ с конформно плоской метрикой можно задавать как образ композиции $\mathcal{H}$ и такого отображения

$$r: \mathbb{R}^3 \rightarrow S^7,$$

что репер $(r, r_x e^{-v}, r_y e^{-v}, r_z e^{-v})$ унитарен для всех x, y и z , где $e^{v(x,y,z)} = |r_x| = |r_y| = |r_z|$ – конформный множитель. В случае, когда многообразие минимально, из формулы для средней кривизны следует, что лагранжев угол постоянен; следовательно, после подходящего умножения r на постоянную унитарную матрицу можно считать, что $e^{i\beta} = \det R = 1$, т.е. $R \in \text{SU}(4)$.

Имеет место

ЛЕММА 1. Если матрицы X, Y и Z зависят только от переменной z и удовлетворяют уравнениям нулевой кривизны (2), то они имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & e^{v(z)} & 0 & 0 \\ -e^{v(z)} & -ic_1 & ic_2 & ic_3 e^{-3v(z)} - v'(z) \\ 0 & ic_2 & ic_1 & 0 \\ 0 & ic_3 e^{-3v(z)} + v'(z) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{v(z)} & 0 \\ 0 & ic_2 & ic_1 & 0 \\ -e^{v(z)} & ic_1 & -ic_2 & ic_3 e^{-3v(z)} - v'(z) \\ 0 & 0 & ic_3 e^{-3v(z)} + v'(z) & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{v(z)} \\ 0 & ic_3 e^{-3v(z)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ic_3 e^{-3v(z)} & 0 \\ -e^{v(z)} & 0 & 0 & -2ic_3 e^{-3v(z)} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где функция $v(z)$ удовлетворяет уравнению (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (2) и из $X, Y, Z \in \text{su}(4)$ получаем, что X, Y, Z имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & e^{v(z)} & 0 & 0 \\ -e^{v(z)} & if_1 & if_4 & -v_z + if_6 \\ 0 & if_4 & if_2 & if_8 \\ 0 & v_z + if_6 & if_8 & -i(f_1 + f_2) \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{v(z)} & 0 \\ 0 & if_4 & if_2 & if_8 \\ -e^{v(z)} & if_2 & if_9 & -v_z + if_3 \\ 0 & if_8 & v_z + if_3 & -i(f_4 + f_9) \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & e^{v(z)} \\ 0 & if_6 & if_8 & -i(f_1 + f_2) \\ 0 & if_8 & if_3 & -i(f_4 + f_9) \\ -e^{v(z)} & -i(f_1 + f_2) & -i(f_4 + f_9) & -i(f_6 + f_3) \end{pmatrix},$$

где $f_j = f_j(z)$ – вещественные функции. Далее, из уравнений (2) прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем, получаем, что эти матрицы имеют вид (6), (7) и (8). Лемма доказана.

Справедлива

ЛЕММА 2. *Пространство вектор-функций вида*

$$\tilde{R} = (\tilde{r}, e^{-v(z)}\tilde{r}_x, e^{-v(z)}\tilde{r}_y, e^{-v(z)}\tilde{r}_z)^\top,$$

удовлетворяющих уравнениям

$$\tilde{R}_x - X\tilde{R} = 0, \quad (9)$$

$$\tilde{R}_y - Y\tilde{R} = 0, \quad (10)$$

$$\tilde{R}_z - Z\tilde{R} = 0, \quad (11)$$

задается следующими функциями:

$$\tilde{r}_j = P(z)e^{i(\alpha_j x + \beta_j y)}, \quad 1 \leq j \leq 3, \quad \tilde{r}_4 = P_1(z),$$

где α_j – вещественный корень уравнения

$$\alpha^3 - 3(c_1^2 + c_2^2)\alpha + 2c_1(c_1^2 + c_2^2) = 0, \quad (12)$$

$$\beta_j = -\frac{c_2\alpha_j}{c_1 - \alpha_j}, \quad (13)$$

функции $P(z)$, $P_1(z)$ имеют вид (14), (15), (23), (24).

