Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, И. Д. Шкредов, О мультипликативных свойствах по модулю m чисел с пропущенными цифрами, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 385–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3681>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 18:01:05

О мультипликативных свойствах по модулю m чисел с пропущенными цифрами

Н. Г. Мощевитин, И. Д. Шкредов

Получены оценки сверху для сумм значений характеров по составному модулю по множествам чисел с пропущенными цифрами в некоторой системе счисления. Имеются результаты о разрешимости сравнений вида $x_1 \cdots x_t \equiv \lambda \pmod{m}$ в числах с пропущенными цифрами и асимптотические формулы для количества решений.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Всюду ниже s, k – натуральные числа, $D = \{d_0, \dots, d_k\} \subset \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 = d_0 < d_1 < \dots < d_k < s$, $1 \leq k \leq s-2$, – некоторое фиксированное множество цифр в системе счисления по основанию s и $(d_1, \dots, d_k) = 1$. В настоящей работе исследуется распределение элементов множеств вида

$$K_s^D(N) = \left\{ x \in \mathbb{N}_0 : x < N, x = \sum_{j=0}^h \delta_j s^j, \delta_j \in D \right\} \quad (1)$$

в мультипликативной группе вычетов по модулю m . Ниже мы всюду полагаем

$$(m, s) = 1.$$

Недавно С. В. Конягин [1] доказал, что для натуральных N и m , $(m, s) = 1$, таких, что

$$N > \exp(\gamma \log m \log \log m)$$

(здесь γ – некоторая постоянная, зависящая от s), элементы множества $K_s^D(N)$ равномерно распределены по модулю m . В качестве следствия получалось, что при указанных условиях для всякого целого x найдется $a \in K_s^D(N)$ такое, что $a \equiv x \pmod{m}$. В этой же работе Конягин ставит следующую задачу: верно ли, что существует некоторая постоянная $\sigma(s)$, что в предположении

$$N > m^{\sigma(s)} \quad (2)$$

в множестве $K_s^D(N)$ встречаются все вычеты по модулю m . Сам Конягин дает положительный ответ на этот вопрос для “почти всех” натуральных m . В самом простом

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ, гранты № МД-3003.2006.1 и № МК-1726.2006.1, Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 06-01-00518 и № 06-01-00383, и фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

случае, когда $\text{ord}_m s \leq \beta \log m$ с некоторой константой $\beta > 0$, положительный ответ дан в [2].

В настоящей работе мы доказываем ряд результатов о распределении элементов множеств (1) по модулю m при условии (2): оцениваем суммы значений характеров по модулю m на элементах множеств (1) и доказываем ряд утверждений о количестве $T_l(N, m, \lambda)$ решений сравнений вида

$$x_1 \cdots x_l \equiv \lambda \pmod{m}, \quad x_j \in K_s^D(N),$$

при $(\lambda, m) = 1$. В частности, для произвольного натурального m и $l \geq 4$ при $N \geq m^\sigma$ с достаточно большим положительным σ для числа решений сравнения будет доказана асимптотическая формула

$$T_l(N, m, \lambda) = \frac{|K_s^D(N, m)|^l}{\varphi(m)} \cdot (1 + O(\exp(-\sqrt{\gamma \log m}))), \quad \gamma > 0, \quad m \rightarrow \infty;$$

если $l = 3$, то будет доказана формула

$$T_3(N, m, \lambda) = \frac{|K_s^D(N, m)|^3}{\varphi(m)} \cdot \left(1 + O\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma \log m \log \log \log m}{\log \log m}} \right) \right) \right),$$

$$\gamma > 0, \quad m \rightarrow \infty,$$

где $|K_s^D(N, m)|$ есть количество элементов в множестве

$$K_s^D(N, m) = \{x \in K_s^D(N) : (x, m) = 1\}.$$

В случае $l = 2$ нами будет получена оценка

$$T_2(N, m, \lambda) \ll \frac{|K_s^D(N)|^2}{\varphi(m)} \cdot m^\varepsilon, \quad m \rightarrow \infty,$$

причем для мощности “исключительного множества” (т.е. множества тех λ , для которых сравнение $x_1 x_2 \equiv \lambda \pmod{m}$ неразрешимо в числах $x_j \in K_s^D(N)$) будет получена оценка сверху вида $O(\varphi(m) \cdot \exp(-\sqrt{\gamma \log m}))$, $\gamma > 0$. Особо отметим, что в случае $m = p$ – простое число вместо упомянутых двух первых оценок будет справедлив более сильный результат

$$T_l(N, p, \lambda) = \frac{|K_s^D(N, p)|^l}{p-1} \cdot (1 + O(p^{-l/2+1+l\varepsilon})), \quad l \geq 3,$$

при σ достаточно большом в зависимости от ε , а для исключительного множества в бинарной задаче при $m = p$ у нас будет оценка $O(p^\varepsilon)$.

Точные формулировки основных результатов настоящей работы даны в п. 6 (суммы значений характеров) и пп. 7, 8 (числа решений сравнений); пп. 2–5 посвящены определению основных величин и формулировкам и доказательствам вспомогательных утверждений. Отметим, что ряд результатов в случае, когда $m = p$ – простое число был анонсирован в [2], однако там имеются неточности (см. замечания после следствия 1 теоремы 3 из п. 7 настоящей работы), а доказательства приведены лишь схематически. Здесь же мы приводим полные доказательства всех теорем.

В отличие от работы [2], где использовалась лемма В. Шмидта [3], основным инструментом доказательств настоящей работы будет лемма Конягина [1; лемма 1] (ее доказательство мы, естественно, здесь не приводим; оно, в свою очередь, использует соображения из работы П. Эрдёша, А. Шаркози, К. Мадуй [4]).

Отметим, что при малых значениях N (таких, что $K_s^D(N) \gg p^{1/2+\varepsilon}$) нетривиальные оценки сумм значений характера по простому модулю p могут быть получены с помощью применения оценок А. Вейля, что сделано в работе [5]. Ряд арифметических свойств множеств (1) получен в [6]. В частности, там доказана асимптотическая формула для количества элементов в множестве

$$K_s^D(N, m) = \{x \in K_s^D(N) : (x, m) = 1\},$$

которая тоже имеет отношение к настоящей работе (см. замечание к лемме 3 из п. 6). Отметим также, что, как показано в работе [7], некоторые результаты о распределении элементов множеств (1) по модулю m могут быть получены с помощью исследования количества решений сравнений вида

$$x_1 + \dots + x_l \equiv y_1 + \dots + y_l \pmod{m}, \quad x_j, y_j \in K_s^D(N).$$

Утверждения, имеющиеся в [7], можно получить, применяя теоремы типа неравенства Плуеке (см. [8; гл. 7]). Некоторые результаты могут быть получены с помощью классического подхода Шмидта [3].

2. Конечные ряды Фурье для характеров по составному модулю. Пусть $m = \prod_{1 \leq j \leq t} p_j^{\alpha_j}$ – каноническое разложение числа m на простые множители. Пусть $\chi(x)$ – характер по модулю m . Тогда согласно китайской теореме об остатках

$$\chi(x) = \prod_{1 \leq j \leq t} \chi_j(x),$$

где χ_j суть некоторые характеры по модулям $p_j^{\alpha_j}$ соответственно. Нам понадобится разложение характера χ в конечный ряд Фурье

$$\chi(x) = \sum_{y=1}^m c_m(\chi, y) \exp\left(2\pi i \frac{xy}{m}\right).$$

Заметим, что если характер $\chi = \chi_0$ является главным по модулю m , то его коэффициенты Фурье называются *суммами Рамануджана* (см. [9]) и вычисляются по формуле

$$c_m(\chi_0, y) = \frac{\mu(Y)\varphi(m)}{m\varphi(Y)},$$

где $\mu(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ суть функции Мёбиуса и Эйлера, а $Y = m/(m, y)$.

