Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Федотов, Оценка нормы интерполяционного оператора Лагранжа в многомерном пространстве Соболева, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 427–433

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 18:16:13

Оценка нормы интерполяционного оператора Лагранжа в многомерном пространстве Соболева

А. И. Федотов

Получена оценка нормы интерполяционного оператора Лагранжа в многомерном пространстве Соболева. Показано, что при определенном выборе последовательности мультииндексов интерполяционные полиномы сходятся к интерполируемой функции, причем скорость сходимости имеет порядок наилучшего приближения этой функции.

Библиография: 2 названия.

В работе [1] обоснован метод коллокаций для периодических сингулярных интегральных и эллиптических псевдодифференциальных уравнений в пространствах Соболева. Важную роль в обосновании и получении оценок скорости сходимости метода играет тот факт (лемма 1), что интерполяционный оператор Лагранжа в этом пространстве ограничен. Для обобщения этих результатов на случай многомерных уравнений необходима оценка нормы интерполяционного оператора Лагранжа в многомерных пространствах Соболева.

Ниже показано, что в пространствах Соболева H^s размерности m ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $s > m/2$) норма интерполяционного оператора Лагранжа порядка $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ зависит от функции $M(\mathbf{n})$, которая в зависимости от выбора последовательности мультииндексов $(\mathbf{n})$, $\mathbf{n} \rightarrow \infty$, либо остается ограниченной, либо неограниченно возрастает.

1. Постановка задачи. Зафиксируем натуральное $m \in \mathbb{N}$ и обозначим $\mathbf{N} = \mathbb{N}^m$, $\mathbf{N}_0 = \mathbb{N}_0^m$, $\mathbf{Z} = \mathbb{Z}^m$, $\mathbf{R} = \mathbb{R}^m$, $\mathbf{\Delta} = \Delta^m$ декартовы степени множеств $\mathbb{N}$ – натуральных, $\mathbb{N}_0$ – натуральных, дополненных нулем, $\mathbb{Z}$ – целых, $\mathbb{R}$ – действительных чисел и интервала $\Delta = (-\pi; \pi] \subset \mathbb{R}$ соответственно. Для элементов $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ этих множеств (m -компонентных векторов) наряду с обычными операциями сложения, вычитания и умножения на число введем следующие операции:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{k} = \sum_{j=1}^m l_j k_j, \quad \mathbf{l}^2 = \sum_{j=1}^m l_j^2, \quad \mathbf{l} * \mathbf{k} = (l_1 k_1, l_2 k_2, \dots, l_m k_m), \quad [\mathbf{l}] = \prod_{j=1}^m l_j,$$

и отношение частичного порядка $\mathbf{l} < \mathbf{k}$, означающее $l_j < k_j$ для всех $j = 1, \dots, m$. Под $\mathbf{n} \rightarrow \infty$ будем понимать, что $\mathbf{n}$ принимает значения некоторой последовательности

$$(\mathbf{n}_j), \quad \mathbf{n}_j \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{n}_j < \mathbf{n}_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Кроме того, будем для краткости писать

$$\begin{aligned} \min(\mathbf{n}) & \quad \text{вместо} \quad \min_{1 \leq j \leq m} \{n_j \mid \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbf{N}\}, \\ \max(\mathbf{n}) & \quad \text{вместо} \quad \max_{1 \leq j \leq m} \{n_j \mid \mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbf{N}\}. \end{aligned}$$

Для фиксированного $s \in \mathbb{R}$ обозначим через H^s m -мерное пространство Соболева, т.е. замыкание множества всех m -мерных гладких 2π -периодических по каждой переменной комплекснозначных функций относительно нормы

$$\|u\|_s = \|u\|_{H^s} = \left(\sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{Z}} (1 + \mathbf{l}^2)^s |\widehat{u}(\mathbf{l})|^2 \right)^{1/2},$$

где

$$\widehat{u}(\mathbf{l}) = (2\pi)^{-m} \int_{\Delta} u(\boldsymbol{\tau}) \bar{e}_{\mathbf{l}}(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{l} \in \mathbf{Z},$$

