Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Муранов, Д. Реповш, М. Ценцель, π - π -теорема для пар многообразий с границами, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 405–416

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:21:09

π - π -теорема для пар многообразий с границами

Ю. В. Муранов, Д. Реповш, М. Ценцель

Препятствие к перестройке нормального отображения в простую пару Пуанкаре (X, Y) лежит в относительной группе препятствий к перестройкам $L_*(\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X))$. Хорошо известный результат Уолла, так называемая π - π -теорема, утверждает, что в высоких размерностях нормальное отображение многообразия с границей в простую пару Пуанкаре с $\pi_1(X) \cong \pi_1(Y)$ нормально бордантно простой гомотопической эквивалентности пар. Для изучения нормальных отображений в многообразие с подмногообразием Уолл ввел группы препятствий к перестройкам для пар многообразий LP_* и группы препятствий к расщеплению LS_* . В данной работе для пар многообразий с границами сформулированы и доказаны результаты, которые аналогичны π - π -теореме. Мы даем прямые геометрические доказательства, которые опираются на оригинальные результаты Уолла, и применяем полученные результаты к исследованию перестроек многообразий с фильтрацией.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Группы препятствий к перестройкам $L_*(\pi)$ были введены Уоллом в его фундаментальной работе [1]. Пусть $(f, b): M \rightarrow X$ – нормальное отображение замкнутого многообразия M^n в простой комплекс Пуанкаре X формальной размерности n , где $b: \nu_M \rightarrow \xi$ – морфизм расслоений, который накрывает $f: M \rightarrow X$. Тогда определено препятствие $\theta(b, f) \in L_n(\pi_1(X))$ к существованию простой гомотопической эквивалентности в классе нормального бордизма отображения (f, b) .

В действительности, Уолл определяет L_* -группы и описывает теорию перестроек для случая n -ад многообразий. Например, препятствие к перестройке нормального отображения

$$((f, b), (\partial f, \partial b)): (M, \partial M) \rightarrow (X, \partial X) \quad (1)$$

многообразий с границами лежит в относительной группе препятствий к перестройкам $L_*(\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X))$. Следовательно, если индуцированное вложением $\partial X \rightarrow X$ отображение $\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$ является изоморфизмом, то в высоких размерностях отображение (1) нормально бордантно простой гомотопической эквивалентности пар $(s$ -триангуляции пары $(X, \partial X)$). В [1; § 4] Уолл дает прямое геометрическое доказательство этого “важного специального случая”.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-00993, работа второго и третьего авторов выполнена при поддержке исследовательской программы Министерства высшего образования, науки и технологии Республики Словения, грант № P1-292-0101-04.

Группы препятствий к перестройкам и естественные отображения не зависят от категории многообразий (см. [1] и [2]). В данной работе рассматриваются топологические многообразия и пары многообразий в соответствии с определениями из [2]. Все полученные результаты переносятся также на $Diff$ - и PL -многообразия.

Пусть (X^n, Y^{n-q}, ξ_Y) – пара замкнутых топологических многообразий коразмерности q [2; с. 570], где ξ_Y – нормальное топологическое блочное расслоение над подмногообразием Y . В данной работе мы систематически рассматриваем ограничения расслоений на различные подмногообразия, поэтому для всех расслоений мы добавляем в обозначения нижний индекс, указывающий на базу расслоения. В работе [2; с. 570–571] определена t -триангуляция пары многообразий (X, Y, ξ_Y) , т.е. топологическое нормальное отображение

$$((f, b), (g, c)): (M, N) \rightarrow (X, Y) \quad (2)$$

в пару многообразий (X, Y, ξ_Y) . Отметим, что множество классов конкордантности t -триангуляций пары (X, Y, ξ_Y) совпадает с множеством классов нормальных бордизмов топологических нормальных отображений в многообразие X [2; предложение 7.2.3]. Мы будем также использовать определение s -триангуляции пары (X, Y, ξ_Y) из [2; § 1].

Пусть

$$F = \begin{pmatrix} \pi_1(S(\xi_Y)) & \longrightarrow & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Y) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{pmatrix}$$

– универсально-отталкивающий квадрат фундаментальных групп с ориентациями, где $S(\xi_Y)$ – граница трубчатой окрестности Y в X .

Определены группы $LP_*(F)$ препятствий к перестройке t -триангуляции (2) до получения s -триангуляции пары многообразий (X, Y, ξ_Y) (см. [1; § 17E] и [2; § 7.2]). В работах [1] и [2] определены также группы препятствий к расщеплению $LS_*(F)$. Простая гомотопическая эквивалентность $f: M \rightarrow X$ расщепляется вдоль подмногообразия Y , если она гомотопически эквивалентна s -триангуляции пары многообразий (X, Y, ξ_Y) . Группы $LS_n(F)$ и $LP_n(F)$ функториально зависят от квадрата фундаментальных групп F и $n \bmod 4$.