Рассмотрим некоторый делитель $a \mid m$, $a = \prod_{1 \leq j \leq t} p_j^{\beta_j}$, $0 \leq \beta_j \leq \alpha_j$. Для этого делителя определим непересекающиеся множества индексов

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_1(m, a) = \{j \mid 1 \leq j \leq t, \beta_j > 0\}, \quad \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_2(m, a) = \{j \mid 1 \leq j \leq t, \beta_j = 0\}.$$

Пусть

$$m = m_1 m_2, \quad m_\nu = m_\nu(a) = \prod_{j \in \mathcal{J}_\nu} p_j^{\alpha_j}, \quad (m_1, a) = a, \quad (m_2, a) = 1. \quad (3)$$

ЛЕММА 1. Множество всех характеров по модулю t распадается в дизъюнктное объединение множеств

$$\bigsqcup_{a|t} \Xi_a$$

так, что Ξ_1 состоит из одного главного характера по модулю t , а из принадлежности $\chi \in \Xi_a$, $a > 1$, следует, что характер χ представим в виде

$$\chi(x) = \chi^{(1)}(x) \cdot \chi^{(2)}(x),$$

где $\chi^{(1)}$ есть неглавный характер по модулю t_1 , причем

$$\chi^{(1)}(x) = \sum_{\substack{1 \leq y \leq a \\ (a,y)=1}} c^{(1)}(y) \exp\left(2\pi i \frac{xy}{a}\right),$$

и при каждом y выполняется

$$|c^{(1)}(y)| = a^{-1/2},$$

а $\chi^{(2)}(x)$ есть главный характер по модулю t_2 . Для мощностей множеств Ξ_a выполнено равенство

$$|\Xi_a| = \sum_{d|a} \mu(d) \varphi\left(\frac{a}{d}\right) = \prod_{j=1}^t f(p_j^{\beta_j}), \quad f(p^\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ p-2, & \beta = 1, \\ p^{\beta-2}(p-1)^2, & \beta \geq 2. \end{cases} \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если $t_1 = 1$, то можно считать, что лемма 1 справедлива с $\chi^{(1)}(x) = 1 \quad \forall x$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Естественно, в случае $t = p$ из леммы 1 для неглавного характера получается равенство $|c_m(\chi, y)| = p^{-1/2}$ для любого y взаимно простого с p .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ясно, что выполнено неравенство

$$|\Xi_a| \leq a \quad \forall a | t. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1 имеется, например, в [10; с. 349–355, § 9, приложение].

Отметим, что в разложениях $\chi = \chi^{(1)}\chi^{(2)}$ характеры $\chi^{(1)}$ из множества Ξ_a являются неглавными примитивными характерами по модулю a . Если χ – неглавный характер по модулю t , то для того, чтобы понять, при каком a будет выполнено $\chi \in \Xi_a$, надо представить χ в виде $\chi = \chi^{(1)}\chi^{(2)}$, где $\chi^{(2)}$ – главный характер по модулю t_2 , а $\chi^{(1)}$ – такой характер по модулю t_1 ($t = t_1 t_2$, $(t_1, t_2) = 1$), что он является характером по модулю a (здесь a есть делитель числа t_1), но не является характером ни по какому меньшему модулю $a' | a$.

3. О тригонометрических суммах. Будем рассматривать тригонометрические суммы вида

$$S_{d,w} = \sum_{\substack{1 \leq y \leq d \\ (y,d)=1}} \left| \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \exp\left(2\pi i \frac{xy}{d}\right) \right|,$$

$$S_{d,w}(\chi, b) = \sum_{\substack{1 \leq y \leq d \\ (y,d)=1}} \left| \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi(x+b) \exp\left(2\pi i \frac{xy}{d}\right) \right|,$$

где χ – характер по модулю m .

Всюду ниже будем считать, что натуральное r выбрано из условия

$$s^{r-1} \leq m < s^r. \quad (6)$$

Основным инструментом будет следующая лемма, доказанная Конягиным.

ЛЕММА 2 (см. [1; лемма 1]). Пусть $m \geq s$. С некоторыми положительными постоянными $\gamma_\nu = \gamma_\nu(s)$, $\nu = 1, 2$, при $w \geq 2r$ выполняется оценка

$$\sum_{d \leq m} S_{d,w} \leq |K_s^D(s^w)| \left(\exp\left(\gamma_1 \cdot \frac{\log m}{\exp(\gamma_2 w / \log m)}\right) - 1 \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 2 является непосредственной переформулировкой результата из [1]; там требуется условие $m \geq s$. Однако ясно, что лемма 2 справедлива и при любом $m \geq 2$ с несколько большим γ_1 и заменой знака ' $\leq$ ' на ' $\ll$ '.

4. Оценки вспомогательных величин. Фиксируем положительное ε . Всюду ниже считаем, что σ достаточно велико, т.е. $\sigma \geq \sigma_0(s, \varepsilon)$ и $w \geq \sigma r$.

Для делителя $a \mid m$ рассмотрим величины $m_\nu = m_\nu(a)$, задаваемые формулами (3), положим $\overline{m}_2 = \max\{m_2, 3\}$ и определим величины

$$R_w^1(m, a) = \frac{\log \log \overline{m}_2}{a^{1/2}} \sum_{2 \leq q \leq m_2} \frac{1}{q^2} \cdot \left(\exp\left(\frac{\gamma_1 \log a q}{\exp(\gamma_2 w / \log a q)}\right) - 1 \right), \quad (7)$$

$$R_w^2(m, a) = \frac{\log \log \overline{m}_2}{a^{1/2} m_2} \left(\exp\left(\frac{\gamma_1 \log a m_2}{\exp(\gamma_2 w / \log a m_2)}\right) - 1 \right) \quad (8)$$

(заметим, что если $a = 1$, то $m_2 = m$),

$$R_w^3(m, a) = \frac{\varphi(m_2)}{a^{1/2} m_2} \left(\exp\left(\frac{\gamma_1 \log a}{\exp(\gamma_2 w / \log a)}\right) - 1 \right) \quad (9)$$

(эту величину определяем только при $a > 1$) и

$$\Delta_w(m, a) = R_w^1(m, a) + R_w^2(m, a) + R_w^3(m, a). \quad (10)$$

При $a = m = p$ простым, $m_2 = 1$ и из определения величин R_w^j при $\sigma \geq \sigma_0(s, \varepsilon)$ и $w \geq \sigma r$ будет выполнено

$$\Delta_w(p, p) \ll p^{-1/2+\varepsilon}. \quad (11)$$

Для оценок в общем случае нам понадобятся неравенство

$$\exp\left(\frac{\xi}{\exp(b/\xi)}\right) - 1 \ll \frac{\xi}{\exp(b/\xi)} \quad \text{при} \quad 0 \leq \xi \leq \frac{b}{\log b} \quad (12)$$

и соотношение

$$\max_{\xi: \xi \geq c} \exp\left(-\log \xi - \frac{b}{\log \xi}\right) = \begin{cases} \exp(-2\sqrt{b}), & \text{если } c \leq \exp(\sqrt{b}), \\ \frac{1}{c \cdot \exp(b/\log c)}, & \text{если } c \geq \exp(\sqrt{b}). \end{cases} \quad (13)$$

