Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Чехлов, О слабо квазисервантно инъективных группах, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 434–447

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:00:38

О слабо квазисервантно инъективных группах

А. Р. Чехлов

Абелева группа называется слабо квазисервантно инъективной, если всякий эндоморфизм любой ее сервантной подгруппы продолжается до эндоморфизма самой группы. Получено описание слабо квазисервантно инъективных групп в ряде классов групп.

Библиография: 11 названий.

Абелева группа A называется *квазисервантно инъективной*, сокращенно *qri-группой* (*слабо квазисервантно инъективной*, сокращенно *wqri-группой*), если всякий гомоморфизм $G \rightarrow A$ (всякий эндоморфизм) любой ее сервантной подгруппы G продолжается до эндоморфизма группы A . Изучению свойств *qri-групп* посвящена проблема 17 а) из [1]. В [2] изучены *qri-группы* без кручения конечного ранга. В [3] получено описание *qri-групп* в классе $\mathcal{L}$ – классе всех редуцированных групп без кручения A , у которых тип любого ненулевого элемента сравним с некоторым максимальным типом в множестве $T(A)$ типов всех ненулевых элементов группы A . Примеры *qri-групп* без кручения, не принадлежащих классу $\mathcal{L}$, построены в [4]. В [5] описаны *qri-группы* без кручения с циклическими p -базисными подгруппами. В [6]–[8] получено структурное описание *qri-групп* без кручения.

Нетрудно показать, что изучение *wqri-групп* сводится к редуцированному случаю.

Терминология и обозначения соответствуют [1]. Так, если A – группа без кручения и $a \in A$, то $h_p^A(a)$ – p -высота, $\chi_A(a)$ – характеристика, $t_A(a)$ – тип элемента a в группе A ; если $G \subseteq A$, то $\langle G \rangle_*^A$ – сервантная подгруппа в A , порожденная G (индекс A иногда опускаем); $\Pi(A)$ – множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$; $\Pi(a) = \Pi(\langle a \rangle_*)$; $A(t) = \{a \in A \mid t(a) \geq t\}$; $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A ; если p – простое число, то $r_p(A)$ – p -ранг группы A , т.е. ранг ее факторгруппы A/pA , $p^\omega A = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n A$; $T(A) = \{t(a) \mid 0 \neq a \in A\}$. Группа без кручения A называется *квазиоднородной*, если $\Pi(G) = \Pi(A)$ для любой ее сервантной подгруппы $G \neq 0$; *вполне транзитивной*, если для любых ненулевых $a, b \in A$ условие $\chi_A(a) \leq \chi_A(b)$ влечет существование $f \in E(A)$ со свойством $fa = b$; *связанной*, если все ее факторгруппы по ненулевым сервантным подгруппам делимы; *квазиразложимой*, если существуют ее ненулевые подгруппы A_i ($i \in I$, $|I| \geq 2$) такие, что $nA \subseteq \bigoplus_{i \in I} A_i$ для некоторого натурального числа n , в противном случае A называется *сильно неразложимой*; если все A_i в квазиразложении $nA \subseteq \bigoplus_{i \in I} A_i$

квазиоднородны, то A называется *квазиоднородно квазиразложимой*. Отметим, что все $wqri$ -группы без кручения вполне транзитивны.

ЛЕММА 1. Пусть A – редуцированная группа без кручения. Тогда

- 1) если все сервантные подгруппы в A сильно неразложимы, то $t_{A/\langle a \rangle_*}(g + \langle a \rangle_*) > t_A(g)$ для любых ее элементов $a, g \neq 0$; в частности, если f – гомоморфизм A в группу без кручения B с ненулевым ядром, то $t_A(x) < t_B(fx)$ для любого ненулевого $x \in A$ (см. [3]);
- 2) если $f \in E(A)$, $0 \neq b \in \ker f$, $0 \neq a \in A$, $h_p(b) \geq h_p(fa)$, то $h_p(a + b) = h_p(a)$; в частности, если $\chi(b) \geq \chi(fa)$, то $\chi(a + b) = \chi(a)$ (см. [3]);
- 3) если A вполне транзитивна, $f \in E(A)$ и $A(t) \subseteq \ker f$ для некоторого $t \in T(A)$, причем $\Pi(A(t)) = \Pi(A)$, то $f = 0$ (см. [8]).