Таким образом, размерность этого пространства вектор-функций не превышает 4 и равна 4 в случае, когда уравнение (12) имеет три различных вещественных корня.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнений (9) и (10) получаем

$$\tilde{r}_{xz}e^{3v} - \tilde{r}_x(ic_3 + e^{3v}v'(z)) = 0,$$

$$\tilde{r}_{yz}e^{3v} - \tilde{r}_y(ic_3 + e^{3v}v'(z)) = 0.$$

Следовательно, функция $\tilde{r}$ имеет вид

$$\tilde{r} = P(z)f(x, y) + P_1(z),$$

где $P(z)$, $P_1(z)$ – некоторые вещественные функции. Подставляя $\tilde{r}$ в уравнение (11), получим, что функция $P(z)$ удовлетворяет уравнению

$$c_3P(z) + ie^{3v(z)}(P'(z) - P(z)v'(z)) = 0.$$

Положим

$$P(z) = F(z)e^{iG(z)}, \quad (14)$$

где $F(z)$ и $G(z)$ вещественные функции; тогда

$$F(z) = ae^{v(z)}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad G(z) = c_3 \int e^{-3v(z)} dz. \quad (15)$$

Далее, из (9) получаем

$$\begin{aligned} & ae^{iG} f(c_3^2 + e^{8v} + e^{6v}(v')^2) \\ & + e^{2v}(e^{5v}P_1 + P_1'(-ic_3 + e^{3v}v') + ae^{iG+4v}(-ic_2f_y + ic_1f_x + f_{xx})) \\ & = e^{2v}(e^{5v}P_1 - ic_3P_1' + e^{3v}P_1'v' + ae^{iG+4v}(2(c_1^2 + c_2^2)f - ic_2f_y + ic_1f_x + f_{xx})) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$-i(c_1f_y + c_2f_x) + f_{xy} = 0. \quad (17)$$

Из (10) получаем

$$\begin{aligned} & ae^{iG} f(c_3^2 + e^{8v} + e^{6v}(v')^2) \\ & + e^{2v}(e^{5v}P_1 + P_1'(-ic_3 + e^{3v}v') + ae^{iG+4v}(ic_2f_y - ic_1f_x + f_{yy})) \\ & = e^{2v}(e^{5v}P_1 - ic_3P_1' + e^{3v}P_1'v' + ae^{iG+4v}(2(c_1^2 + c_2^2)f + ic_2f_y - ic_1f_x + f_{yy})) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из (11) следует

$$\begin{aligned} & e^{7v}P_1 + 2ic_3e^{2v}P_1' + e^{5v}(-P_1'v' + P_1'') + ae^{iG}f(-3c_3 + e^{8v} + e^{6v}v'') \\ & = e^{7v}P_1 + 2ic_3e^{2v}P_1' + e^{5v}(-P_1'v' + P_1'') = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Можно считать, что в ряде Фурье функции f

$$f(x, y) = \sum a_{\alpha_j \beta_j} e^{i(x\alpha_j + y\beta_j)}$$

коэффициент a_{00} равен нулю; тогда из (16) и (18) следует

$$2(c_1^2 + c_2^2)f - ic_2f_y + ic_1f_x + f_{xx} = 0, \quad (20)$$

$$2(c_1^2 + c_2^2)f + ic_2f_y - ic_1f_x + f_{yy} = 0, \quad (21)$$

$$e^{5v}P_1 - ic_3P_1' + e^{3v}P_1'v' = 0. \quad (22)$$

Покажем, что уравнение (19) вытекает из (4) и (22). Выразим $P_1'(z)$ и $P_1''(z)$ из (22) и подставим в (19):

$$\begin{aligned} P_1'(z) &= -\frac{e^{5v(z)}P_1(z)}{e^{3v(z)}v'(z) - ic_3}, \\ P_1''(z) &= \frac{e^{5v(z)}P_1(z)(e^{5v(z)} + 5ic_3v'(z) - 2e^{3v(z)}v'^2(z) + e^{3v(z)}v''(z))}{(e^{3v(z)}v'(z) - ic_3)^2}. \end{aligned}$$

Получим

$$\frac{e^{5v(z)}P_1(z)(-3c_3^2 + e^{8v(z)} + e^{6v(z)}v''(z))}{(e^{3v(z)}v'(z) - ic_3)^2} = 0.$$

Последнее вытекает из (4). Подставим ряд Фурье функции f в уравнения (17), (20) и (21). Получим, что α_j удовлетворяет уравнению (12), а β_j выражается через α_j по формуле (13).