Оценим $R_w^1(m, a)$. Во-первых, для q из соответствующей области суммирования выполнено $aq \leq am_2 \leq m$ и, следовательно,

$$\frac{\gamma_2 w}{\log q m_2} \geq \frac{\gamma_2 w}{\log m} \geq \frac{\gamma_2 \sigma}{\log s}.$$

Таким образом, при достаточно большом σ будет выполнено

$$\frac{\gamma_1}{\exp(\gamma_2 w / \log am_2)} \leq \varepsilon$$

(использовано определение величины w из самого начала текущего пункта и определение величины r из условия (6)). А поскольку при малом ε ряд $\sum_q q^{-2+\varepsilon}$ очевидно сходится, всегда будет иметь место оценка

$$R_w^1(m, a) \ll \frac{\log \log \overline{m_2}}{a^{1/2-\varepsilon}}. \quad (14)$$

Во-вторых, обозначив

$$E = \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1 \gamma_2 w}\right),$$

запишем

$$\sum_{2 \leq q \leq m_2} \frac{1}{q^2} \cdot \left(\exp\left(\frac{\gamma_1 \log aq}{\exp(\gamma_2 w / \log aq)}\right) - 1 \right) = \sum_{q \leq E/a} + \sum_{q > E/a}.$$

Рассуждая так же, как и при получении оценки (14), убеждаемся, что

$$\sum_{q > E/a} \leq \sum_{q > E/a} q^{-2+\varepsilon} a^\varepsilon = O\left(\frac{a}{E^{1-\varepsilon}}\right).$$

Если теперь выполнено

$$a \leq E^{1/3} = \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{3 \log \gamma_1 \gamma_2 w}\right),$$

то при достаточно большом σ (достаточно малом ε) получается

$$R_w^1(m, a) \ll \frac{\log \log \overline{m_2}}{a^{1/2}} \left(\sum_{2 \leq q \leq E/a} \frac{1}{q^2} \cdot \left(\exp\left(\frac{\gamma_1 \log aq}{\exp(\gamma_2 w / \log aq)}\right) - 1 \right) + O(E^{-1/3}) \right),$$

причем здесь уже в каждом слагаемом суммы по q можно применить неравенство (12) (где полагаем $\xi = \gamma_1 \log aq$ и $b = \gamma_1 \gamma_2 w$). Задавшись некоторым положительным Q , проводим следующую оценку:

$$\begin{aligned} R_w^1(m, a) &\ll \frac{\log \log \bar{m}_2}{a^{1/2}} \left(\sum_{q \leq m_2} \frac{1}{q^2} \cdot \frac{\log aq}{\exp(\gamma_2 w / \log aq)} + O(E^{-1/3}) \right) \\ &\ll \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2}} \left(\frac{1}{\exp(\gamma_2 w / \log aQ)} \cdot \sum_{q \leq Q} \frac{1}{q^2} + \sum_{q > Q} \frac{1}{q^2} + O(E^{-1/3}) \right) \\ &\ll \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2}} \left(\frac{1}{\exp(\gamma_2 w / \log aQ)} + \frac{1}{Q} + O(E^{-1/3}) \right). \end{aligned}$$

Оптимально величину Q выбрать из условия

$$\exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log aQ}\right) = Q, \quad (15)$$

т.е. $\log Q = (\sqrt{\log^2 a + 4\gamma_2 w} - \log a)/2$. Тогда получаем

$$R_w^1(m, a) \ll \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2}} \left(\frac{1}{\exp((\sqrt{\log^2 a + 4\gamma_2 w} - \log a)/2)} + O(E^{-1/3}) \right).$$

В разбираемом нами случае $a \leq E^{1/3}$ рассмотрим еще две возможности. Во-первых, если $a \leq \exp(\sqrt{\gamma_2 w}/2)$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sqrt{\log^2 a + 4\gamma_2 w} - \log a) &\geq \sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}, \\ R_w^1(m, a) &\ll \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2}} \left(\frac{1}{\exp(\sqrt{\gamma_2 w}/2)} + O(E^{-1/3}) \right) \ll \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2} \exp(\sqrt{\gamma_2 w}/2)}. \end{aligned}$$

(То, что величиной $O(E^{-1/3})$ здесь можно пренебречь, очевидно из определения E .)
Во-вторых, если $a \geq \exp(\sqrt{\gamma_2 w}/2)$, то

$$\log aQ = \log a + \log Q = \frac{\sqrt{\log^2 a + 4\gamma_2 w} + \log a}{2}.$$

Так как Q удовлетворяет (15), то

$$\begin{aligned} R_w^1(m, a) &\ll \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2}} \left(\frac{1}{\exp(\gamma_2 w / \log aQ)} + O(E^{-1/3}) \right) \\ &\ll \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2} \exp(\gamma_2 w / (2 \log a))}. \end{aligned}$$

(То, что величиной $O(E^{-1/3})$ здесь можно пренебречь, следует из неравенства

$$\exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log aQ}\right) \leq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log a}\right) \leq \exp(\sqrt{\gamma w})$$

с некоторым положительным γ .)

Запишем полученные нами неравенства для величины $R_w^1(m, a)$ удобным нам образом:

$$R_w^1(m, a) \ll \begin{cases} \frac{\log \log \bar{m}_2}{a^{1/2-\varepsilon}}, & \text{если } a \geq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{3 \log \gamma_1 \gamma_2 w}\right), \\ \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2} \exp(\gamma_2 w / (2 \log a))}, & \text{если } \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\right) \leq a \leq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{3 \log \gamma_1 \gamma_2 w}\right), \\ \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2} \exp(\sqrt{\gamma_2 w / 2})}, & \text{если } a \leq \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\right). \end{cases} \quad (16)$$

Займемся оценкой величины $R_w^2(m, a)$. Во-первых, снова $am_2 \leq m$ и, значит,

$$\frac{\gamma_2 w}{\log am_2} \geq \frac{\gamma_2 w}{\log m} \geq \frac{\gamma_2 \sigma}{\log s}.$$

Следовательно, при достаточно большом σ опять будет выполнено

$$\frac{\gamma_1}{\exp(\gamma_2 w / \log am_2)} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

и всегда будет иметь место оценка

$$R_w^2(m, a) \ll \frac{\log \log \bar{m}_2}{a^{1/2} m_2} \cdot (am_2)^{\varepsilon/2} \ll \frac{1}{a^{1/2-\varepsilon} m_2^{1-\varepsilon}}.$$

Если выполнено

$$am_2 \leq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1 \gamma_2 w}\right),$$

то можно применить неравенство (12), и получается оценка

$$\begin{aligned} R_w^2(m, a) &\ll \frac{\log \log \bar{m}_2}{a^{1/2} m_2} \cdot \frac{\log am_2}{\exp(\gamma_2 w / \log am_2)} \\ &\ll a^{1/2} \log m \log \log \bar{m}_2 \cdot \max_{\xi: \xi \geq a} \exp\left(-\log \xi - \frac{\gamma_2 w}{\log \xi}\right) \end{aligned}$$

(здесь снова использовано, что $am_2 \leq m$, взято $\xi = am_2$ и $b = \gamma_2 w$). В этом случае мы рассмотрим дополнительно два подслучая, в зависимости от того, где достигается максимум в формуле (13). Если кроме указанного неравенства выполнено еще $a \geq \exp(\sqrt{\gamma_2 w})$, то

$$R_w^2(m, a) \ll \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{a^{1/2} \exp(\gamma_2 w / \log a)}.$$

Если же $a \leq \exp(\sqrt{\gamma_2 w})$, то

$$R_w^2(m, a) \ll \frac{a^{1/2} \log m \log \log \bar{m}_2}{\exp(2 \cdot \gamma_2 w / \log a)} \leq \frac{\log m \log \log \bar{m}_2}{\exp(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\gamma_2 w})}.$$