ЛЕММА 2. Пусть $A = B \oplus G$ – редуцированная $wqri$ -группа без кручения. Тогда

- 1) если $\varphi: H \rightarrow G$ – гомоморфизм сервантной подгруппы H в B , то он продолжается до гомоморфизма $f \in \text{Hom}(B, G)$; в частности, если $\chi(b) \leq \chi(g)$, где $b \in B, g \in G$, то $fb = g$ для некоторого $f \in \text{Hom}(B, G)$;
- 2) если $\varphi: B \rightarrow G$ – мономорфизм с сервантным образом, то φB – прямое слагаемое в G ;
- 3) если B имеет квазиразложимую сервантную подгруппу $n\langle b, x \rangle_* \subseteq \langle b \rangle_* \oplus \langle x \rangle_*$ такую, что $\chi(x) \geq \chi(b)$, то для любого ненулевого $g \in G$ с условием $\Pi(g) \cap \Pi(x) \neq \emptyset$ существует $\varphi \in \text{Hom}(G, B)$ со свойством $\varphi g \neq 0$; в частности, если x содержится в однородном квазислагаемом группы B , то $t(x) \geq t(g)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) вытекает из того, что φ продолжается до такого эндоморфизма α сервантной подгруппы $H \oplus G$, что $\alpha|_H = \varphi$ и $\alpha|_G = 0$.

2) Подгруппа $B \oplus \varphi B$ сервантна в A . Ее эндоморфизм $\varphi^{-1}\pi$, где π – проекция A на G , продолжается до $\alpha \in E(A)$, для которого $(1 - \pi)\alpha G = B$. Тогда для $\theta = \varphi(1 - \pi)\alpha$ имеем $\theta|_{\varphi B} = 1_{\varphi B}$ и $\theta G = \varphi B$. Следовательно, φB – прямое слагаемое в G .

3) Пусть $p \in \Pi(g) \cap \Pi(x)$. Поделив элемент g на соответствующую степень p , можно считать, что $h_p(g) = 0$. Подгруппа $U = \langle p^k b + g, x \rangle_*^A$, где $k > h_p(n^2 x)$, квазиразложима, $nU \subseteq \langle p^k b + g \rangle_* \oplus \langle x \rangle_*$. Возьмем такой $f \in E(U)$, что $fx = 0$ и $f(p^k b + g) = n^2 x$. Тогда $\varphi = \pi\alpha$, где $\alpha \in E(A)$ – продолжение f , а π – проекция группы A на B .

ЛЕММА 3. Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$) – редуцированная группа, где $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \emptyset$ для всех $i \neq j$, то A является $wqri$ -группой тогда и только тогда, когда каждая A_i есть $wqri$ -группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, поскольку прямые слагаемые $wqri$ -групп также являются $wqri$ -группами.

Достаточность. Если H – замкнутая сервантная подгруппа, то $H = \bigoplus_{i \in I} (A_i \cap H)$ ($H = \prod_{i \in I} (A_i \cap H)$). Действительно, пусть $x \in H$, $x = x_1 + \dots + x_n \in \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $x_k \in A_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$ ($x = (\dots, x_i, \dots) \in \prod_{i \in I} A_i$, где $x_i \in A_i$). Тогда $-x_k + H = x - x_k + H \in (A/H)^1$ ($-(\dots, 0, x_i, 0, \dots) + H = x - (\dots, 0, x_i, 0, \dots) + H \in (A/H)^1$). Поэтому $x_k \in H$ ($(\dots, 0, x_i, 0, \dots) \in H$). Следовательно, $H \subseteq \bigoplus_{i \in I} (A_i \cap H)$ ($H \subseteq \prod_{i \in I} (A_i \cap H)$). Для прямых сумм обратное включение всегда имеет место. Пусть