Теперь положим в (22)

$$P_1(z) = F_1(z)e^{iG_1(z)}, \quad (23)$$

где F_1 и G_1 – вещественные функции. Получим

$$e^{5v(z)}F_1(z) + (F_1'(z) + iF_1(z)G_1'(z))(-ic_3 + e^{3v(z)}v'(z)) = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} e^{5v(z)}F_1(z) + c_3F_1(z)G_1'(z) + e^{3v(z)}F_1'(z)v'(z) &= 0, \\ -c_3F_1'(z) + e^{3v(z)}F_1(z)G_1'(z)v'(z) &= 0. \end{aligned}$$

Из последних двух равенств имеем

$$\begin{aligned} G_1'(z) &= -\frac{c_3e^{5v(z)}}{c_3^2 + e^{6v(z)}v'^2(z)} = \frac{c_3e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)}, \\ e^{8v(z)}F_1(z)v'(z) + F_1'(z)(c_3^2 + e^{6v(z)}v'^2(z)) &= 0 \end{aligned}$$

или, эквивалентно,

$$(2c_1^2 + 2c_2^2 - e^{2v(z)})F_1'(z) + e^{2v(z)}F_1(z)v'(z) = 0.$$

Следовательно,

$$G_1(z) = c_3 \int \frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)} dz, \quad F_1(z) = \gamma_1 \sqrt{2(c_1^2 + c_2^2) - e^{2v(z)}}, \quad (24)$$

где γ_1 – некоторая константа. Лемма 2 доказана.

Прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем, проверяется, что если уравнение (12) имеет три различных вещественных корня, то для отображения r , заданного формулой (5), матрица R принадлежит $SU(4)$.

Для построения периодических отображений φ нам понадобится

ЛЕММА 3. *Если уравнение*

$$Q(x) = 256c_3^2x^5 + 8(c_1^2 + c_2^2)x^2 + x = 0 \quad (25)$$

имеет два отрицательных корня и при этом не имеет кратных корней, то уравнение (4) имеет гладкое периодическое решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем замену $v(z) = -\log(2\sqrt{-u(z)})$ в уравнении (4). Получим уравнение для $u(z)$

$$u'^2 = 256c_3^2u^5 + 8(c_1^2 + c_2^2)u^2 + u. \quad (26)$$

Решение этого уравнения – это обратная функция к абелеву интегралу

$$\int \frac{du}{\sqrt{256c_3^2u^5 + 8(c_1^2 + c_2^2)u^2 + u}}.$$

Уравнение

$$y^2 = 256c_3^2x^5 + 8(c_1^2 + c_2^2)x^2 + x$$

задает в $\mathbb{C}^2$ гиперэллиптическую кривую Γ рода 2 с антиголоморфной инволюцией

$$\sigma: (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}).$$

Периодические решения уравнения (26) отвечают вещественным циклам γ кривой Γ : $\sigma(\gamma) = \gamma$, причем значения функции $u(z)$ будут заключены между соответствующими вещественными корнями уравнения $Q(x) = 0$, которые задают цикл γ .

Таким образом, для существования периодического отрицательного решения уравнения (26) достаточно наличия двух отрицательных корней. Если x_1 и x_2 – наименьшие из них, то $Q(x) > 0$ при $x \in (x_1, x_2)$. В этом случае

$$\gamma = \{(x, y): x \in [x_1, x_2], y = \pm \sqrt{Q(x)}\}.$$

Лемма 3 доказана.

Предположим, что $v(z)$ – периодическое решение уравнения (4) с периодом τ . Тогда имеет место

ЛЕММА 4. Если числа α_1, α_2 и c_4 рациональные, где

$$c_4 = \frac{c_3 \tau}{2\pi} \int_0^\tau \left(\frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)} - e^{-3v(z)} \right) dz, \quad (27)$$

то отображение φ периодически по переменным x, y и z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из уравнения (12) получаем

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 = -3(c_1^2 + c_2^2), \quad \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -2c_1(c_1^2 + c_2^2),$$

откуда

$$c_1 = \frac{3\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3)} = \frac{3\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)}{2(\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2)}, \quad (28)$$

$$c_2 = \pm \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + 2\alpha_2)}{2\sqrt{3}(\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2)}. \quad (29)$$

Таким образом, если $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$, то $c_1 \in \mathbb{Q}$ и, следовательно, из формулы (13) вытекает, что числа β_j соизмеримы. Поэтому отображение $\mathcal{H}or$ является периодическим по переменным x и y .

Выясним, когда отображение φ периодически по z . Из формулы (5) следует, что для этого необходима периодичность функции

$$\frac{P_1(z)}{P(z)} = E(z)e^{iS(z)},$$

где

$$E(z) = \sqrt{3} \frac{\sqrt{2(c_1^2 + c_2^2) - e^{2v(z)}}}{e^{v(z)}}, \quad S(z) = c_3 \int \left(\frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)} - e^{-3v(z)} \right) dz.$$

Функция $E(z)$ периодична с периодом τ . Функция $S(z)$ имеет вид

$$S(z) = c_3 V(z) + c_3 k z + \text{const},$$

где $V(z)$ – некоторая периодическая функция с тем же периодом τ , что и $v(z)$, а константа k находится по формуле

$$k = \int_0^\tau \left(\frac{e^{-v(z)}}{e^{2v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2)} - e^{-3v(z)} \right) dz.$$

Функция

$$e^{iS(z)} = e^{i(c_3 V(z) + c_3 k z + \text{const})}$$

периодична с периодом $N\tau$, где N – некоторое натуральное число, если $c_3 k \tau \in 2\pi\mathbb{Q}$. Лемма 4 доказана. Таким образом, теорема 1 доказана.