Для топологического нормального отображения (1) теория перестроек существенно различается в двух случаях. В случае теории перестроек относительно границы (rel_∂ -случай) рассматриваются топологические нормальные отображения (1) с фиксированной s -триангуляцией $\partial f: \partial M \rightarrow \partial X$ на границе. Нормальные бордизмы при этом на границе тривиальны, т.е. имеют вид

$$\partial f \times \text{Id}: \partial M \times I \rightarrow \partial X \times I.$$

Отметим, что в случае rel_∂ препятствие к перестройке нормального отображения (1) до простой гомотопической эквивалентности лежит в группе $L_n(\pi_1(X))$, где $n = \dim X$. Для пары многообразий $(X, \partial X) \supset (Y, \partial Y)$ коразмерности q с границами (см. [2; § 7]) в случае rel_∂ ситуация аналогична. Рассматриваются нормальные отображения (1), которые уже расщеплены на границе, и конкордантность при этом является произведением на границе. Теория перестроек для нормальных отображений пар многообразий с границами в случае rel_∂ развита в [1] и [2].

В настоящей работе рассматриваются перестройки пар многообразий с границами без фиксации отображений на границе. Геометрические свойства перестроек таких пар необходимо знать для изучения перестроек многообразий с фильтрацией (см. [3]–[5]). Это специальный случай теории перестроек n -ад многообразий, упоминаемый Уоллом [1; с. 136]. Мы приводим точное утверждение и доказательство π - π -теоремы для различных отображений в пару многообразий с границами. Затем применяем полученные результаты к исследованию перестроек многообразий с фильтрацией.

Пара многообразий $(X, \partial X) \supset (Y, \partial Y)$ с границами определяет пару замкнутых многообразий $\partial Y \subset \partial X$ с универсально-отталкивающим квадратом

$$\Psi = \begin{pmatrix} \pi_1(S(\xi_{\partial Y})) & \longrightarrow & \pi_1(\partial X \setminus \partial Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(\partial Y) & \longrightarrow & \pi_1(\partial X) \end{pmatrix}$$

фундаментальных групп в соответствующей задаче расщепления. Здесь $\xi_{\partial Y}$ является ограничением расслоения ξ_Y на границу ∂Y многообразия Y . Естественное вложение $\partial X \rightarrow X$ индуцирует отображение $\Delta: \Psi \rightarrow F$ квадратов фундаментальных групп.

Теперь мы можем сформулировать основной результат работы.

ТЕОРЕМА. Пусть

$$(f, \partial f): (M, \partial M) \rightarrow (X, \partial X)$$

топологическое нормальное отображение (1) в пару

$$(X^n, \partial X) \supset (Y^{n-q}, \partial Y) \quad (3)$$

многообразий с границами коразмерности q . Пусть $n - q \geq 6$ и отображение Δ является изоморфизмом квадратов фундаментальных групп. При этих условиях имеют место следующие результаты.

А) Нормальное отображение $(f, \partial f)$ нормально бордантно s -триангуляции пары (3) многообразий с границами.

В) Если отображение $(f, \partial f)$ является простой гомотопической эквивалентностью пар, то оно конкордантно s -триангуляции пары (3) многообразий с границами.

С) Пусть нормальное отображение $(f, \partial f)$ определяет простую гомотопическую эквивалентность пар

$$(f|_N, f|_{\partial N}): (N, \partial N) \rightarrow (Y, \partial Y),$$

где $N = f^{-1}(Y)$, $\partial N = f^{-1}(\partial Y)$ – трансверсальные прообразы. Тогда отображение $(f, \partial f)$ нормально бордантно s -триангуляции пары (3) многообразий с границами. Более того, нормальный бордизм

$$F = (h; g, f_0, f_1): (W; V, M, M') \rightarrow (X \times I; \partial X \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\})$$

можно выбрать трансверсальным к $Y \times I$ так, что ограничение $h_{h^{-1}(Y \times I)}$ есть

$$(f|_{(N, \partial N)}) \times \text{Id}: (N, \partial N) \times I \rightarrow (Y, \partial Y) \times I.$$

В п. 2 дается необходимый предварительный материал. В п. 3 мы доказываем теорему и применяем полученные результаты к перестройкам многообразий с фильтрацией.