теперь $y = (\dots, y_i, \dots) \in \prod_{i \in I} (A_i \cap H)$. Тогда $y + H = y - (\dots, 0, y_i, 0, \dots) + H \in (A/H)^1$. Значит, $y \in H$ и, следовательно, $\prod_{i \in I} (A_i \cap H) \subseteq H$. Из условия $\Pi(A_i) \cap \Pi(A_j) = \emptyset$ при $i \neq j$ следует, что $A_i \cap H$ – замкнутая сервантная подгруппа в A_i для каждого $i \in I$; кроме того, если $f: H \rightarrow A$ – гомоморфизм, то $f(A_i \cap H) \subseteq A_i$. Откуда и вытекает справедливость леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть A – $wqri$ -группа. Тогда

- 1) ее прямые слагаемые – сервантные вполне характеристические подгруппы, в частности, периодическая часть есть $wqri$ -группы;
- 2) если A периодична, то факторгруппа A/A^1 периодически полна, где $A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nA$; в частности, если A сепарабельна, то она периодически полна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) проверяется непосредственно.

2) Согласно лемме 3 можно ограничиться примарным случаем. Если B – p -базисная подгруппа в A , B_0 – ее образ при естественном эпиморфизме $\varphi: A \rightarrow A_0 = A/A^1$, то φ индуцирует изоморфизм $\varphi_0: B \rightarrow B_0$ [1; § 34, Е)]. Поэтому если $\alpha \in E(B_0)$, то $\alpha_0 = \varphi_0^{-1} \alpha \varphi_0$ продолжается до $\beta \in E(A)$. Тогда β индуцирует $\beta_0 \in E(A_0)$, для которого $\beta_0|B_0 = \alpha$. Следовательно, эндоморфизмы группы B_0 продолжаются до эндоморфизмов группы A_0 . Согласно [1; теорема 69.3] A_0 периодически полна.

Группа без кручения называется *слабо транзитивной*, если всякий гомоморфизм между любыми двумя ее изоморфными сервантными подгруппами ранга 1 продолжается до эндоморфизма самой группы. Вполне транзитивные группы без кручения слабо транзитивны. Слабо транзитивные группы изучались в работах [9], [10]. Непосредственно проверяется

ЛЕММА 5. Следующие свойства группы без кручения A эквивалентны:

- 1) все эндоморфизмы любой ее сервантной подгруппы ранга 1 продолжаются до эндоморфизмов группы A ;
- 2) всякий автоморфизм любой ее сервантной подгруппы ранга 1 продолжается до эндоморфизма группы A ;
- 3) для любой ее сервантной подгруппы G ранга 1 и любых ненулевых $a, b \in G$ таких, что $\chi(a) \leq \chi(b)$ (равносильно $\chi(a) = \chi(b)$) существует $f \in E(A)$ со свойством $fa = b$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть A – группа без кручения. Тогда

- 1) все эндоморфизмы любой ее сервантной подгруппы ранга 1 продолжаются до эндоморфизмов группы $A \iff$ для каждого простого p и любого ненулевого $a \in p^{\omega} A$ деление подгруппы $\langle a \rangle_*$ на p продолжается до эндоморфизма группы A ;
- 2) если все эндоморфизмы любой сервантной подгруппы ранга 1 в A продолжаются до эндоморфизмов группы A , то A будет квазиоднородной группой при выполнении хотя бы одного из условий:
 - а) все ненулевые эндоморфизмы группы A являются мономорфизмами;
 - б) все сервантные подгруппы в A сильно неразложимы и в $T(A)$ выполнено условие максимальности;