В двумерном случае компоненты периодического лагранжева минимального отображения

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$$

задаются с помощью функции Бейкера–Ахиезера на спектральной кривой конечно-зонного оператора Шрёдингера. Естественно возникает вопрос: с помощью каких функций задается отображение φ в многомерном случае? В [5] мы нашли все отображения вида (1) в случае, когда функции $f_i(x)$ вещественные. Изначальной целью этой работы было понять, на сколько усложнятся уравнения, если в формуле (1) снять ограничения вещественности функций $f_i(x)$. И то, что примеры, построенные в теореме 1 и в [5], различны, сразу следует из задающих их формул. Более формально. При фиксированных x и y отображение φ задает замкнутую кривую, которая может иметь сколько угодно точек самопересечений (число точек самопересечений зависит от числа c_4), т.е. образ φ выглядит как произведение замкнутой кривой с самопересечениями (“ромашки”) на двумерный тор с координатами x , y , поэтому у образа φ точки самопересечения возникают на несвязных подмногообразиях. Как отмечено в [5], точки самопересечения у образа M_1 могут возникать только на координатных гиперповерхностях (или их пересечениях) и это множество связно.

Как уже отмечалось выше, минимальные лагранжевы подмногообразия, отвечающие уравнению $\sinh$ -Gordon из [7], также являются конформно плоскими. Покажем, что на торе с метрикой $e^{v(z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ не существует полей Киллинга единичной длины. Пусть поле Киллинга W имеет координаты $(V_1(x, y, z), V_2(x, y, z), V_3(x, y, z))$. Тогда пять нужных нам из девяти уравнений Киллинга на поле W имеют вид

$$\begin{aligned} \partial_y V_1 + \partial_x V_2 &= 0, \\ \partial_x V_1 + \frac{1}{2} \partial_z v V_3 &= 0, \\ \partial_y V_2 + \frac{1}{2} \partial_z v V_3 &= 0, \\ \partial_z V_2 - \partial_z v V_2 + \partial_y V_3 &= 0, \\ \partial_z V_1 - \partial_z v V_1 + \partial_x V_3 &= 0. \end{aligned}$$

Из первых трех уравнений получаем, что функции V_1 и V_2 зависят только от z , а V_3 равно 0, из последних двух уравнений следует, что эти функции имеют вид $V_1 = C_1 e^{v(z)}$, $V_2 = C_2 e^{v(z)}$. Следовательно, поле Киллинга W не может иметь постоянную длину 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Castro, F. Urbano, “New examples of minimal Lagrangian tori in the complex projective plane”, *Manuscripta Math.*, **85**:3–4 (1994), 265–281.
- [2] D. Joyce, “Special Lagrangian 3-folds and integrable systems”, *Adv. Studies in Pure Math.* (to appear); [arXiv:math.DG/0101245](#)
- [3] Р. А. Шарипов, “Минимальные торы в пятимерной сфере в $\mathbb{C}^3$ ”, *ТМФ*, **87**:1 (1991), 48–56.
- [4] А. Е. Миронов, “Иерархия уравнений Веселова–Новикова и интегрируемые деформации минимальных лагранжевых торов в CP^2 ”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **1** (2004), 38–46.
- [5] А. Е. Миронов, “О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и CP^n ”, *Матем. сб.*, **195**:1 (2004), 89–102.
- [6] D. Joyce, “Special Lagrangian m -fold in $\mathbb{C}^m$ with symmetries”, *Duke Math. J.*, **115**:1 (2002), 1–51.
- [7] I. Castro, L. Vrancken, “Minimal Lagrangian submanifolds in CP^3 and the sinh-Gordon equation”, *Results Math.*, **40** (2001), 130–143.
- [8] R. L. Bryant, “Conformal and minimal immersion into the 4-sphere”, *J. Differential Geom.*, **17**:3 (1982), 455–473.

А. Е. Миронов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирск

E-mail: miroнов@math.nsc.ru

Поступило

21.12.2005

Исправленный вариант

25.05.2006