2. Предварительные сведения. Будем рассматривать случай топологических многообразий и следовать обозначениям из [2; § 7.2]. Пусть (X, Y, ξ_Y) – пара замкнутых многообразий коразмерности q в смысле Раницкого (см. [2; § 7.2]), т.е. локально-плоское замкнутое подмногообразие Y задано вместе с нормальным топологическим блочным расслоением

$$\xi_Y = \xi_{Y \subset X}: Y \rightarrow \widetilde{BTOP}(q)$$

с ассоциированным (D^q, S^{q-1}) -расслоением

$$(D^q, S^{q-1}) \rightarrow (E(\xi_Y), S(\xi_Y)) \rightarrow Y$$

и имеет место разложение замкнутого многообразия

$$X = E(\xi_Y) \bigcup_{S(\xi_Y)} \overline{X \setminus E(\xi_Y)}.$$

Топологическое нормальное отображение (2) задается трансверсальным к Y нормальным отображением $(f, b): M \rightarrow X$ с $N = f^{-1}(Y)$. При этом пара (M, N) является топологической парой многообразий коразмерности q с нормальным топологическим блочным расслоением

$$\nu_N: N \xrightarrow{f|_N} Y \xrightarrow{\xi_Y} \widetilde{BTOP}(q).$$

Дополнительно выполняются следующие условия:

(i) ограничение

$$(f, b)|_N = (g, c): N \rightarrow Y$$

является нормальным отображением;

(ii) ограничение

$$(f, b)|_P = (h, d): (P, S(\nu_N)) \rightarrow (Z, S(\xi_Y))$$

является нормальным отображением в пару $(Z, S(\xi_Y))$, где

$$P = \overline{M \setminus E(\nu_N)}, \quad Z = \overline{X \setminus E(\xi_Y)};$$

(iii) ограничение

$$(h, d)|_{S(\nu_N)}: S(\nu_N) \rightarrow S(\xi_Y)$$

совпадает с индуцированным отображением

$$(g, c)^!: S(\nu_N) \rightarrow S(\xi_Y)$$

и $(f, b) = (g, c)^! \cup (h, d)$.

В топологической категории s -триангуляция пары (X, Y, ξ_Y) [2; с. 571] задается t -триангуляцией, для которой отображения

$$f: M \rightarrow X, \quad g: N \rightarrow Y, \quad (P, S(\nu_N)) \rightarrow (Z, S(\xi_Y))$$

являются простыми гомотопическими эквивалентностями (s -триангуляциями).

Для пары (3) многообразий коразмерности q с границами [2; с. 585] имеет место нормальное расслоение $(\xi_Y, \xi_{\partial Y})$ над парой $(Y, \partial Y)$ и аналогично случаю замкнутого многообразия разложение

$$(X, \partial X) = \left(E(\xi_Y) \bigcup_{S(\xi_Y)} Z, E(\xi_{\partial Y}) \bigcup_{S(\xi_{\partial Y})} \partial_+ Z \right),$$

где $(Z; \partial_+ Z, S(\xi_Y); S(\xi_{\partial Y}))$ является триадой многообразий. Отметим здесь, что

$$\partial_+ Z = \overline{\partial X \setminus E(\xi_{\partial Y})}.$$

Топологическое нормальное отображение (1) задает нормальное отображение пары $(M, \partial M) \supset (N, \partial N)$ многообразий с границами в пару (3) многообразий с границами, если оно трансверсально $(Y, \partial Y)$ с

$$(N, \partial N) = (f^{-1}(Y), f^{-1}(\partial Y)),$$

и отображения f и ∂f задают топологические нормальные отображения пар $(M, N) \rightarrow (X, Y)$ и $(\partial M, \partial N) \rightarrow (\partial X, \partial Y)$ соответственно. Отметим, что в этом случае нормальное топологическое блочное расслоение $(\nu_N, \nu_{\partial N})$ над парой $(N, \partial N)$ [2; с. 570] задает разложение

$$(M, \partial M) = \left(E(\nu_N) \bigcup_{S(\nu_N)} P, E(\nu_{\partial N}) \bigcup_{S(\nu_{\partial N})} \partial_+ P \right),$$

где $(P; \partial_+ P, S(\nu_N); S(\nu_{\partial N}))$ является триадой многообразий.

Топологическое нормальное отображение (1) является s -триангуляцией пары многообразий (3) с границами, если отображения $f: M \rightarrow X$ и $\partial f: \partial M \rightarrow \partial X$ являются s -триангуляциями пар (X, Y) и $(\partial X, \partial Y)$ соответственно.