- 3) если $nA \subseteq X \subseteq A$, где $X = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($X = \prod_{i \in I} A_i$), а A_i – квазиоднородные группы, то все эндоморфизмы любой сервантной подгруппы ранга 1 в A продолжаются до эндоморфизмов группы A ;
- 4) если A – группа конечного ранга, то все эндоморфизмы любой ее сервантной подгруппы ранга 1 продолжаются до эндоморфизмов группы $A \iff A$ – квазиоднородно квазиразложима группа $\iff$ для каждого простого p деление $p^\omega A$ на p продолжается до эндоморфизма группы A ;
- 5) если A – группа ранга 2, то A – ωp -группа $\iff$ все эндоморфизмы любой ее сервантной подгруппы ранга 1 продолжаются до эндоморфизмов группы $A \iff A$ квазиоднородна или квазиразложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Необходимость вытекает из того, что если $a \in p^\omega A$, то $\langle a \rangle_*$ является p -делимой.

Достаточность. Пусть G – сервантная подгруппа ранга 1 и $f \in E(G)$. Тогда f совпадает с умножением группы G на некоторое рациональное число $r = m/n$, где $nG = G$. Если p – простой делитель n , то $G \subseteq p^\omega A$. Поэтому f продолжается до эндоморфизма группы A .

2) Если $0 \neq a \in p^\omega A$, то $pfa = a$ для некоторого $f \in E(A)$. Утверждение вытекает из того, что $\varphi a = 0$ для $\varphi = 1_A - pf$, и из леммы 1, поскольку в случае сильной неразложимости сервантных подгрупп $t(\varphi^n b) < t(\varphi^{n+1} b)$ для каждого $b \in A \setminus pA$.

3) Пусть $B = \langle A_j \mid j \in I, pA_j = A_j \rangle_*$, $G = \langle A_s \mid s \in I, pA_s \neq A_s \rangle_*$. Тогда $p^\omega A = B$. Согласно 1) достаточно показать, что деление $p^\omega A$ на p продолжается до некоторого $\varphi \in E(A)$. Факторгруппа $A/(B \oplus G)$ есть прямая сумма циклических групп $\bigoplus_{k \in K} \langle \bar{x}_k \rangle$, где $\bar{x}_k = x_k + B \oplus G$, $nx_k = b_k + g_k$, $b_k \in B$, $g_k \in G$. Будем считать, что n – наименьшее натуральное со свойством $nA \subseteq B \oplus G$. Тогда p и n взаимно просты. Поэтому $pt + nr = 1$ для некоторых целых чисел t, r . Откуда $x_k - rg_k = pu_k$, где $u_k \in A$. Пусть теперь $f|G = t \cdot 1_G$, $pf|B = 1_B$ и $fx_k = u_k$. Тогда f индуцирует искомый φ .

4) Покажем, что если все эндоморфизмы любой сервантной подгруппы ранга 1 группы без кручения конечного ранга A продолжаются до эндоморфизмов самой группы, то группа A квазиоднородно квазиразложима. Допустим, что $a \in p^\omega A$, $a \neq 0$. Если $p\varphi a = a$, то

$$\langle a \rangle_* \subseteq \ker(1 - p\varphi) \subseteq p^\omega A.$$

Если $g = (1 - p\varphi)b \neq 0$ для некоторого $b \in p^\omega A$ и $p\psi g = g$, то

$$\langle a, g \rangle_* \subseteq \ker((1 - p\psi)(1 - p\varphi)) \subseteq p^\omega A.$$

В силу конечности ранга можно утверждать, что найдется $f \in E(A)$ со свойством $\ker f = p^\omega A$. Далее, всякая группа без кручения конечного ранга квазиразложима, $nA \subseteq A_1 \oplus \dots \oplus A_m \subseteq A$, где A_j – сильно неразложимые сервантные подгруппы в A . Существуют такие $\varphi_j \in E(A_j)$, что $(nf)|A_j = \varphi_j$. Поэтому если $0 \neq p^\omega A_j \neq A_j$, то

$$A_j/p^\omega A_j \cong (H_j \oplus p^\omega A_j)/p^\omega A_j,$$

где $H_j = \varphi_j A_j$. Если подгруппа группы конечного ранга изоморфна самой группе, то она квазиравна ей. Следовательно, $kA_j \subseteq H_j \oplus p^\omega A_j$ для некоторого натурального k , что противоречит сильной неразложимости A_j .