– комплекснозначные коэффициенты Фурье функции $u \in H^s$ по системе функций

$$e_{\mathbf{l}}(\boldsymbol{\tau}) = \exp(i \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau}), \quad \mathbf{l} \in \mathbf{Z}, \quad \boldsymbol{\tau} \in \Delta, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Известно, что будучи наделено скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_s = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{Z}} (1 + \mathbf{l}^2)^s \widehat{u}(\mathbf{l}) \bar{\widehat{v}}(\mathbf{l}), \quad u, v \in H^s,$$

H^s становится гильбертовым пространством. Всюду в дальнейшем будем предполагать выполненным условие $s > m/2$, при котором (см., например, [2]) пространство H^s вкладывается в пространство непрерывных функций.

Зафиксируем $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_m) \in \mathbf{N}$, обозначим через

$$\mathbf{I}_{\mathbf{n}} = I_{n_1} \times I_{n_2} \times \dots \times I_{n_m}, \quad I_{n_j} = \{k_j \mid k_j \in \mathbf{Z}, |k_j| \leq n_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

индексное множество и введем на Δ сетку узлов

$$\begin{aligned} \Delta_n = \left\{ \mathbf{t}_{\mathbf{k}} = (t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_m}) \mid \right. \\ \left. \mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbf{I}_{\mathbf{n}}, t_{k_j} = k_j h_j, h_j = \frac{2\pi}{2n_j + 1}, j = 1, 2, \dots, m \right\}. \end{aligned}$$

Обозначим через

$$\begin{aligned} (P_{\mathbf{n}} u)(\boldsymbol{\tau}) &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{I}_{\mathbf{n}}} u(\mathbf{t}_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{t}_{\mathbf{k}}), \\ \boldsymbol{\tau} &= (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m) \in \Delta, \quad \mathbf{t}_{\mathbf{k}} = (t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_m}) \in \Delta_{\mathbf{n}}, \end{aligned}$$

интерполяционный полином Лагранжа функции $u \in H^s$ по узлам Δ_n . Здесь

$$\xi_n(\tau, \mathbf{t}_k) = \prod_{j=1}^m \frac{\sin((2n_j + 1)(\tau_j - t_{k_j})/2)}{(2n_j + 1) \sin((\tau_j - t_{k_j})/2)} = [2n + 1]^{-1} \sum_{l \in \mathbf{I}_n} e_l(\tau - \mathbf{t}_k),$$

$$\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbf{N}, \quad \tau \in \Delta, \quad \mathbf{t}_k \in \Delta_n,$$

фундаментальные полиномы, удовлетворяющие условиям

$$\xi_n(\mathbf{t}_l, \mathbf{t}_k) = \begin{cases} 1, & l = k, \\ 0, & l \neq k, \quad l, k \in \mathbf{I}_n. \end{cases}$$

Требуется оценить норму оператора $P_n: H^s \rightarrow H^s$.

2. Вспомогательные результаты. Приведенные в этом пункте результаты носят технический характер. Они сформулированы в виде отдельных лемм, чтобы не перегружать доказательство теоремы мелкими деталями.

ЛЕММА 1. Для любых $m \in \mathbf{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $s > m/2$ и $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ верна оценка

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} ((\mathbf{n} + \mathbf{j} * (2\mathbf{n} + \mathbf{1}))^2)^{-s} \leq 2^m \sum_{l \in \mathbf{N}} ((\mathbf{n} * (2l - \mathbf{1}))^2)^{-s}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для перехода от суммирования по $\mathbb{Z}$ к суммированию по $\mathbf{N}$ представим $\mathbb{Z}$ как объединение двух множеств $\{-l \mid l \in \mathbf{N}\}$ и $\{l - 1 \mid l \in \mathbf{N}\}$. Для k -й, $1 \leq k \leq m$, компоненты вектора $\mathbf{n} + \mathbf{j} * (2\mathbf{n} + \mathbf{1})$ найдем

