Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин, Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 417–426

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:06:05

Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве

С. Н. Ощепкова, О. М. Пенкин

В статье для эллиптического оператора на стратифицированном множестве для “стратифицированных” сфер достаточно малого радиуса получен аналог теоремы о среднем для гармонических функций; в отличие от классического случая она имеет здесь вид специального дифференциального соотношения, связывающего среднее по различным участкам сферы. Результат применяется для доказательства сильного принципа максимума.

Библиография: 8 названий.

Сильный принцип максимума для эллиптических неравенств вида $\nabla(p\nabla u) - qu \geq 0$ на произвольном стратифицированном множестве в полном объеме пока не установлен. Доказательство его в случае, когда размерности стратов не превосходят двух, получено в работах [1], [2]. Даже в этом случае доказательство оказывается довольно сложным, хотя в его основе лежит хорошо известная конструкция, принадлежащая О. А. Олейник и Э. Хопфу. Трудности связаны, главным образом, со сложной геометрией стратифицированного множества, что приводит к необходимости построения довольно громоздких барьерных функций.

В данной работе рассматривается несколько более узкий (но содержательный) класс стратифицированных множеств. А именно, все страты предполагаются “плоскими”. Кроме того, коэффициент p считается, так называемой, стратифицированной константой. В этих условиях оказывается возможным установить теорему о среднем для решений уравнения $\nabla(p\nabla u) = 0$. Хотя найденный аналог теоремы о среднем оказывается сложнее классического, на его основе в ряде случаев удастся получить простые доказательства сильного принципа максимума без ограничения на размерность стратифицированного множества.

1. Основные определения. Определение стратифицированного множества, адаптированное для изучения дифференциальных уравнений на нем, а также определения других необходимых понятий, имеются, например, в [3]–[5]. Поэтому мы ограничимся здесь лишь кратким их описанием, необходимым для полноты изложения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00697, программы “Университеты России”, грант № УР 04.01.486, и Белгородского государственного университета, грант № ВКГ 013-05.

Стратифицированным мы называем связное подмножество Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, составленное из конечного числа гладких многообразий (стратов) σ_{ki} . В обозначении σ_{ki} первый индекс, как обычно, служит для указания размерности страта σ_{ki} , а второй – для автономной нумерации стратов размерности k . Мы требуем выполнения двух условий:

- 1) граница $\partial\sigma_{ki} = \bar{\sigma}_{ki} \setminus \sigma_{ki}$ страта σ_{ki} является объединением некоторых из стратов σ_{mi} с $m < k$;
- 2) если $X \in \sigma_{ki}$, а $\sigma_{k+1,j_1}, \dots, \sigma_{k+1,j_m}$ – все $(k+1)$ -мерные страты, примыкающие к σ_{ki} , то существует окрестность $U_X \subset \mathbb{R}^n$ и такой диффеоморфизм φ этой окрестности, что образ пересечения U_X с объединением страта σ_{ki} со всеми стратами $\sigma_{k+1,j}$, к нему примыкающими, представляет собой объединение участка некоторой k -мерной плоскости (образа $\sigma_{ki} \cap U_X$) и участков $(k+1)$ -мерных полупространств (образов $\sigma_{k+1,j_\nu} \cap U_X$), как это показано на рис 1.

Рис. 1. Локальное выпрямление

Более точно, стратифицированное множество – это тройка (Ω, Σ, Φ) , где Ω – исходное связное подмножество $\mathbb{R}^n$, Σ – набор стратов, а Φ – отображение, “склеивающее” Ω из стратов системы Σ .

Условие 1) – стандартное требование (см., например, [6]), накладываемое на объекты типа клеточного комплекса. Вместо условия 2) в теории стратифицированных множеств (см., например, [7]) обычно накладываются два условия Уитни, которые приводят к слишком широкому для нас классу стратифицированных множеств; не все результаты данной работы применимы к такому классу.

Множество Ω разобьем на две части: Ω_0 и $\partial\Omega_0$. В качестве Ω_0 можно взять любое открытое связное подмножество Ω (в топологии, индуцированной на Ω из $\mathbb{R}^n$), составленное из его стратов и такое, что $\bar{\Omega}_0 = \Omega$. Разность $\Omega \setminus \Omega_0$ в индуцированной на Ω топологии является топологической границей Ω_0 , а потому обозначается $\partial\Omega_0$. Формально не исключаются случаи, когда $\Omega_0 = \Omega$, т.е. $\partial\Omega_0 = \emptyset$. В этом случае обсуждаемое далее множество гармонических на Ω_0 функций состоит из одних лишь констант (см. [5]). Чтобы избежать подобной тривиализации, будем предполагать далее, что $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$.