Две s -триангуляции

$$(f_i, \partial f_i): (M_i, \partial M_i) \rightarrow (X, \partial X), \quad i = 0, 1,$$

многообразия X с границей ∂X конкордантны (см. [1; § 10] и [2; § 7.1]), если существует простая гомотопическая эквивалентность 4-ад

$$(h; g, f_0, f_1): (W; V, M_0, M_1) \rightarrow (X \times I; \partial X \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\})$$

с

$$\partial V = \partial M_0 \cup \partial M_1.$$

3. Доказательство и следствие. Рассмотрим случай А) теоремы. Без ограничения общности можем считать, что отображение $(f, \partial f)$ трансверсально к $(Y, \partial Y) \subset (X, \partial X)$. Пусть $(N, \partial N) = (f^{-1}(Y), (\partial f)^{-1}(\partial Y))$ – трансверсальный прообраз. Отображение

$$(f|_N, \partial f|_{\partial N}): (N, \partial N) \rightarrow (Y, \partial Y) \quad (4)$$

является нормальным отображением многообразий с границей. Изоморфизм Δ задает изоморфизм $\pi_1(\partial Y) \rightarrow \pi_1(Y)$. Таким образом, нормальное отображение (4) удовлетворяет условиям π - π -теоремы Уолла [1; § 4] для пары $(Y, \partial Y)$ и, следовательно, нормально бордантно простой гомотопической эквивалентности пар

$$(L, \partial L) \rightarrow (Y, \partial Y). \quad (5)$$

Согласно [6; с. 45] мы можем продолжить этот бордизм до нормального бордизма с отображением $(f, \partial f)$ на нижнем основании и отображением

$$(g, \partial g): (K, \partial K) \rightarrow (X, \partial X) \quad (6)$$

на верхнем основании. Отображение (6) трансверсально $(Y, \partial Y)$ и пара (K, L) является топологической парой многообразий с нормальным топологическим блочным расслоением ν_L . Поскольку отображение (5) является простой гомотопической эквивалентностью пар, оно задает простую гомотопическую эквивалентность трубчатых окрестностей с границами (см. [1; с. 33] и [2; с. 579])

$$\psi = g|_{E(\nu_L)}: (E(\nu_L); E(\nu_{\partial L}), S(\nu_L); S(\nu_{\partial L})) \rightarrow (E(\xi_Y); E(\xi_{\partial Y}), S(\xi_Y); S(\xi_{\partial Y})).$$

В частности, ограничение отображения ψ на $S(\nu_L)$ является простой гомотопической эквивалентностью пар

$$\phi = \psi|_{S(\nu_L)} = g|_{S(\nu_L)}: (S(\nu_L), S(\nu_{\partial L})) \rightarrow (S(\xi_Y), S(\xi_{\partial Y})). \quad (7)$$

Пусть

$$P = \overline{K \setminus E(\nu_L)}, \quad \partial_+ P = \overline{\partial K \setminus E(\nu_{\partial L})}.$$

Ограничение отображения g на P задает нормальное отображение триад

$$\alpha = g|_P: (P; \partial_+ P, S(\nu_L); S(\nu_{\partial L})) \rightarrow (Z; \partial_+ Z, S(\xi_Y); S(\xi_{\partial Y})), \quad (8)$$

ограничение которого на $S(\nu_L)$ является простой гомотопической эквивалентностью пар ϕ (7).

Рассмотрим квадрат фундаментальных групп

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S(\xi_{\partial Y})) & \longrightarrow & \pi_1(\partial_+ Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(S(\xi_Y)) & \longrightarrow & \pi_1(Z) \end{array} \quad (9)$$

триады $(Z; \partial_+ Z, S(\xi_Y); S(\xi_{\partial Y}))$.

Изоморфизм Δ задает изоморфизм $\pi_1(\partial_+ Z) \rightarrow \pi_1(Z)$ в квадрате (9), и ограничение отображения α на $S(\nu_L)$ совпадает с простой гомотопической эквивалентностью пар ϕ (7). Следовательно (π - π -теорема Уолла для триады $(Z; \partial_+ Z, S(\xi_Y); S(\xi_{\partial Y}))$),

нормальное отображение α (8) нормально бордантно относительно $(S(\nu_L), S(\nu_{\partial L}))$ простой гомотопической эквивалентности триад

$$\alpha': (P'; \partial_+ P', S(\nu_L); S(\nu_{\partial L})) \rightarrow (Z; \partial_+ Z, S(\xi_Y); S(\xi_{\partial Y}))$$