Итак, подводя итог, запишем полученные оценки удобным нам образом:

$$R_w^2(m, a) \ll \begin{cases} a^{-1/2+\varepsilon} m_2^{-1+\varepsilon}, & \text{если } am_2 \geq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1 \gamma_2 w}\right), \\ \frac{1}{a^{1/2} \exp(\gamma_2 w / \log a)}, & \text{если } am_2 \leq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1 \gamma_2 w}\right), a \geq \exp(\sqrt{\gamma_2 w}), \\ \exp\left(-\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\gamma_2 w}\right), & \text{если } am_2 \leq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1 \gamma_2 w}\right), a \leq \exp(\sqrt{\gamma_2 w}). \end{cases} \quad (17)$$

Теперь займемся величиной $R_w^3(m, a)$. Она оценивается проще, чем две предыдущие величины, поскольку у нее в аргументе экспоненты отсутствует m_2 . Как и прежде, при достаточно большом σ и при любом a будет иметь место оценка

$$R_w^3(m, a) \ll a^{-1/2+\varepsilon},$$

а при $a \leq \exp(\gamma_2 w / \log \gamma_1 \gamma_2 w)$ из неравенства (12) получаем

$$R_w^3(m, a) \ll \frac{\log a}{a^{1/2}} \cdot \frac{1}{\exp(\gamma_2 w / \log a)}.$$

Объединим имеющиеся два неравенства:

$$R_w^3(m, a) \ll \begin{cases} a^{-1/2+\varepsilon}, & \text{если } a \geq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1 \gamma_2 w}\right), \\ \frac{\log a}{a^{1/2}} \cdot \frac{1}{\exp(\gamma_2 w / \log a)}, & \text{если } a \leq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1 \gamma_2 w}\right). \end{cases} \quad (18)$$

Из формул (16)–(18) легко видеть, что в рассматриваемой нами ситуации при $a > 1$ всегда будет выполнено

$$\Delta_w(m, a) \ll \exp(-\sqrt{\gamma w}), \quad \gamma > 0. \quad (19)$$

Более детальный анализ формул (16)–(18) показывает, что для величины $\Delta_w(m, a)$ справедливы те же оценки, что и для $R_w^1(m, a)$:

$$\Delta_w(m, a) \ll \begin{cases} \frac{\log \log \overline{m}_2}{a^{1/2-\varepsilon}}, & \text{если } a \geq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{3 \log \gamma_1 \gamma_2 w}\right), \\ \frac{\log m \log \log \overline{m}_2}{a^{1/2} \exp(\gamma_2 w / (2 \log a))}, & \text{если } \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\right) \leq a \leq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{3 \log \gamma_1 \gamma_2 w}\right), \\ \frac{\log m \log \log \overline{m}_2}{a^{1/2} \exp(\sqrt{\gamma_2 w / 2})}, & \text{если } a \leq \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\right). \end{cases} \quad (20)$$

Теперь для натурального l рассмотрим величину

$$\Delta_w^l(m) = \sum_{a|m, a>1} |\Xi_a| \left(\Delta_w(m, a) + \frac{1}{m} \right)^l \leq \sum_{a|m, a>1} a \cdot \left(\Delta_w(m, a) + \frac{1}{m} \right)^l \quad (21)$$

(мы уже учли (5)) и оценим ее сверху с помощью полученных неравенств для величины $\Delta_w(m, a)$.

В самом легком случае, когда $m = p$ – простое число, сразу получаем оценку

$$\Delta_w^l(p) \ll p^{-l/2+1+l\varepsilon} \quad (22)$$

при достаточно большом $\sigma \geq \sigma_1(s, \varepsilon)$.

Отметим также, что если минимальный отличный от единицы делитель a_0 числа m окажется больше, чем $\exp(\gamma_2 w / \log \gamma_1 \gamma_2 w)$, то (поскольку количество делителей m не превосходит $\exp(\log m / \log \log m)$) при достаточно большом $\sigma \geq \sigma_2(s, \varepsilon)$ и $w \geq \sigma r$ получим

$$\Delta_w^l(p) \ll a_0^{-l/2+1+(l+1)\varepsilon}. \quad (23)$$

Разберем случай произвольного m при $l \geq 2$. Сначала заметим, что

$$\Delta_w^l(m) \leq 2^l \sum_{a|m, a>1} a \cdot \max\left((\Delta_w(m, a))^l, \frac{1}{m^l}\right) \leq 2^l \sum_{a|m, a>1} a \cdot \left((\Delta_w(m, a))^l + \frac{1}{m^l}\right).$$

Таким образом,

$$\Delta_w^l(m) \ll \bar{\Delta}_w^l(m) + \sum_{a|m, a>1} \frac{a}{m^l},$$

где

$$\bar{\Delta}_w^l(m) = \sum_{a|m, a>1} a \cdot (\Delta_w(m, a))^l.$$

А поскольку при $l \geq 3$ выполнено

$$\sum_{a|m, a>1} \frac{a}{m^l} \leq \frac{1}{m}$$

и при $l = 2$ имеет место

$$\sum_{a|m, a>1} \frac{a}{m^2} \leq 1,$$

наша задача сводится к получению оценки сверху для $\bar{\Delta}_w^l(m)$.

Разобьем сумму в определении $\bar{\Delta}_w^l(m)$ на три:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_w^l(m) &= \sum_{a|m, a>1} a \cdot (\Delta_w(m, a))^l = \Sigma^1 + \Sigma^2 + \Sigma^3, \\ \Sigma^1 &= \sum_{a > \exp(\gamma_2 w / (3 \log \gamma_1 \gamma_2 w))}, \\ \Sigma^2 &= \sum_{\exp(\sqrt{\gamma_2 w / 2}) < a \leq \exp(\gamma_2 w / (3 \log \gamma_1 \gamma_2 w))}, \quad \Sigma^3 = \sum_{a \leq \exp(\sqrt{\gamma_2 w / 2})}. \end{aligned}$$

Сначала оценим суммы Σ^1 и Σ^3 . При $l \geq 3$, $l\varepsilon + 1 \leq l/2$ выполнено

$$\Sigma^1 \ll (\log \log m)^l \cdot \exp\left(\left(-\frac{l}{2} + 1 + l\varepsilon\right) \cdot \frac{\gamma_2 w}{3 \log \gamma_1 \gamma_2 w}\right) \cdot \sum_{a|m} 1 \ll \exp\left(-\frac{\gamma w}{\log w}\right)$$

с некоторым положительным γ при достаточно большом $\sigma > \sigma_3(s, l)$ (мы использовали первую оценку из (20) и неравенство $\sum_{a|m} 1 \ll \exp(\log m / \log \log m)$). Также при $l \geq 2$ выполнено

$$\Sigma^3 \ll (\log m \log \log m)^l \cdot \exp\left(-l \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\right) \cdot \sum_{a \leq \exp(\sqrt{\gamma_2 w / 2})} 1 \ll \exp(-\sqrt{\gamma w})$$

с некоторым положительным γ (использована третья оценка из (20)).

Наиболее неприятная ситуация возникает при оценке суммы Σ^2 . Здесь придется использовать неравенство

$$\sum_{a|m} \frac{1}{a^\rho} \leq \exp\left(\gamma(\rho) \frac{(\log m)^{1-\rho}}{\log \log m}\right) \ll \exp\left(\gamma(\rho) \frac{r^{1-\rho}}{\log r}\right), \quad (24)$$

которое выполняется при каждом $\rho \in (0, 1)$ с некоторой положительной постоянной $\gamma(\rho)$, равномерно ограниченной при ρ , отделенном от нуля и единицы. Используя ранее нами оценки этой суммы с $\rho = 0, 1$ имеются, например, в [9]. Приведенная выше оценка (24), по-видимому, является общеизвестной, но авторы не смогли найти соответствующей ссылки и, для полноты изложения, ниже в п. 5 приводится доказательство неравенства (24).