Определим на Ω меру μ по формуле

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{ki}} \mu_k(\omega \cap \sigma_{ki}), \quad (1)$$

где μ_k – k -мерная мера Лебега на страте σ_{ki} , а ω – измеримое множество; *измеримыми*, очевидно, оказываются множества $\omega \subset \Omega$, пересечение которых со всеми стратами измеримо по Лебегу.

Интеграл Лебега измеримой функции $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ по такой мере сводится к сумме

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{ki}} \int_{\sigma_{ki}} f d\mu_k$$

интегралов Лебега по отдельным стратам.

В дальнейшем $d\mu$, $d\mu_k$ в записях интегралов опускаются.

Векторное поле $\vec{F}$ на Ω_0 назовем *касательным* к Ω_0 , если для любого страта $\sigma_{ki} \subset \Omega_0$ и любой точки $X \in \sigma_{ki}$ вектор $\vec{F}(X)$ принадлежит касательному к σ_{ki} в точке X пространству $T_X \sigma_{ki}$; в нульмерных стратах естественно считать $\vec{F} = 0$.

Пусть $X \in \sigma_{k-1,i}$. Дивергенция $\vec{F}(X)$ определяется соотношением

$$(\nabla \vec{F})(X) = (\nabla_{k-1} \vec{F})(X) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} \vec{F} \cdot \vec{\nu}|_{\overline{kj}}(X), \quad (2)$$

где ∇_{k-1} – классический оператор дивергенции (первый дифференциальный параметр Лапласа–Бельтрами) на $\sigma_{k-1,i}$, а запись вида $\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}$ означает примыкание страта $\sigma_{k-1,i}$ к σ_{kj} , $\vec{\nu}$ – единичная нормаль к $\sigma_{k-1,i}$ в точке X , направленная внутрь страта σ_{kj} . В дальнейшем, например для функции $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, обозначение типа $u|_{\overline{kj}}(X)$ ($X \in \sigma_{k-1,i} \succ \sigma_{kj}$) означает продолжение по непрерывности в точку X сужения $u|_{\sigma_{kj}}$ функции u на σ_{kj} . Конечно, предполагается, что такое продолжение существует; так будет, например, в случае, если упомянутое сужение является равномерно непрерывной на σ_{kj} функцией. Если u не является непрерывной в целом на Ω , то, вообще говоря, $u|_{\overline{kj}}(X) \neq u(X)$. Можно показать, что дивергенция, определяемая формулой (2), является плотностью потока векторного поля $\vec{F}$ по отношению к мере, определенной формулой (1).

Из формулы (2) следует, что для существования дивергенции векторного поля $\vec{F}$ достаточно потребовать, чтобы поле $\vec{F}$ принадлежало классу C^1 на каждом страте σ_{ki} (что обеспечивает существование классической части дивергенции) и чтобы описанные выше продолжения существовали (чтобы определить “неклассическую” часть дивергенции). Класс таких полей обозначим $C^1(\Omega_0)$.

Пусть $u: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема внутри каждого страта. Тогда можно рассмотреть векторное поле ∇u , сужение которого на каждый страт σ_{ki} из Ω_0 совпадает с полем градиента $\nabla_k u$. Заметим, что мы не предполагали какой-либо связи между сужениями функции u на отдельные страты, поэтому фактически ∇u – набор независимых векторных полей. Если ∇u принадлежит классу $C^1(\Omega_0)$, то мы можем рассмотреть оператор $\Delta u = \nabla(\nabla u)$, который естественно назвать оператором Лапласа. Как обычно, мы употребляем один и тот же символ ∇ для градиента и для дивергенции, условившись трактовать его как дивергенцию, если он применяется к векторному полю, и как градиент, если он применяется к скалярной функции. Всюду далее u предполагается непрерывной на Ω_0 . Если при этом $\nabla u \in C^1(\Omega_0)$, то будем писать, что $u \in C^2(\Omega_0)$.