посредством нормального бордизма

$$G: W \rightarrow Z \times I. \quad (10)$$

Ограничение отображения G на нижнее основание $W_0 = P$ совпадает с задаваемым α отображением $P \rightarrow Z = Z \times \{0\}$, а ограничение G на верхнее основание $W_1 = P'$ совпадает с задаваемой α' простой гомотопической эквивалентностью $P' \rightarrow Z = Z \times \{1\}$. Боковая граница многообразия W имеет вид

$$(S(\nu_L) \times I) \bigcup_{S(\nu_{\partial L})} V,$$

где многообразие V задает бордизм между $\partial_+ P$ и $\partial_+ P'$. Обозначим через F ограничение отображения G на многообразие $S(\nu_L) \times I$, являющееся частью боковой границы бордизма W . Отображение F имеет следующий вид:

$$F = G|_{S(\nu_L) \times I} = \phi \times \text{Id}: S(\nu_L) \times I \rightarrow S(\xi_Y) \times I. \quad (11)$$

Рассмотрим тривиальный нормальный бордизм

$$\psi \times \text{Id}: E(\nu_L) \times I \rightarrow E(\xi_Y) \times I. \quad (12)$$

Склеивая бордизмы $E(\nu_L) \times I$ и W по общей части $S(\nu_L) \times I$ их боковой границы, получим бордизм

$$W \bigcup_{S(\nu_L) \times I} (E(\nu_L) \times I)$$

с нижним основанием K и верхним основанием

$$M' = P' \bigcup_{S(\nu_L) \times \{1\}} (E(\nu_L) \times \{1\}). \quad (13)$$

Ограничения отображений G (10) и $\psi \times \text{Id}$ (12) на $S(\nu_L) \times I$ сопадают и равны отображению $F = \phi \times \text{Id}$ (11). Следовательно, определен нормальный бордизм

$$\Omega = G \bigcup_{\phi \times \text{Id}} (\psi \times \text{Id}): W \bigcup_{S(\nu_L) \times I} (E(\nu_L) \times I) \rightarrow X \times I$$

между нормальным отображением (g, dg) (6) на нижнем основании и нормальным отображением

$$(f', \partial f'): (M', \partial M') \rightarrow (X, \partial X) \quad (14)$$

на верхнем основании, где

$$(M', \partial M') = \left(P' \bigcup_{S(\nu_L) \times \{1\}} (E(\nu_L) \times \{1\}), \partial_+ P' \bigcup_{S(\nu_{\partial L}) \times \{1\}} (E(\nu_{\partial L}) \times \{1\}) \right).$$

Поскольку отображения $(f, \partial f)$ (1) и $(g, \partial g)$ (6) нормально бордантны, то отображение $(f, \partial f)$ (1) нормально бордантно отображению $(f', \partial f')$ (14). Ограничение отображения f' на $E(\nu_L) \times \{1\} = E(\nu_L)$ дает простую гомотопическую эквивалентность триад ψ , а ограничение отображения f' на P' дает простую гомотопическую эквивалентность триад α' . Для завершения доказательства случая А) необходимо убедиться, что отображения $f': M' \rightarrow X$ и $\partial f': \partial M' \rightarrow \partial X$ являются простыми гомотопическими эквивалентностями. Согласно (13) пространство M' является объединением двух подпространств P' и $E(\nu_L) \times \{1\}$, пересекающихся по $S(\nu_L) \times \{1\}$. Ограничения отображения f' на эти два подпространства и на их пересечение являются простыми гомотопическими эквивалентностями. Следовательно, согласно [7; теорема 23.1] отображение $f': M' \rightarrow X$ является простой гомотопической эквивалентностью. Для отображения $\partial f'$ ситуация аналогична. Случай А) доказан.

Теперь рассмотрим случай В). Отображение $(f, \partial f)$ (1) является простой гомотопической эквивалентностью пар. Поскольку отображение Δ является изоморфизмом, то согласно случаю А) отображение $(f, \partial f)$ нормально бордантно отображению

$$(f', \partial f'): (M', \partial M') \rightarrow (X, \partial X),$$

которое является s -триангуляцией пары (3) многообразий с границами. Таким образом, мы имеем нормальный бордизм

$$\Phi: W \rightarrow X \times I, \quad \partial W = W_0 \cup W_1 \cup V,$$

где

$$W_0 = M, \quad W_1 = M', \quad V = \Phi^{-1}(\partial X \times I).$$

Бордизм (W, Φ) задает нормальное отображение триад многообразий

$$(W; V, W_0 \cup W_1; \partial W_0 \cup \partial W_1) \rightarrow (X \times I; \partial X \times I, X \times \{0, 1\}; \partial X \times \{0, 1\}), \quad (15)$$

которое мы также будем обозначать через Φ .