$$\begin{aligned} (n_k + j_k(2n_k + 1))^2 &= (l_k(2n_k + 1) - n_k)^2 = \left(n_k \left(2l_k + \frac{l_k}{n_k} - 1 \right) \right)^2 \geq (n_k(2l_k - 1))^2, \\ j_k &\in \mathbb{Z}, \quad j_k < 0, \quad l_k = -j_k \in \mathbf{N}; \\ (n_k + j_k(2n_k + 1))^2 &= (n_k + (l_k - 1)(2n_k + 1))^2 = (n_k + 2n_k l_k + l_k - 2n_k - 1)^2 \\ &= \left(n_k \left(2l_k + \frac{l_k}{n_k} - 1 \right) - 1 \right)^2 \geq (n_k(2l_k - 1))^2, \\ j_k &\in \mathbb{Z}, \quad j_k \geq 0, \quad l_k = j_k + 1 \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Так как при суммировании по $\mathbf{N}$ каждому $l \in \mathbf{N}$ соответствует 2^m слагаемым при суммировании по $\mathbf{Z}$, то

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} ((\mathbf{n} + \mathbf{j} * (2\mathbf{n} + \mathbf{1}))^2)^{-s} \leq 2^m \sum_{l \in \mathbf{N}} ((\mathbf{n} * (2l - \mathbf{1}))^2)^{-s}.$$

Лемма 1 доказана.

Обозначим

$$A_p^m = \left\{ \mathbf{k} \mid \mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbf{N}_0, \sum_{j=1}^m k_j = p \right\}$$

множество векторов из $\mathbf{N}_0$, сумма компонент которых равна $p \in \mathbf{N}_0$. Через $R(A_p^m)$ обозначим мощность (количество элементов) множества A_p^m .

ЛЕММА 2. Для любых $p, m \in \mathbb{N}$ верна оценка

$$R(A_p^m) \leq mp^{m-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем в два этапа. Вначале покажем, что

$$R(A_p^m) = C_{m+p-1}^p = \frac{(m+p-1)!}{p!(m-1)!}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

а затем, что

$$C_{m+p-1}^p \leq mp^{m-1}, \quad p, m \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Пусть $m = 1$; тогда для любого $p \in \mathbb{N}_0$ A_p^1 состоит лишь из одного вектора и, следовательно, $R(A_p^1) = C_p^p = p^0 = 1$.

Предположим, что (1) верно для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что тогда оно верно также для $m+1$. Множество A_p^{m+1} построим как объединение множеств A_j^m , $j = 0, 1, \dots, p$, добавляя к каждому элементу множества A_j^m $(m+1)$ -ю компоненту, равную $p-j$, $j = 0, 1, \dots, p$. Тогда

$$R(A_p^{m+1}) = \sum_{j=0}^p R(A_j^m) = \sum_{j=0}^p C_{m+j-1}^j = \frac{(m+p)!}{m!p!} = C_{m+1}^p$$

и, следовательно, равенство (1) верно для любых $p \in \mathbb{N}_0$ и $m \in \mathbb{N}$.

Предположим теперь, что оценка (2) верна для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что тогда она верна и для $m+1$. Имеем

$$C_{m+p}^p = \frac{(m+p)!}{m!p!} = C_{m+p-1}^p \frac{m+p}{m} \leq mp^{m-1} \frac{m+p}{m} = p^m \left(\frac{m}{p} + 1 \right) \leq (m+1)p^m.$$

Лемма 2 доказана полностью.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА. Для любых $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $s > m/2$ и $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ верна оценка

$$\|P_{\mathbf{n}}\|_{H^s \rightarrow H^s} \leq 2^{(m-s)/2} m^{(s+1)/2} M^s(\mathbf{n}) \sqrt{1 + \zeta(2s-m+1)},$$

где

$$M(\mathbf{n}) = \frac{\sqrt{\mathbf{n}^2}}{\min(\mathbf{n})},$$

а $\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-t}$ — дзета-функция Римана, ограниченная и убывающая при $t > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $m \geq 2$, $s > m/2$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, выберем произвольную функцию $u \in H^s$ и запишем для нее интерполяционный полином Лагранжа по узлам $\Delta_{\mathbf{n}}$:

$$(P_{\mathbf{n}}u)(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{I}_{\mathbf{n}}} u(\mathbf{t}_{\mathbf{k}}) \xi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{t}_{\mathbf{k}}).$$