Если $l \geq 4$, проводим оценку с применением второй оценки из (20) и (24) при $\rho = 1/2$ и, учитывая, что

$$a \cdot \frac{1}{a^{l/2}} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}/2)} \cdot \frac{1}{a^{1/2}}$$

и что $w \geq \sigma r$:

$$\begin{aligned} \Sigma^2 &\ll \frac{(\log m \log \log m)^l}{\exp(\sqrt{\gamma_2 w/2}/2)} \cdot \sum_{a|m} \frac{1}{a^{1/2}} \\ &\ll \exp\left(\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}} + \gamma(1/2) \frac{r^{1/2}}{\log r}\right) \ll \exp(-\sqrt{\gamma w}). \end{aligned}$$

Отметим, что в данном рассуждении во втором неравенстве оценки (20) нам не понадобился дополнительный множитель $\exp(\gamma_2 w/(2 \log a))$ в знаменателе и мы его оценили единицей.

Итак, при $l \geq 4$ получаем

$$\Delta_w^l(m) \ll \exp(-\sqrt{\gamma w}), \quad \gamma > 0. \quad (25)$$

Если же $l = 3$, то, выбирая

$$Q_1 = \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma_2 w \log r}{\log \log r}}\right) > \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}}\right),$$

опять с учетом второй формулы из (20) имеем

$$\begin{aligned} \Sigma^2 &\ll (\log m \log \log m)^3 \cdot \left(\sum_{a|m, a \leq Q_1} \frac{1}{a^{1/2} \exp(3\gamma_2 w/(2 \log a))} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{a|m, a > Q_1} \frac{1}{a^{1/2} \exp(3\gamma_2 w/(2 \log a))} \right). \end{aligned}$$

Отметим, что здесь наличие в знаменателе второй формулы из (20) множителя $\exp(3\gamma_2 w/(2 \log a))$ уже существенно.

Применяя (24) с $\rho = 1/2$ и используя то, что $w > \sigma r$, получаем с некоторым положительным γ оценку

$$\begin{aligned} \sum_{a|m, a \leq Q_1} &\ll \exp\left(-\frac{\gamma_2 w}{\log Q_1}\right) \cdot \sum_{a|m} \frac{1}{a^{1/2}} \\ &\ll \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_2 w \log \log r}{\log r}} + \gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{r}}{\log r}\right) \ll \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma w \log \log r}{\log r}}\right). \end{aligned}$$

Далее, выбирая

$$\delta = \frac{\log \log r}{2 \log r}$$

и применяя (24) с $\rho = 1/2 - \delta$, убеждаемся, что с некоторым положительным γ выполнено

$$\begin{aligned} \sum_{a|m, a > Q_1} &\ll \frac{1}{Q_1^\delta} \cdot \sum_{a|m} \frac{1}{a^{1/2-\delta}} \\ &\ll \exp\left(-\delta \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2 w \log r}{\log \log r}} + \gamma \left(\frac{1}{2} - \delta\right) \frac{r^{1/2+\delta}}{\log r}\right) \ll \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma w \log \log r}{\log r}}\right), \end{aligned}$$

ибо

$$\delta \cdot \sqrt{\frac{\gamma_2 w \log r}{\log \log r}} = \sqrt{\frac{\gamma_2 w \log \log r}{4 \log r}} \geq \sqrt{\frac{\gamma_2 \sigma r \log \log r}{4 \log r}} \geq \sqrt{\frac{r}{\log r}} = \frac{r^{1/2+\delta}}{\log r}.$$

Итак, при $l = 3$ получаем

$$\Delta_w^3(m) \ll \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma w \log \log r}{\log r}}\right), \quad \gamma > 0. \quad (26)$$

Отметим, что если же $l = 2$, то для $\varepsilon > 0$ при $\sigma \geq \sigma_5(s, \varepsilon)$ будет выполнено

$$\Delta_w^2(m) \ll m^\varepsilon. \quad (27)$$

Отметим также, что если количество делителей m не превосходит $\exp(\sqrt{\log m})$, то при $l \geq 3$ имеет место оценка

$$\Delta_w^l(m) \ll \exp(-\sqrt{\gamma w}), \quad \gamma > 0. \quad (28)$$

5. Доказательство формулы (24). Пусть $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, $p_1 < \cdots < p_t$, — каноническое разложение числа m на простые сомножители. Если $q_1 < \cdots < q_t$ суть первые t простых чисел, то $q_j \asymp j \log j$, $p_j \geq q_j$, и понятно, что $t \ll \log m / \log \log m$. Оцениваем интересующую нас сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{a|m} a^{-\rho} &= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_t=0}^{\alpha_1, \dots, \alpha_t} p_1^{-\rho\beta_1} \cdots p_t^{-\rho\beta_t} \leq \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_t=0}^{\alpha_t} q_1^{-\rho\beta_1} \cdots q_t^{-\rho\beta_t} \\ &= \prod_{j=1}^t \sum_{\beta_j=0}^{\alpha_j} q_j^{-\rho\beta_j} \leq \prod_{j=1}^t \sum_{\beta=0}^{\infty} q_j^{-\rho\beta} = \prod_{j=1}^t (1 - q_j^{-\rho})^{-1}, \\ \log \sum_{a|m} a^{-\rho} &\leq - \sum_{j=1}^t \log(1 - q_j^{-\rho}) \leq 2^\rho \log((1 - 2^{-\rho})^{-1}) \cdot \sum_{j=1}^t q_j^{-\rho} \\ &\ll 2^\rho \log((1 - 2^{-\rho})^{-1}) \cdot \sum_{j=2}^t (j \log j)^{-\rho} \\ &\ll 2^\rho \log((1 - 2^{-\rho})^{-1}) \cdot (1 - \rho)^{-1} \cdot t^{1-\rho} (\log t)^{-\rho} \\ &\ll 2^\rho \log((1 - 2^{-\rho})^{-1}) \cdot (1 - \rho)^{-1} \cdot (\log m)^{1-\rho} (\log \log m)^{-1}. \end{aligned}$$

Формула (24) доказана.

6. О суммах значений характеров.

ЛЕММА 3. Пусть $a \mid m$, $\chi(x) \in \Xi_a$ – характер по модулю m , величина m_2 , определенная согласно (3), больше единицы и $\chi^{(1)}$ из леммы 1. Тогда для погрешности R в формуле

$$\sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi(x+b) = \sum_{\substack{x \in K_s^D(s^w) \\ (x+b, m_2)=1}} \chi^{(1)}(x+b) = \frac{\varphi(m_2)}{m_2} \cdot \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi^{(1)}(x+b) + R$$

будет выполнена оценка

$$|R| \ll |K_s^D(s^w)| \cdot (R_w^1(m, a) + R_w^2(m, a)),$$

где величины $R_w^{1,2}(m, a)$ определены в предыдущем пункте в (7), (8).