Рассмотрим квадрат фундаментальных группоидов

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial X \times \{0, 1\}) & \longrightarrow & \pi_1(\partial X \times I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(X \times \{0, 1\}) & \longrightarrow & \pi_1(X \times I) \end{array} \quad (16)$$

триады

$$(X \times I; \partial X \times I, X \times \{0, 1\}; \partial X \times \{0, 1\}).$$

Изоморфизм Δ задает изоморфизм $\pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$ и, следовательно, правое вертикальное отображение $\pi_1(\partial X \times I) \rightarrow \pi_1(X \times I)$ в квадрате (16) является изоморфизмом. Ограничение нормального отображения Φ на пару $(W_0 \cup W_1, \partial W_0 \cup \partial W_1)$ является простой гомотопической эквивалентностью пар

$$(W_0 \cup W_1, \partial W_0 \cup \partial W_1) \rightarrow (X \times \{0, 1\}, \partial X \times \{0, 1\}),$$

поскольку

$$\Phi|_{W_0} = f: M \rightarrow X \quad \text{и} \quad \Phi|_{W_1} = f': M' \rightarrow X.$$

Следовательно, нормальное отображение триад (15) удовлетворяет условиям π - π -теоремы для триад многообразий относительно пары $(X \times \{0, 1\}, \partial X \times \{0, 1\})$.

Таким образом, отображение триад Φ (15) нормально бордантно относительно пары $(X \times \{0, 1\}, \partial X \times \{0, 1\})$ простой гомотопической эквивалентности триад

$$\Phi': (W'; V', W_0 \cup W_1; \partial W_0 \cup \partial W_1) \rightarrow (X \times I; \partial X \times I, X \times \{0, 1\}; \partial X \times \{0, 1\}),$$

где

$$\Phi'|_{W_0} = f, \quad \Phi'|_{W_1} = f', \quad \Phi'|_{\partial W_0} = \partial f, \quad \Phi'|_{\partial W_1} = \partial f'.$$

Согласно нашей конструкции отображение $(f', \partial f')$ является s -триангуляцией пары $(Y, \partial Y) \subset (X, \partial X)$ (3) многообразий с границами и отображение Φ' задает конкордантность между $(f, \partial f)$ и $(f', \partial f')$. Случай В) теоремы доказан.

В случае С) отображение f трансверсально $(Y, \partial Y)$ и его ограничение $f|_{(N, \partial N)}$ является простой гомотопической эквивалентностью $(N, \partial N) \rightarrow (Y, \partial Y)$. Следовательно, отображение $f|_{(N, \partial N)}$ индуцирует простую гомотопическую эквивалентность трубчатых окрестностей с границами (см. [1; с. 8] и [2; с. 579])

$$\psi: (E(\nu_N); E(\nu_{\partial N}), S(\nu_N); S(\nu_{\partial N})) \rightarrow (E(\xi_Y); E(\xi_{\partial Y}), S(\xi_Y); S(\xi_{\partial Y})),$$

которая является простой гомотопической эквивалентностью триад. В частности, ограничение ψ на $S(\nu_N)$ является простой гомотопической эквивалентностью пар

$$\phi: (S(\nu_N), S(\nu_{\partial N})) \rightarrow (S(\xi_Y), S(\xi_{\partial Y})),$$

ограничение которой на пару $(N, \partial N)$ есть простая гомотопическая эквивалентность пар $(f|_N, f|_{\partial N})$. Далее рассуждения такие же, как и в случае А). Достаточно положить

$$P = \overline{M \setminus E(\nu_N)}, \quad \partial_+ P = \overline{\partial M \setminus E(\nu_{\partial N})}$$

и рассмотреть ограничение отображения f на P , задающее нормальное отображение триад

$$\alpha = f|_P: (P; \partial_+ P, S(\nu_N); S(\nu_{\partial N})) \rightarrow (Z; \partial_+ Z, S(\xi_Y); S(\xi_{\partial Y})),$$

ограничение которого на $S(\nu_N)$ является простой гомотопической эквивалентностью пар ϕ . Теорема доказана.

Теперь применим полученные результаты к перестройкам многообразий с фильтрацией (см. [3]–[5] и [8]). Сначала напомним необходимые определения.

Пусть $Z^{n-q-q'} \subset Y^{n-q} \subset X^n$ – тройка замкнутых топологических многообразий (см. [2], [4] и [8]). Мы имеем следующие нормальные топологические расслоения: ξ_Y для подмногообразия Y в X , η_Z для подмногообразия Z в Y и ν_Z для подмногообразия Z в X . Пусть $(E(\xi_Y), S(\xi_Y))$, $(E(\eta_Z), S(\eta_Z))$ и $(E(\nu_Z), S(\nu_Z))$ – пространства ассоциированных (D^*, S^{*-1}) -расслоений соответственно. Мы отождествляем пространство $E(\nu_Z)$ с пространством $E(\xi_{E(\eta_Z)})$ ограничения расслоения ξ_Y на пространство $E(\eta_Z)$ (см. [3] и [4]), так что

$$E(\nu_Z) = E(\xi_{E(\eta_Z)}) \quad \text{и} \quad S(\nu_Z) = E(\xi_{S(\eta_Z)}) \cup S(\xi_{E(\eta_Z)}). \quad (17)$$