2. Теорема о среднем. В этом пункте предполагается, что каждый страт σ_{ki} является k -мерным многогранником, хотя некоторые результаты этого пункта верны и в общем случае. Будем рассматривать оператор Δ_p , действующий по формуле

$$\Delta_p u = \nabla(p \nabla u),$$

где функция $p: \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$ может быть разрывной на Ω_0 , но в пределах каждого страта является постоянной; такую функцию будем называть *стратифицированной константой*. Нетрудно заметить, что если $\vec{F} \in C^1(\Omega_0)$, то $p\vec{F} \in C^1(\Omega_0)$, а потому для функции $u \in C^2(\Omega_0)$ выражение $\Delta_p u$ имеет смысл.

Явное выражение для $\Delta_p u$ в точке $X \in \sigma_{k-1,i}$ в силу (2) имеет следующий вид:

$$\Delta_p u(X) = \nabla_{k-1}(p \nabla_{k-1} u)(X) + \sum_{\sigma_{kj} \succ \sigma_{k-1,i}} p \nabla u \cdot \vec{\nu}|_{kj}(X).$$

Те страты, которые не примыкают к стратам большей размерности (таковы, например, страты наибольшей размерности) назовем *свободными*. В дальнейшем предполагается, что коэффициент p на таких стратах положителен (в целом же $p \geq 0$). Очевидно, что на свободных стратах оператор $\Delta_p u$ сводится к обычному $(k-1)$ -мерному лапласиану: $\Delta_p u = p \Delta_{k-1} u$. Очевидно, что объединение замыканий свободных стратов совпадает с Ω .

Пусть $X_0 \in \sigma_{ki} \subset \Omega_0$, а $r > 0$ меньше расстояния до всех стратов (исключая σ_{ki}), размерность которых не превосходит k , и $B_r(X_0)$ – шар в пространстве $\mathbb{R}^n$. Пересечение $\Omega_0 \cap \partial B_r(X_0) = S_r(X_0)$ назовем *стратифицированной сферой* в Ω_0 , или просто *сферой*. Пример такой сферы изображен на рис 2.

Рис. 2. Пример стратифицированной сферы

Сферу S_r (когда речь идет о произвольной сфере, мы часто опускаем явное указание ее центра) можно рассматривать как стратифицированное множество, а именно, объявим пересечение вида $S_r \cap \sigma_{ki}$ $(k-1)$ -мерным стратом S_r . Объединение всех k -мерных стратов сферы S_r обозначим S_r^k . Мера на стратифицированной сфере определяется также (см. выше) как на произвольном стратифицированном множестве. Все встречающиеся далее интегрирования по сферам относятся именно к этой мере.

В работе [5] доказан аналог второй формулы Грина, а именно, для достаточно гладких функций u и v (внутри Ω_0 достаточно требовать принадлежности к классу $C^2(\Omega_0)$) имеет место следующая формула:

$$\int_{\Omega_0} (v \Delta_p u - u \Delta_p v) = \int_{\partial \Omega_0} (u (p \nabla v)_\nu - v (p \nabla u)_\nu), \quad (3)$$

где $\vec{\nu}$ на каждом страте из $\partial \Omega_0$ определяется указанным выше способом. Полагая в этой формуле $v \equiv 1$, получим для функции $u \in C^2(\Omega_0)$ и произвольной сферы S_r , что

$$\int_{\partial S_r} (p \nabla u)_\nu = 0, \quad (4)$$

где $\vec{\nu}$ – нормаль к S_r , а $(p \nabla u)_\nu$ в рассматриваемой ситуации (в отличие от общего случая, рассмотренного в [5]) сводится к

$$(p \nabla u)_\nu = p \nabla u \cdot \vec{\nu} = p \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Из соотношения (4) можно вывести аналог теоремы о среднем для гармонических функций. Для этого нам потребуется следующее утверждение. Начиная со следующего утверждения, будет удобно считать, что $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль.

ЛЕММА 1. Пусть $u \in C^1(\Omega_0)$. Тогда, считая $\vec{\nu}$ внешней нормалью к $S_r(X)$, имеем

$$\frac{d}{dr} M_{S_r^k}(u) = \frac{1}{|S_r^k|_p} \int_{S_r^k(X)} (p \nabla u)_\nu d\mu_r, \quad (5)$$

где

$$|S_r^k|_p = \int_{S_r^k} p d\mu_r,$$

а $M_{S_r^k}(u)$ – взвешенное среднее функции u

$$M_{S_r^k}(u) = \frac{1}{|S_r^k|_p} \int_{S_r^k} p u d\mu_r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$M_{S_{r+\Delta r}^k(X)}(u) = \frac{1}{|S_{r+\Delta r}^k(X)|_p} \int_{S_{r+\Delta r}^k} p u d\mu_{r+\Delta r}.$$