ЗАМЕЧАНИЕ. Сумма $R_w^1(m, a) + R_w^2(m, a)$, очевидно, оценивается сверху через $\Delta_w(m, a)$. Если $m_2 = 1$, то, очевидно, $R = 0$. Если же χ – главный характер по модулю m , то $a = 1$, $m_2 = m$ и с учетом замечания 1 к лемме 1 и третьей оценки из (20) лемма 3 дает при $w \geq \sigma r$ формулу

$$|K_s^D(s^w, m)| = \frac{\varphi(m)}{m} \cdot |K_s^D(s^w)| \cdot \left(1 + O\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma_2 w}{2}} \right) \cdot \log m \log \log m \right) \right), \quad (29)$$

которая фактически имеется в [6].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Всюду в доказательстве леммы 3 при суммировании по $d \mid m_2$ и $q \mid m_2$ считаем, что $d, q > 1$:

$$\begin{aligned} |R| &\leq \sum_{d \mid m_2} \left| \sum_{\substack{x \in K_s^D(s^w) \\ x+b \equiv 0 \pmod{d}}} \chi^{(1)}(x+b) - \frac{1}{d} \cdot \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi^{(1)}(x+b) \right| \\ &= \sum_{d \mid m_2} \frac{1}{d} \left| \sum_{1 \leq z \leq d-1} \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi^{(1)}(x+b) \exp\left(2\pi i \frac{z(x+b)}{d} \right) \right| \\ &\leq \sum_{d \mid m_2} \frac{1}{d} \sum_{q \mid d} S_{q,w}(\chi^{(1)}, b) \leq \sum_{q \mid m_2} \left(\sum_{d \mid m_2, q \mid d} \frac{1}{d} \right) S_{q,w}(\chi^{(1)}, b) \\ &\ll \log \log \overline{m_2} \cdot \sum_{q \mid m_2} \frac{S_{q,w}(\chi^{(1)}, b)}{q}. \end{aligned}$$

Теперь, используя лемму 1, определение сумм $S_{q,w}(\chi, b)$, $S_{q,w}$, взаимную простоту $(q, a) = 1$ (см. (3)) и преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} |R| &\ll a^{-1/2} \log \log \overline{m_2} \cdot \sum_{q \mid m_2} \frac{1}{q} \sum_{\substack{1 \leq y \leq a \\ (a,y)=1}} \sum_{\substack{1 \leq z \leq q \\ (z,q)=1}} \left| \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \exp\left(2\pi i \left(\frac{zx}{q} + \frac{yx}{a} \right) \right) \right| \\ &= a^{-1/2} \cdot \log \log \overline{m_2} \cdot \sum_{q \mid m_2} \frac{S_{aq,w}}{q} \leq a^{-1/2} \cdot \log \log \overline{m_2} \cdot \sum_{2 \leq q \leq m_2} \frac{S_{aq,w}}{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ll a^{-1/2} \log \log \overline{m_2} \cdot \left(\sum_{2 \leq q \leq m_2} \frac{1}{q^2} \sum_{d \leq q} S_{ad,w} + \frac{1}{m_2} \sum_{d \leq m_2} S_{ad,w} \right) \\ &\leq a^{-1/2} \log \log \overline{m_2} \cdot \left(\sum_{2 \leq q \leq m_2} \frac{1}{q^2} \sum_{d \leq aq} S_{d,w} + \frac{1}{m_2} \sum_{d \leq am_2} S_{d,w} \right). \end{aligned}$$

Теперь воспользовавшись леммой 2 и определением величин $R_w^{1,2}(m, a)$ (см. (7), (8)), получим заключение леммы 3.

ТЕОРЕМА 1. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и $w \geq \sigma r$, $\sigma \geq \sigma_0(s, \varepsilon)$ достаточно велико. Пусть для натурального m задан делитель $a \mid m$ и неглавный характер $\chi(x)$ по модулю m таков, что $\chi \in \Xi_a$, $a > 1$. Тогда выполняется оценка сверху суммы значений характеров

$$\left| \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi(x+b) \right| \ll |K_s^D(s^w)| \cdot \Delta_w(m, a),$$

где величина $\Delta_w(m, a)$ определена в (10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 достаточно оценить сумму

$$\Sigma = \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi^{(1)}(x+b). \quad (30)$$

Применяя лемму 1, убеждаемся, что

$$|\Sigma| \ll a^{-1/2} \cdot S_{a,w} \leq a^{-1/2} \cdot \sum_{d \leq a} S_{d,w}.$$

Далее применяем лемму 2 и получаем оценку

$$|\Sigma| \ll |K_s^D(s^w)| \cdot \frac{1}{a^{1/2}} \cdot \left(\exp\left(\frac{\gamma_1 \log a}{\exp(\gamma_2 w / \log a)}\right) - 1 \right).$$

Теорема 1 сразу следует из последней оценки, определения величин $R_w^j(m, a)$, $\Delta_w(m, a)$, формул (7)–(10) и оценки леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ. Необходимую оценку суммы (30) можно получить, не используя лемму 4 из работы Конягина [1], а применяя подход Шмидта из работы [3], аналогично тому, как это сделано в [2]. Применявшееся при доказательстве теоремы 1 неравенство

$$S_{a,w} \leq \sum_{d \leq a} S_{d,w}$$

на первый взгляд весьма грубое, но, тем не менее, является достаточно точным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N \geq s^{w+\rho}$ и выполнены условия теоремы 1. Тогда выполняется оценка

$$\left| \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x+b) \right| \leq |K_s^D(N)| \cdot (\Delta_w(m, a) + (k+1)^{-\rho}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s^\beta \leq N < s^{\beta+1}$. Представим N в s -ичной системе счисления: $N = \mu_0 + \dots + \mu_\beta s^\beta$. Разобьем множество $K_s^D(N) = \Omega_1 \sqcup \Omega_2$, где Ω_1 состоит из тех чисел $n = \eta_0 + \dots + \eta_\beta s^\beta$, для которых $\eta_j = \mu_j$, $w \leq j \leq \beta$, а Ω_2 состоит из всех остальных чисел. Ясно, что $|\Omega_1| \leq (k+1)^w$. Дополнительное множество представимо в виде суммы множеств $\Omega_2 = K_s^D(s^w) + s^w \cdot K_s^D(N_1)$, где $N_1 = \mu_w + \mu_{w+1}s + \dots + \mu_\beta s^{\beta-w}$. Следовательно, $|\Omega_2| = |K_s^D(s^w)| \cdot |K_s^D(N_1)| \leq |K_s^D(N)|$ и

$$\begin{aligned} \left| \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x+b) \right| &\leq \left| \sum_{x \in \Omega_1} \chi(x+b) \right| + \left| \sum_{x \in \Omega_2} \chi(x+b) \right| \\ &\leq (k+1)^w + \left| \sum_{b_1 \in K_s^D(N_1)} \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi(x+b+s^w b_1) \right| \\ &\leq (k+1)^w + \sum_{b_1 \in K_s^D(N_1)} \left| \sum_{x \in K_s^D(s^w)} \chi(x+b+s^w b_1) \right| \\ &\leq (k+1)^w + |K_s^D(N)| \Delta_w(m, a) \end{aligned}$$

(мы использовали теорему 1). Остается заметить, что $|K_s^D(N)| \geq |K_s^D(s^{w+\rho})| \geq (k+1)^{w+\rho}$ и $(k+1)^w \leq |K_s^D(N)| / (k+1)^\rho$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Напомним, что в условиях теоремы 1 требуется, чтобы $w \geq \sigma r$. Если кроме этого потребовать, чтобы

$$\rho \geq \sigma^* r \frac{\log s}{\log(k+1)},$$

получается, что из условия $N \geq s^{w+\rho}$ (это фактически то же самое, что и $N \gg m^{\sigma + (\log s / \log(k+1))\sigma^*}$) будет выполнено

$$\left| \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x+b) \right| \leq |K_s^D(N)| \cdot (\Delta_w(m, a) + O(m^{-\sigma^*})).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для главного характера по модулю m для числа $N \geq m^\sigma$ можно доказать формулу, аналогичную (29), однако для дальнейшего нам понадобится (исключительно для того, чтобы более компактно сформулировать результаты о числе решений сравнений в следующих пунктах 7 и 8 настоящей статьи) лишь простое неравенство

$$|K_s^D(N)| \ll |K_s^D(N, m)| \cdot \frac{m}{\varphi(m)}.$$

Оно может быть получено по аналогии с теоремой 2 и доказательство мы не приводим.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $m = p$ – простое число и χ – неглавный характер по модулю p , то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ такое, что при $N > m^\sigma$ выполняется

$$\left| \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x+b) \right| \ll |K_s^D(N)| \cdot p^{-1/2+\varepsilon}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Если m – произвольное натуральное число, χ – неглавный характер по модулю m , то при достаточно большом σ при $N > m^\sigma$ выполняется

$$\left| \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x+b) \right| \ll |K_s^D(N)| \cdot \exp(-\gamma \sqrt{\sigma \log m})$$

с некоторым положительным $\gamma = \gamma(s)$.