Пусть

$$(X_k, \partial X_k) \subset (X_{k-1}, \partial X_{k-1}) \subset \cdots \subset (X_0, \partial X_0) = (X, \partial X) \quad (18)$$

– фильтрация компактного многообразия $(X, \partial X)$ подмногообразиями с границами (см. [3]–[5]). Отсюда будем предполагать, что размерность $\dim X_k \geq 6$.

Фильтрация (18) дает фильтрацию

$$\partial X_k \subset \partial X_{k-1} \subset \cdots \subset \partial X_0 = \partial X \quad (19)$$

границы ∂X замкнутыми многообразиями. Напомним, что любая тройка многообразий из фильтратов (18) и (19) удовлетворяет свойствам, которые аналогичны (17), на соответствующие нормальные расслоения, и каждая пара многообразий с границами из фильтрации (18) является топологической парой многообразий, определенной в п. 1. Фильтрация (18) определяет стратифицированное многообразие с границей $(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ (см. [3]–[5]).

Топологическое нормальное отображение (1) в фильтрацию $(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ (18) является t -триангуляцией этой фильтрации, если оно трансверсально всем подмногообразиям фильтрации (18) с трансверсальными прообразами

$$(M_i, \partial M_i) = (f^{-1}(X_i), (\partial f)^{-1}(\partial X_i)),$$

и составляющие отображения

$$f|_{(M_j, M_i)} : (M_j, M_i) \rightarrow (X_j, X_i), \quad 0 \leq j \leq i \leq k,$$

являются t -триангуляциями пар многообразий (X_j, X_i) с границами. Любое топологическое нормальное отображение (1) нормально бордантно t -триангуляции фильтрации (18) (см. [4] и [5]). Таким образом, можем считать, что нормальное отображение $(f, \partial f)$ (1) трансверсально всем подмногообразиям $(X_i, \partial X_i)$ фильтрации (18). Топологическое нормальное отображение (1) в фильтрацию $(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ (18) является s -триангуляцией этой фильтрации, если составляющие нормальные отображения

$$f|_{(M_j, M_i)} : (M_j, M_i) \rightarrow (X_j, X_i), \quad 0 \leq j \leq i \leq k,$$

являются s -триангуляциями пар многообразий (X_j, X_i) с границами. Определены стратифицированные группы Браудера–Квинна $L_n^{BQ}(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ препятствий к перестройкам t -триангуляции фильтрации $(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ до s -триангуляции фильтрации $(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ [3].

Пусть F_i , $1 \leq i \leq k$, обозначает квадрат фундаментальных групп в задаче расщепления для пары многообразий $X_i \subset X_{i-1}$ и Ψ_i – аналогичный квадрат для пары замкнутых многообразий $\partial X_i \subset \partial X_{i-1}$. Естественные вложения границ индуцируют отображения

$$\Delta_i : \Psi_i \rightarrow F_i$$

для $1 \leq i \leq k$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть все отображения Δ_i , $1 \leq i \leq k$, являются изоморфизмами. Тогда любое нормальное отображение $(f, \partial f)$ (1) в стратифицированное многообразие $(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ нормально бордантно s -триангуляции $(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ и, следовательно, группа $L_n^{BQ}(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$ тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $(f_{k-1}, \partial f_{k-1})$ ограничение нормального отображения $(f, \partial f)$ на подмногообразии $(M_{k-1}, \partial M_{k-1})$. Согласно случаю А) теоремы отображение $(f_{k-1}, \partial f_{k-1})$ нормально бордантно s -триангуляции $(g_{k-1}, \partial g_{k-1})$ пары

$$(X_{k-1}, \partial X_{k-1}) \supset (X_k, \partial X_k) \quad (20)$$

многообразий с границами. Согласно [6] мы можем продолжить этот бордизм до получения бордизма $F: W \rightarrow X \times I$ с верхним нормальным отображением $(g, \partial g)$ в $(X, \partial X)$, ограничение которого $(g_{k-1}, \partial g_{k-1})$ на трансверсальный прообраз (X_{k-1}, X_k) является s -триангуляцией пары (20) многообразий с границами. Без ограничения общности можно считать, что отображение $(g, \partial g)$ трансверсально всем подмногообразиям $(X_i, \partial X_i)$, $1 \leq i \leq k$, фильтрации (18). Для отображения $(g, \partial g)$ мы будем по-прежнему обозначать через $(M_i, \partial M_i)$ трансверсальный прообраз подмногообразия $(X_i, \partial X_i)$.