Коэффициенты Фурье этого полинома равны

$$(\widehat{P_{\mathbf{n}}u})(\mathbf{l}) = \begin{cases} [2\mathbf{n} + \mathbf{1}]^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{I}_{\mathbf{n}}} u(\mathbf{t}_{\mathbf{k}}) \bar{e}_{\mathbf{l}}(\mathbf{t}_{\mathbf{k}}), & \mathbf{l} \in \mathbf{I}_{\mathbf{n}}, \\ 0, & \mathbf{l} \notin \mathbf{I}_{\mathbf{n}}. \end{cases}$$

Заменяя значения функции u в узлах Δ_n значениями ее ряда Фурье, получим

$$\begin{aligned} (\widehat{P_n u})(\mathbf{l}) &= [2n + 1]^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{I}_n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \widehat{u}(\mathbf{j}) e_{\mathbf{j}}(\mathbf{t}_{\mathbf{k}}) \right) \bar{e}_{\mathbf{l}}(\mathbf{t}_{\mathbf{k}}) \\ &= [2n + 1]^{-1} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \widehat{u}(\mathbf{j}) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{I}_n} e_{\mathbf{j}}(\mathbf{t}_{\mathbf{k}}) \bar{e}_{\mathbf{l}}(\mathbf{t}_{\mathbf{k}}) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \widehat{u}(\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1)). \end{aligned}$$

Далее, следуя работе [1], найдем

$$\begin{aligned} \|P_n u\|_s^2 &= \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_n} (1 + \mathbf{l}^2)^s |(\widehat{P_n u})(\mathbf{l})|^2 = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_n} (1 + \mathbf{l}^2)^s \left| \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \widehat{u}(\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1)) \right|^2 \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_n} \left| \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} (1 + \mathbf{l}^2)^{s/2} \widehat{u}(\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1)) \right|^2 \\ &= \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_n} \left| \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} (1 + \mathbf{l}^2)^{s/2} (1 + (\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2)^{-s/2} \right. \\ &\quad \left. \times \widehat{u}(\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1)) (1 + (\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2)^{s/2} \right|^2 \\ &\leq \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1 + \mathbf{l}^2}{1 + (\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2} \right)^s \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} |\widehat{u}(\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1))|^2 (1 + (\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2)^s \right) \\ &\leq \max_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1 + \mathbf{l}^2}{1 + (\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2} \right)^s \right) \|u\|_s^2. \end{aligned}$$

Легко проверить, что сумма

$$\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1 + \mathbf{l}^2}{1 + (\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2} \right)^s$$

достигает максимума при $\mathbf{l} = \mathbf{n}$, поэтому, используя лемму 1, получим

$$\begin{aligned} &\max_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1 + \mathbf{l}^2}{1 + (\mathbf{l} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2} \right)^s \right) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} \left(\frac{1 + \mathbf{n}^2}{1 + (\mathbf{n} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2} \right)^s \leq 2^s (\mathbf{n}^2)^s \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} ((\mathbf{n} + \mathbf{j} * (2n + 1))^2)^{-s} \\ &\leq 2^{s+m} (\mathbf{n}^2)^s \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{Z}} ((\mathbf{n} * (2\mathbf{j} - 1))^2)^{-s} \leq 2^{s+m} M^{2s}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{N}} ((2\mathbf{j} - 1)^2)^{-s}. \end{aligned}$$

Оценим выражение под знаком суммы:

$$((2\mathbf{j} - 1)^2)^{-s} = \left(\sum_{k=1}^m (2j_k - 1)^2 \right)^{-s} \leq \left(m / \left(\sum_{k=1}^m (2j_k - 1) \right)^2 \right)^s,$$