Следствие 1 (оно имеется в [2]) сразу вытекает из теоремы 2 (в замечании σ^* надо взять равным $1/2$) и оценки (11) (ср. с замечанием 2 к лемме 1), следствие 2 вытекает из теоремы 2 и оценки (19).

7. О числе решений сравнения $x_1 \cdots x_l \equiv \lambda \pmod{m}$. Всюду ниже

$$(\lambda, m) = 1.$$

Напомним, что через $T_l(N, m, \lambda)$ обозначается количество решений сравнения

$$x_1 \cdots x_l \equiv \lambda \pmod{m}, \quad x_j \in K_s^D(N)$$

(ясно, что можно считать $x_j \in K_s^D(N, m)$).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $N \geq s^{w+\rho_0}$, $(m, \lambda) = 1$, $\varepsilon > 0$ и $w \geq \sigma r$, $\sigma \geq \sigma_0(s, \varepsilon)$ достаточно велико и

$$\rho_0 = r \frac{\log s}{\log(k+1)} \asymp \log m.$$

Тогда

$$T_l(N, m, \lambda) = \frac{|K_s^D(N, m)|^l}{\varphi(m)} + O\left(\frac{|K_s^D(N)|^l}{\varphi(m)} \cdot \Delta_w^l(m)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$\begin{aligned} \left| T_l(N, m, \lambda) - \frac{|K_s^D(N, m)|^l}{\varphi(m)} \right| &\leq \frac{|K_s^D(N)|^l}{\varphi(m)} \cdot \sum_{\chi \pmod{m}, \chi \neq \chi_0} \left| \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x) \right|^l \\ &\ll \frac{|K_s^D(N)|^l}{\varphi(m)} \cdot \sum_{a|m, a>1} |\Xi_a| \left(\Delta_w(m, a) + \frac{1}{m} \right)^l = \frac{|K_s^D(N)|^l}{\varphi(m)} \cdot \Delta_w^l(m) \end{aligned}$$

(мы использовали теорему 2 и замечание к ней, а также определение (21) величины $\Delta_w^l(m)$). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия теоремы 3 будут выполнены при $N \geq m^\sigma$ с достаточно большим $\sigma \geq \sigma_1(s, \varepsilon)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $m = p$ – простое число и выполнены условия теоремы 3. Тогда

$$T_l(N, p, \lambda) = \frac{|K_s^D(N, p)|^l}{p-1} \cdot (1 + O(p^{-l/2+1+l\varepsilon})).$$

Следствие 1 вытекает из (22); оно имеется в [2], но там допущена неточность – вместо $|K_s^D(N, p)|$ в числителе написано просто $|K_s^D(N)|$, что неверно. При $l \geq 3$ следствие 1 устанавливает асимптотическую формулу для $T_l(N, p, \lambda)$, а при $l = 1, 2$ – оценку сверху для этой величины. При $l = 1$ эта оценка иногда хуже тривиальной оценки $T^1(N, p, \lambda) \ll |K_s^D(N)| p^{-\log s / \log k}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть m таково, что минимальный отличный от единицы делитель $a_0 \mid m$ удовлетворяет неравенству

$$a_0 \geq \exp\left(\frac{\gamma_2 w}{\log \gamma_1 \gamma_2 w}\right).$$

Тогда при достаточно большом σ и $N \geq s^{w+\rho_0}$, $w \geq \sigma r$, будет выполнено

$$T_l(N, m, \lambda) = \frac{|K_s^D(N, m)|^l}{\varphi(m)} \cdot (1 + O(a_0^{-l/2+1+(l+1)\varepsilon})).$$

Следствие 2 вытекает из (23), замечания 2 к теореме 2 и неравенства $m/\varphi(m) \ll \log \log m$. При $l \geq 3$ следствие 2 дает асимптотическую формулу для $T_l(N, m, \lambda)$, а при $l = 1, 2$ – оценку сверху.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть m таково, что количество делителей m не превосходит $\exp(\sqrt{\log m})$ (например, $m = p^\alpha$, где p – простое число). Тогда при $l \geq 3$ в условиях теоремы 3 с некоторым положительным γ имеет место оценка

$$\begin{aligned} T_l(N, m, \lambda) &= \frac{|K_s^D(N, m)|^l}{\varphi(m)} \cdot (1 + O(\exp(-\sqrt{\gamma w}))) \\ &= \frac{|K_s^D(N, m)|^l}{\varphi(m)} \cdot (1 + O(\exp(-\sqrt{\gamma \log m}))). \end{aligned}$$

Следствие 3 вытекает из (28).

СЛЕДСТВИЕ 4. В условиях теоремы 3 с некоторым положительным γ для произвольного натурального m выполнено следующее.

1) Если $l \geq 4$, то при достаточно большом σ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} T_l(N, m, \lambda) &= \frac{|K_s^D(N, m)|^l}{\varphi(m)} \cdot (1 + O(\exp(-\sqrt{\gamma w}))) \\ &= \frac{|K_s^D(N, m)|^l}{\varphi(m)} \cdot (1 + O(\exp(-\sqrt{\gamma \log m}))). \end{aligned}$$

2) Если $l = 3$, то при достаточно большом σ справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} T_3(N, m, \lambda) &= \frac{|K_s^D(N, m)|^3}{\varphi(m)} \cdot \left(1 + O\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma w \log \log r}{\log r}}\right)\right)\right) \\ &= \frac{|K_s^D(N, m)|^3}{\varphi(m)} \cdot \left(1 + O\left(\exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma \log m \log \log \log m}{\log \log m}}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

3) Если $l = 2$, то для произвольного положительного ε при достаточно большом σ справедлива оценка

$$T_2(N, m, \lambda) \ll \frac{|K_s^D(N)|^2}{\varphi(m)} \cdot m^\varepsilon.$$

Заключение 1) вытекает из (25), заключение 2) вытекает из (26), заключение 3) вытекает из (27). Опять же, как в следствии 3, так и в следствии 4 для перехода в оценке остаточного члена от $|K_s^D(N)|$ к $|K_s^D(N, m)|$ надо использовать замечание 2 к теореме 2.