Переносим интегрирование со сферы радиуса $r + \Delta r$ на сферу радиуса r и учитывая, что $p d\mu_{r+\Delta r} = p(1 + \Delta r/r)^{(k-1)} d\mu_r$, получаем

$$M_{S_{r+\Delta r}^k(X)}(u) = \frac{1}{|S_r^k|_p} \int_{S_r^k} p u \left(Z + Z \cdot \frac{\Delta r}{r} \right) d\mu_r,$$

где $Z \in S_r^k$. Тем самым, для приращения $\Delta M_{S_r^k(X)}(u)$ получаем формулу

$$\Delta M_{S_r^k}(u) = \frac{1}{|S_r^k|_p} \int_{S_r^k} p \left(u \left(Z + Z \cdot \frac{\Delta r}{r} \right) - u(Z) \right) d\mu_r.$$

Применяя к разности под знаком интеграла формулу конечных приращений, получаем

$$\Delta M_{S_r^k}(u) = \frac{\Delta r}{|S_r^k|_p} \int_{S_r^k} p \nabla u(Z) \cdot \vec{\nu} d\mu_r + o(\Delta r),$$

откуда и следует доказываемая формула.

Заметим теперь, что формулу (5) можно переписать в виде

$$\alpha_k r^k \frac{d}{dr} M_{S_r^k}(u) = \int_{S_r^k} p \nabla u(Z) \cdot \vec{\nu} d\mu_r,$$

где α_k не зависит от радиуса. Явное выражение для α_k очевидно. Отметим, что если $p = 0$ на всех k -мерных стратах, пересекающихся с рассматриваемой сферой, то $\alpha_k = 0$. Складывая все такие формулы по всем k от $k = 0$ до $k = d - 1$, получаем

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k r^k \frac{d}{dr} M_{S_r^k}(u) = \int_{S_r} p \nabla u(Z) \cdot \vec{\nu} d\mu_r = \int_{S_r} (p \nabla u)_\nu d\mu_r. \quad (6)$$

Вспоминая теперь формулу (4) для решения уравнения

$$\Delta_p u = 0, \quad (7)$$

получаем аналог (в дифференциальной форме) классической теоремы о среднем (частный случай имеется также в работе [8]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть u – решение уравнения (7). Тогда для любого $X \in \Omega_0$ и любой стратифицированной сферы имеем

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k r^k \frac{d}{dr} M_{S_r^k(X)}(u) = 0. \quad (8)$$

Заметим, что эта формула верна для любой стратифицированной константы; т.е. p может обращаться в нуль в стратах любой размерности (но не в свободных). В частности, из нее можно вывести теорему о среднем в обычном (не дифференциальном) виде для случая, когда p отличен от нуля лишь в свободных стратах, и все они имеют одинаковую размерность d .

В самом деле, в этом случае все слагаемые в (8), кроме слагаемого, отвечающего $k = d - 1$, обращаются в нуль, и получается (вновь мы ради простоты обозначений не указываем центр сферы)

$$\alpha_k r^{d-1} \frac{d}{dr} M_{S_r^{d-1}}(u) = 0.$$

Отсюда следует, что $M_{S_r^{d-1}}(u) = \text{const}$. Но в данном случае $M_{S_r^{d-1}}(u) = M_{S_r}(u)$. Остается перейти к пределу при $r \rightarrow 0$, чтобы получить требуемое. В частности, отсюда получается классическая теорема о среднем для гармонических функций.

3. Некоторые приложения теоремы о среднем. В этом пункте даются некоторые приложения теоремы о среднем, относящиеся к принципу максимума. В рассматриваемом нами случае решение неравенства $\Delta_p u \geq 0$ может иметь точки локального максимума в Ω_0 , не будучи при этом постоянным на Ω_0 . Однако оно не может иметь так называемых точек нетривиального максимума; $X_0 \in \Omega_0$ называется *точкой нетривиального максимума*, если в некоторой окрестности точки X_0 имеет место неравенство $u(X) \leq u(X_0)$, но ни в какой окрестности этой точки функция u не постоянна.