Рассмотрим ограничение отображения $(g, \partial g)$ на подмногообразии $(M_{k-2}, \partial M_{k-2})$. Согласно случаю C) теоремы отображение $(g, \partial g)|_{(M_{k-2}, \partial M_{k-2})}$ нормально бордантно s -триангуляции $(g_{k-2}, \partial g_{k-2})$ пары

$$(X_{k-2}, \partial X_{k-2}) \supset (X_{k-1}, \partial X_{k-1})$$

многообразий с границами, и

$$(g_{k-2}, \partial g_{k-2})|_{(M_{k-1}, \partial M_{k-1})} = (g_{k-1}, \partial g_{k-1}).$$

Согласно [6] мы можем продолжить этот бордизм до получения бордизма $F': W' \rightarrow X \times I$ с верхним нормальным отображением $(g', \partial g')$, которое трансверсально всем подмногообразиям фильтрации (18). Пусть, как и выше, $(M_i, \partial M_i)$ обозначает трансверсальный прообраз $(X_i, \partial X_i)$ при отображении $(g', \partial g')$. Ограничение $(g', \partial g')$ на $(M_{k-2}, \partial M_{k-2})$ совпадает с $(g_{k-2}, \partial g_{k-2})$, а ограничение на $(M_{k-1}, \partial M_{k-1})$ совпадает с $(g_{k-1}, \partial g_{k-1})$.

Продолжая эти рассуждения и используя случай C) теоремы, приходим к отображению

$$(g_0, \partial g_0): (M', \partial M') \rightarrow (X, \partial X)$$

со следующими свойствами. Для любого $0 \leq j \leq k-1$ ограничение $(g_0, \partial g_0)$ на трансверсальный прообраз $(X_j, \partial X_j)$ является s -триангуляцией $(g_j, \partial g_j)$ пары

$$(X_j, \partial X_j) \supset (X_{j+1}, \partial X_{j+1})$$

многообразий с границами. Теперь нам потребуется следующий результат.

Если некоторое нормальное отображение $(f, \partial f): (M, \partial M) \rightarrow (X, \partial X)$ является s -триангуляцией подфильтрации

$$(X_{k-1}, \partial X_{k-1}) \subset \cdots \subset (X_1, \partial X_1) \subset (X, \partial X), \quad (21)$$

и ограничение $(f, \partial f)|_{(M_{k-1}, \partial M_{k-1})}$ является s -триангуляцией пары (20) многообразий с границами, то, как следует из [4; предложение 2.5], отображение $(f, \partial f)$ будет s -триангуляцией фильтрации (18) $(\mathcal{X}, \partial \mathcal{X})$.

Применим этот результат $k-1$ раз, начав с подфильтрации

$$(X_1, \partial X_1) \subset (X_0, \partial X_0)$$

фильтрации

$$(X_2, \partial X_2) \subset (X_1, \partial X_1) \subset (X_0, \partial X_0)$$

и закончив на подфильтрации (21) фильтрации (18). Следствие доказано.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. T. C. Wall, *Surgery on Compact Manifolds*, 2nd edition, Mathematical Surveys and Monographs, **69**, ed. A. A. Ranicki, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [2] A. A. Ranicki, *Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery*, Math. Notes, **26**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.
- [3] W. Browder, F. Quinn, “A surgery theory for G -manifolds and stratified spaces”, *Manifolds* (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973), Univ. Tokyo Press, 1975, 27–36.
- [4] Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Р. Хименез, “Спектральная последовательность в теории перестроек и многообразия с фильтрацией”, *Тр. ММО*, **67** (2006).
- [5] S. Weinberger, *The Topological Classification of Stratified Spaces*, Chicago Lectures in Mathematics, Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
- [6] S. Lopez de Medrano, *Involutions on Manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **69**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [7] M. M. Cohen, *A Course in Simple-Homotopy Theory*, Grad. Texts in Math., **10**, Springer-Verlag, New York, 1973.
- [8] Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Ф. Спаггиари, “Перестройка троек многообразий”, *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 139–160.

Ю. В. Муранов

Витебский государственный университет

E-mail: ymuranov@mail.ru

Поступило

29.06.2005

Исправленный вариант

10.03.2006

Д. Реповш

Institute for Mathematics, Physics and Mechanics,

University of Ljubljana, Slovenia

E-mail: dusan.repovs@guest.arnes.si

М. Ценцель

Institute for Mathematics, Physics and Mechanics,

University of Ljubljana, Slovenia

E-mail: matija.cencelj@guest.arnes.si