5) следует из 4).

Для удобства ссылок приведем следующий результат из [11; теорема 4].

ТЕОРЕМА 7. Пусть $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, где A_i – группы без кручения ранга 1 типов t_i . В группе A каждая сервантная подгруппа вполне разложима (почти вполне разложима) тогда и только тогда, когда среди типов $t_1 \cap t_2$, $t_1 \cap t_3$, $t_2 \cap t_3$ имеются хотя бы два равных (хотя бы два сравнимых).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. I) Редуцированная группа $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$, где $r(A_i) = 1$, $t(A_i) = t_i$, является *wqpi*-группой тогда и только тогда, когда она однородна или для нее с точностью до перестановки прямых слагаемых A_i выполняется одно из утверждений:

- 1) $\Pi(A_1) \cap \Pi(A_2 \oplus A_3) = \emptyset$;
- 2) $t_1 \cap t_2$, $t_1 \cap t_3$, $t_2 \cap t_3$ – попарно несравнимые типы;
- 3) $t_1 < t_2$, причем справедливо одно из условий:
 - а) $t_2 = t_3$;
 - б) $t_3 > t_1$ и $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) = \emptyset$;
 - в) t_1 не сравним с t_3 и $t_3 < t_2$, или $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) = \emptyset$.

II) Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – такая вполне разложимая группа, что $r(A_i) = 1$, $t(A_i) = t_i$ и тип $t_{i_1} \cap \dots \cap t_{i_n}$ не сравним с $t_{j_1} \cap \dots \cap t_{j_m}$ для любых конечных подмножеств $I_n = \{i_1, \dots, i_n\}$, $J_m = \{j_1, \dots, j_m\} \subseteq I$ с условием $I_n \setminus J_m$, $J_m \setminus I_n \neq \emptyset$, то A является *wqpi*-группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) *Необходимость.* Пусть A неоднородна и 1) не выполняется при любых перестановках A_i . Предположим сначала, что типы t_1, t_2, t_3 попарно несравнимы. Если, например, $t_1 \cap t_2 \leq t_2 \cap t_3$, то $t_1 \cap t_2 \leq t_3$. Тогда согласно утверждению 1) леммы 2 существует ненулевой $f \in \text{Hom}(A_1 \oplus A_2, A_3)$, что противоречит несравнимости t_1, t_2, t_3 . Это доказывает 2).

Предположим теперь, что, например, $t_2 = t_3$. Поскольку $\Pi(A_1) \cap \Pi(A_2) \neq \emptyset$, то согласно утверждению 3) леммы 2 $t_2 > t_1$ (так как $t_1 \neq t_2$). Пусть, наконец, типы t_1, t_2, t_3 попарно различны и $t_1 < t_2$. Если $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) \neq \emptyset$, то согласно утверждению 3) леммы 2 $t_2 > t_3$ и тип t_1 не сравним с t_3 . Если же $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) = \emptyset$, то $t_3 > t_1$ или t_1 не сравним с t_3 .

Достаточность. Если A однородна, то любая ее сервантная подгруппа служит для A прямым слагаемым [1; лемма 86.8]. Ясно, что A является *wqpi*-группой. Если же выполнено условие 1), то A является *wqpi*-группой в силу леммы 3.

Пусть G – сервантная подгруппа в A ранга 2, $\varphi \in E(G)$. Можно ограничиться случаем, когда $G = \langle a + b, b + c \rangle_*$, где $0 \neq a \in A_1$, $0 \neq b \in A_2$, $0 \neq c \in A_3$.