ЛЕММА 2. Пусть $u \in C^2(\Omega_0)$, а X – точка нетривиального локального максимума функции u , причем $u(X) = 0$. Пусть далее

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{d-1}} \int_{S_r(X)} pu \, d\mu = 0. \quad (9)$$

Тогда найдутся такие сколь угодно малые положительные r , что

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k r^k \frac{d}{dr} M_{S_r^k}(u) < 0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В очевидной формуле

$$\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k r^k \frac{d}{dr} M_{S_r^k}(u) = \frac{d}{dr} \left(\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k r^k M_{S_r^k}(u) \right) - \sum_{k=1}^{d-1} k \alpha_k r^{k-1} M_{S_r^k}(u) \quad (11)$$

выражение в скобках в точности равно

$$\int_{S_r} pu \, d\mu = \phi(r).$$

Из условий следует, что $u(Y) \leq 0$ в достаточной близости от точки X , а потому $M_{S_r^k} \leq 0$. В силу этого из (11) выводим такую оценку:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k r^k \frac{d}{dr} M_{S_r^k}(u) &\leq \frac{d}{dr} \left(\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k r^k M_{S_r^k}(u) \right) - \frac{d-1}{r} \sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k r^k M_{S_r^k}(u) \\ &= \phi'(r) - \frac{d-1}{r} \phi(r) = r^{d-1} \left(\frac{\phi(r)}{r^{d-1}} \right)'. \end{aligned} \quad (12)$$

Предположим, что вопреки утверждаемому, сумма в левой части этого неравенства неотрицательна при всех достаточно малых r . Тогда функция

$$\psi(r) = \frac{\phi(r)}{r^{d-1}}$$

не убывает. По условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} \psi(r) = 0.$$

Отсюда следует, что $\psi(r) \geq 0$ при всех достаточно малых r . Но тогда

$$\phi(r) = \int_{S_r} pu \, d\mu \geq 0.$$

С другой стороны, очевидно, что этот интеграл неположителен. Следовательно,

$$\int_{S_r} pu \, d\mu = 0$$

при всех достаточно малых r . Отсюда следует, что, по крайней мере, на участках S_r^k сферы S_r , получающихся пересечением этой сферы со свободными стратами (напомним, что на них $p > 0$), $u = 0$. Но тогда $u = 0$ на всей сфере S_r , поскольку функция u непрерывна, а объединение замыканий участков S_r^k , упомянутых выше, совпадает с S_r . Поскольку это верно при всех достаточно малых r , то $u = 0$ в некоторой окрестности точки X , что противоречит нетривиальности максимума в точке X .

В качестве иллюстрации доказанного утверждения приведем простое доказательство сильного принципа максимума для решения неравенства $\Delta_p u \geq 0$ в некоторых специальных случаях. Первый из этих случаев, обсуждаемый в следующей теореме, очевидно, содержит в себе классический сильный принцип максимума для субгармонических функций.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u \in C^2(\Omega_0)$ является решением неравенства $\Delta_p u \geq 0$. Пусть далее $p > 0$ только в свободных стратах и их размерности совпадают. Тогда u не может иметь в Ω точек локального нетривиального максимума.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, вопреки доказываемому, X_0 – точка локального нетривиального максимума. Без ограничения общности можно считать $u(X_0) = 0$ (в противном случае вместо u можно рассмотреть функцию $u - u(X_0)$). Из формулы Грина (3) нетрудно вывести, что из неравенства $\Delta_p u \geq 0$ следует

$$\int_{S_r} (p \nabla u)_\nu = \int_{S_r} p \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0 \quad (13)$$

при любом допустимом $r > 0$.

Пусть d – размерность свободных стратов в Ω_0 . Так как $p = 0$ во всех стратах из Ω_0 , размерность которых меньше d , имеем

$$\frac{\phi}{r^{d-1}} = \frac{\int_{S_r(X)} pu}{r^{d-1}} = \frac{\int_{S_r^{d-1}(X)} pu}{r^{d-1}},$$

а в силу того, что u непрерывна и $u(X) = 0$, интеграл в числителе последней дроби имеет порядок $o(r^{d-1})$. Согласно лемме 2 и равенству (6) найдутся сколь угодно малые $r > 0$ такие, что

$$\int_{S_r} p \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0.$$

А это противоречит (13).