8. Об исключительном множестве для сравнения $x_1 x_2 \equiv \lambda \pmod{m}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $N \geq s^{w+\rho_0}$, $\varepsilon > 0$ и $w \geq \sigma r$ с достаточно большим σ . Пусть также

$$B = \{\lambda \pmod{m} : (z, m) = 1, \lambda \not\equiv ab \pmod{m} \mid a, b \in K_s^D(N, m)\}.$$

Тогда

$$|B| \ll \varphi(m) \cdot \left(\frac{m}{\varphi(m)} \right)^4 \cdot \Delta_w^4(m).$$

Из оценки (25) величины $\Delta_w^4(m)$ сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 4 для произвольного натурального m имеем

$$|B| \ll \varphi(m) \cdot \exp(-\sqrt{\gamma w}) \leq \varphi(m) \cdot \exp(-\sqrt{\gamma \log m}), \quad \gamma > 0;$$

если же $m = p$ – простое число, то при достаточно большом σ (в зависимости от заданного положительного ε) выполнено $|B| \ll p^\varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Всюду ниже $\mathbb{Z}_m = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. Для доказательства теоремы 4 напомним несколько определений.

Сверткой $(f * g)(x)$ двух функций f и g , $f, g: \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{C}$, называется функция

$$(f * g)(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^*} f(z) \overline{g(zx^{-1})}, \quad x \in \mathbb{Z}_m^*.$$

Пусть χ – некоторый характер по модулю m . Преобразованием Фурье функции $f: \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{C}$ называется функция

$$\widehat{f}(\chi) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} f(x) \chi(x).$$

Следующая лемма общеизвестна.

ЛЕММА 4. Пусть $f, g: \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторые функции. Тогда

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} f(x) \overline{g(x)} = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} \widehat{f}(\chi) \overline{\widehat{g}(\chi)}, \quad (31)$$

причем суммирование в правой части (31) проходит по всем характерам группы $\mathbb{Z}_m^*$.

Из (31) и равенства $\widehat{(f * g)}(\chi) = \widehat{f}(\chi) \overline{\widehat{g}(\chi)}$ вытекает аналог формулы (31) для свертки.

ЛЕММА 5. Пусть $f, g: \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторые функции. Тогда

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} |(f * g)(x)|^2 = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} |\widehat{f}(\chi)|^2 |\widehat{g}(\chi)|^2.$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &= |\{x \in K_s^D(N) : x \equiv t \pmod{m}\}|, & t \in \mathbb{Z}_m^*, \\ \mu_2(t) &= |\{x \in K_s^D(N) : x \equiv t^{-1} \pmod{m}\}|, & t \in \mathbb{Z}_m^*.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}|K_s^D(N, m)| &= \sum_{t \in \mathbb{Z}_m^*} \mu_1(t) = \sum_{t \in \mathbb{Z}_m^*} \mu_2(t), \\ \hat{\mu}_1(\chi) &= \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x), & \hat{\mu}_2(\chi) &= \sum_{x \in K_s^D(N)} \overline{\chi(x)}.\end{aligned}\tag{32}$$

Пусть

$$f_1(t) = \mu_1(t) - \frac{|K_s^D(N, m)|}{\varphi(m)}, \quad f_2(t) = \mu_2(t) - \frac{|K_s^D(N, m)|}{\varphi(m)}.$$

Тогда

$$\sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} f_1(t) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} f_2(x) = 0.$$

Кроме того, для любого неглавного характера χ выполнено

$$\hat{\mu}_i(\chi) = \hat{f}_i(\chi), \quad i = 1, 2.\tag{33}$$

Рассмотрим сумму

$$\Sigma = \sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} |(f_1 * f_2)(x)|^2.$$

С одной стороны,

$$\begin{aligned}\Sigma &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} |(f_1 * f_2)(x)|^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} \left| \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^*} f_1(z) \overline{f_2(zx^{-1})} \right|^2 \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} \left| \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^*} \left(\mu_1(z) - \frac{|K_s^D(N, m)|}{\varphi(m)} \right) \left(\mu_2(zx^{-1}) - \frac{|K_s^D(N, m)|}{\varphi(m)} \right) \right|^2 \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_m^*} \left| \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^*} \mu_1(z) \mu_2(zx^{-1}) - \frac{|K_s^D(N, m)|^2}{\varphi(m)} \right|^2,\end{aligned}$$

откуда имеем оценку снизу для Σ следующего вида:

$$\Sigma \geq \sum_{x \in B} \left| \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^*} \mu_1(z) \mu_2(zx^{-1}) - \frac{|K_s^D(N, m)|^2}{\varphi(m)} \right|^2 = |B| \cdot \frac{|K_s^D(N, m)|^4}{(\varphi(m))^2}\tag{34}$$

(мы учли, что если $x \in B$, то сравнение $\xi\eta \equiv x \pmod{m}$ неразрешимо в числах $\xi, \eta \in K_s^D(N, m)$, а сумма $\sum_{z \in \mathbb{Z}_m^*} \mu_1(z) \mu_2(zx^{-1})$ есть в точности количество решений сравнения $\xi\eta \equiv x \pmod{m}$, $\xi, \eta \in K_s^D(N, m)$, и, стало быть, для каждого $x \in B$ в (34) внутренняя сумма по z равна нулю).

С другой стороны, применяя лемму 5 и учитывая (32), (33), получаем

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi} |\widehat{f}_1(\chi)|^2 |\widehat{f}_2(\chi)|^2 \\ &= \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi, \chi \neq \chi_0} |\widehat{f}_1(\chi)|^2 |\widehat{f}_2(\chi)|^2 = \frac{1}{\varphi(m)} \sum_{\chi, \chi \neq \chi_0} \left| \sum_{x \in K_s^D(N)} \chi(x) \right|^4.\end{aligned}$$

Оценим сверху сумму Σ . Имеем в силу теоремы 2 и замечания 1 к ней

$$\Sigma \leq \frac{|K_s^D(N)|^4}{\varphi(m)} \sum_{a|m, a>1} |\Xi_a| \left(\Delta_w(m, a) + \frac{1}{m} \right)^4 = \frac{|K_s^D(N)|^4}{\varphi(m)} \Delta_w^4(m). \quad (35)$$

Применяя оценки (34), (35) величины Σ , находим

$$|B| \frac{|K_s^D(N, m)|^4}{(\varphi(m))^2} \ll \frac{|K_s^D(N)|^4}{\varphi(m)} \Delta_w^4(m).$$

Теперь теорема 4 вытекает из замечания 2 к теореме 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Konyagin, “Arithmetic properties of integers with missing digits: distribution in residue classes”, *Period. Math. Hungar.*, **42**:1–2 (2001), 145–162.
- [2] Н. Г. Мощевитин, “О числах с ограничениями на цифры”, *Докл. РАН*, **384**:2 (2002), 167–170.
- [3] W. Schmidt, “On normal numbers”, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 661–672.
- [4] P. Erdős, C. Mauduit, A. Sarközy, “On arithmetic properties of integers with missing digits. I: Distribution in residue classes”, *J. Number Theory*, **70**:2 (1998), 99–120.
- [5] W. D. Banks, A. Conflitti, I. E. Shparlinski, “Character sums over integers with restricted g -ary digits”, *Illinois J. Math.*, **46**:3 (2002), 819–836.
- [6] W. D. Banks, I. E. Shparlinski, “Arithmetic properties of numbers with restricted digits”, *Acta Arith.*, **112**:4 (2004), 313–332.
- [7] Н. Г. Мощевитин, “О числах с пропущенными цифрами: элементарное доказательство одного результата С. В. Конягина”, *Чебышевский сб.*, **3**:2(4) (2002), 93–99.
- [8] M. B. Nathanson, *Additive Number Theory. Inverse Problems and the Geometry of Sumsets*, Grad. Texts in Math., **165**, Springer, New York, 1996.
- [9] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.
- [10] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.

Н. Г. Мощевитин

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: moshchevitin@rambler.ru

Поступило

14.03.2005

Исправленный вариант

20.06.2006

И. Д. Шкредов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: ishkredov@rambler.ru