и по лемме 2 найдем

$$\begin{aligned}
 & 2^{s+m} M^{2s}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{N}} ((2\mathbf{j} - \mathbf{1})^2)^{-s} \\
 & \leq 2^{s+m} m^s M^{2s}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{N}} \left(\sum_{k=1}^m (2j_k - 1) \right)^{-2s} = 2^{s+m} m^s M^{2s}(\mathbf{n}) \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{N}} \left(2 \sum_{k=1}^m j_k - m \right)^{-2s} \\
 & = 2^{s+m} m^s M^{2s}(\mathbf{n}) \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \frac{R(A_j^m)}{(m+2j)^{2s}} \leq 2^{s+m} m^s M^{2s}(\mathbf{n}) \left(m^{-2s} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{mj^{m-1}}{(m+2j)^{2s}} \right) \\
 & \leq 2^{m-s} m^{s+1} M^{2s}(\mathbf{n}) \left(1 + \sum_{j \in \mathbb{N}} j^{-(2s-m+1)} \right).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана полностью.

Обозначим через $E_{\mathbf{n}}(u)_s$ наилучшее приближение функции $u \in H^s$ тригонометрическими полиномами степени не выше $\mathbf{n} \in \mathbf{N}_0$. Известно, что в гильбертовом пространстве наилучшее приближение функции доставляет отрезок ее ряда Фурье порядка $\mathbf{n}$

$$E_{\mathbf{n}}(u)_s = \|u - S_{\mathbf{n}}u\|_s, \quad (S_{\mathbf{n}}u)(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{I}_{\mathbf{n}}} \hat{u}(\mathbf{l}) e(i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l}).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $s > m/2$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ и любой функции $u \in H^s$ верна оценка

$$\|u - P_{\mathbf{n}}\|_s \leq (1 + 2^{(m-s)/2} m^{(s+1)/2} M^s(\mathbf{n}) \sqrt{1 + \zeta(2s - m + 1)}) E_{\mathbf{n}}(u)_s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любых $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $s > m/2$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, любой функции $u \in H^s$ и последовательности $(\mathbf{n}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ такой, что

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} M(\mathbf{n}) < \infty,$$

последовательность полиномов $(P_{\mathbf{n}}u)$ сходится к функции u с оценкой

$$\|u - P_{\mathbf{n}}u\|_s = O(E_{\mathbf{n}}(u)_s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из следствия 1.

Для более гладких функций $u \in H^p$, $p \geq s > m/2$, интерполяционные полиномы сходятся даже на последовательностях индексов, для которых последовательность $M(\mathbf{n})$ не является ограниченной, но ограничена последовательность $M^s(\mathbf{n})(\mathbf{n}^2)^{(s-p)/2}$. А именно, верно

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любых $p, s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \geq s > m/2$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, любой функции $u \in H^p$ и последовательности $(\mathbf{n}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ такой, что

$$\lim_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} M(\mathbf{n}, s)(\mathbf{n}^2)^{(s-p)/2} < \infty,$$

последовательность полиномов $(P_{\mathbf{n}}u)$ сходится к функции u по норме пространства H^s с оценкой

$$\|u - P_{\mathbf{n}}u\|_s = O(E_{\mathbf{n}}(u)_p).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из следствия 2 и очевидной оценки

$$E_{\mathbf{n}}(u)_s \leq (1 + \mathbf{n}^2)^{(s-p)/2} E_{\mathbf{n}}(u)_p,$$

справедливой для любых $p, s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \geq s > m/2$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ и любой функции $u \in H^p$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Выбор последовательностей $(\mathbf{n}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, на которых $M(\mathbf{n})$ ограничена, не составляет труда. Таковыми являются все последовательности, для которых ограничены последовательности $\max(\mathbf{n}_j) / \min(\mathbf{n}_j)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. I. Fedotov, "On the asymptotic convergence of the polynomial collocation method for singular integral equations and periodic pseudodifferential equations", *Arch. Math. (Brno)*, **38**:1 (2002), 1–13.
- [2] М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1985.

А. И. Федотов

НИИ механики и математики им. Н. Г. Чеботарева

Казанского государственного университета

E-mail: fedotov@mi.ru

Поступило

16.06.2003

Исправленный вариант

29.05.2006