В общем случае проверка условия (9) затруднительна. Однако, при $d = 2$ (где d – максимальная размерность стратов, входящих в Ω_0) на основе леммы 2 все же удастся получить простое доказательство сильного принципа максимума. А именно, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть максимальная размерность стратов, входящих в Ω_0 , равна двум. Пусть коэффициент p положителен, по крайней мере, на всех свободных стратах. Тогда решение неравенства $\Delta_p u \geq 0$ не может иметь локальных нетривиальных максимумов в Ω_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть X_0 – точка локального нетривиального максимума функции u . Без ограничения общности вновь будем считать, что $u(X_0) = 0$. Рассмотрим сначала случай, когда X_0 совпадает с одним из нульмерных стратов; пусть это будет σ_{0m} . Пусть далее $\sigma_{1i_1}, \dots, \sigma_{1i_l}$ – все одномерные страты, к которым примыкает σ_{0m} . Обозначим через $X_1, \dots, X_l$ точки пересечения этих стратов с $\partial B_r(X_0)$. Множество этих точек как раз образует часть S_r^0 сферы $S_r = \partial B_r(X_0) \cap \Omega_0$. Покажем, что

$$\frac{1}{r} \int_{S_r} pu \rightarrow 0 \quad (14)$$

при $r \rightarrow 0$.

Из определения интеграла следует

$$\frac{1}{r} \int_{S_r} pu = \frac{1}{r} \int_{S_r^0} pu + \frac{1}{r} \int_{S_r^1} pu = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^l (pu)(X_i) + \frac{1}{r} \int_{S_r^1} pu.$$

Рассуждая как в доказательстве предыдущего утверждения, легко показать, что последний из написанных интегралов стремится к нулю при стремлении r к нулю. Далее имеем

$$\frac{1}{r} \sum_{i=1}^l (pu)(X_i) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^l p(u(X_i) - u(X_0)).$$

Отсюда видно, что при стремлении r к нулю

$$\frac{1}{r} \int_{S_r^0} pu \rightarrow \sum_{\sigma_{1i_k} \succ \sigma_{0m}} p \nabla u \cdot \vec{\nu}|_{\overline{1i_k}}(X_0) = \Delta_p u \geq 0. \quad (15)$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{r} \int_{S_r^0} pu \leq 0. \quad (16)$$

Сравнивая (15) и (16), приходим к выводу, что

$$\frac{1}{r} \lim_{r \rightarrow 0} pu = 0.$$

Тем самым доказано (14). Вновь на основе леммы 2 заключаем, что найдутся сколь угодно малые $r > 0$ такие, что

$$\int_{S_r} p \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0.$$

Однако, как отмечалось выше, неравенство $\Delta_p u \geq 0$ влечет за собой (13), и мы получили противоречие.

Случаи, когда X_0 лежит в одномерных или двумерных стратах, рассматриваются еще проще. Более того, когда X_0 лежит в двумерном страте, мы оказываемся в классической ситуации (u гармоническая в них) и доказательство не требуется.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Гаврилов, О. М. Пенкин, “Аналог леммы о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве”, *Дифференц. уравнения*, **36**:2 (2000), 226–232.
- [2] О. М. Пенкин, “О принципе максимума для эллиптического уравнения на двумерном клеточном комплексе”, *Докл. РАН*, **352**:4 (1997), 462–465.
- [3] O. Penkin, “About a geometrical approach to multistructures and some qualitative properties of solutions”, *Partial Differential Equations on Multistructures* (Luminy, 1999), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **219**, eds. F. Ali Mehmeti, J. von Belov, S. Nicaise, Marcel Dekker, New York, 2001, 183–191.
- [4] A. A. Gavrilov, S. Nicaise, O. M. Penkin, “Poincaré’s inequality on stratified sets and applications”, *Evolution Equations: Applications to Physics, Industry, Life Sciences and Economics* (Levico Terme, 2000), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **55**, Birkhäuser, Basel, 2003, 195–213.
- [5] О. М. Пенкин, Ю. В. Покорный, “О несовместных неравенствах для эллиптических операторов на стратифицированных множествах”, *Дифференц. уравнения*, **34**:8 (1998), 1107–1113.
- [6] А. Т. Фоменко, *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*, Изд-во МГУ, М., 1983.
- [7] F. Pham, *Introduction a l’étude topologique des singularités de Landau*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [8] S. Nicaise, O. M. Penkin, “Poincaré–Perron’s method for the Dirichlet problem on stratified sets”, *J. Math. Anal. Appl.*, **296**:2 (2004), 504–520.

С. Н. Ощепкова

Белгородский государственный университет

E-mail: oshepkova@bsu.edu.ru

Поступило

30.06.2005

О. М. Пенкин

Белгородский государственный университет

E-mail: penkin@cid.ru