2) Нетрудно проверить, что типы t_1, t_2, t_3 попарно несравнимы. Согласно теореме 7 G сильно неразложима; далее, $\varphi(a + b) = r(a + b)$ и $\varphi(b + c) = s(b + c)$ для некоторых рациональных чисел r и s . Покажем, что $r = s$. Имеем

$$\varphi(a - c) = \varphi(a + b - b - c) = r(a + b) - s(b + c) = ra + (r - s)b - sc,$$

откуда

$$t(a - c) \leq t(a) \cap t((r - s)b) \cap t(c).$$

Следовательно, если $r \neq s$, то $t_1 \cap t_3 \leq t_1 \cap t_2 \cap t_3$. Это возможно, только если $t_2 \geq t_1 \cap t_3$, но тогда

$$t_1 \cap t_2 \geq t_1 \cap (t_1 \cap t_3) = t_1 \cap t_3.$$

Противоречие. Умножение на r является эндоморфизмом группы A , продолжающим φ .

3) Если $t_2 = t_3$, то сервантная подгруппа $H = \langle b + c \rangle_*$ служит для однородной группы $A_2 \oplus A_3$ прямым слагаемым $A_2 \oplus A_3 = H \oplus K$ [1; лемма 86.8]. Отсюда $G = H \oplus B$, где $B = G \cap (A_1 \oplus K)$ – группа ранга 1. Имеем $t(H) = t_2$, $t(B) = t_1 < t_2$, $\varphi H \subseteq H$. Если π, θ – проекции группы A на $A_1 \oplus K$ и H соответственно, то $\varphi = (\pi + \theta)\varphi = \pi\varphi + \theta\varphi$, где $\theta\varphi B \subseteq H \subseteq G$. Отсюда следует, что $\pi\varphi B \subseteq B$. Согласно утверждению 5) предложения 6 $A_1 \oplus K$ является *wqpi*-группой, поэтому $\pi\varphi|B$ продолжается до некоторого эндоморфизма $\varphi_1 \in E(A_1 \oplus K)$. Доопределив $\varphi_1 H = 0$, считаем, что $\varphi_1 \in E(A)$. Подгруппу B можно представить в виде $B = \langle a + y \rangle_*$, где $y \in K$, $y \neq 0$. Тогда $\theta\varphi(a + y) = rz$, где $z \in H$, $H = \langle z \rangle_*$, r – некоторое рациональное число такое, что $\chi(a + y) \leq \chi(rz)$. Если $\chi(a) \leq \chi(rz)$ (соответственно $\chi(y) \leq \chi(rz)$), то определим $\varphi_{13}a = rz$ (соответственно $\varphi_{23}y = rz$). Поскольку φ_{13} (соответственно φ_{23}) продолжается до гомоморфизма $\varphi_{13}: A_1 \rightarrow H$ (соответственно $\varphi_{23}: K \rightarrow H$), то для проекций $\pi_1: A \rightarrow A_1$, $\pi_2: A \rightarrow K$, $\pi_3: A \rightarrow H$ группы A на соответствующие прямые слагаемые получаем, что $\alpha = \varphi_1 + \varphi_{13}\pi_1 + \varphi\pi_3$ (соответственно $\alpha = \varphi_1 + \varphi_{23}\pi_2 + \varphi\pi_3$) можно рассматривать как эндоморфизм группы A . Так как $\alpha(a + y) = \varphi(a + y)$, $\alpha z = \varphi z$, то $\alpha|G = \varphi$.

Допустим, что $\chi(a) \not\leq \chi(rz)$ и $\chi(y) \not\leq \chi(rz)$. Тогда $\chi(a) \leq \chi(mrz)$ и $\chi(y) \leq \chi(krz)$ для некоторых наименьших натуральных m и k . Ясно, что числа m и k взаимно простые. Поэтому $ms + kt = 1$ для некоторых целых чисел s и t . Отсюда $rz = msrz + ktrz$. Пусть $\varphi_{13}a = msrz$, $\varphi_{23}y = ktrz$. Тогда $\alpha = \varphi_1 + \varphi_{13}\pi_1 + \varphi_{23}\pi_2 + \varphi\pi_3 \in E(A)$ и $\alpha|G = \varphi$.

б) Так как $t_1 = t_1 \cap t_2 = t_1 \cap t_3$, то G вполне разложима, $G = X \oplus Y$. Поскольку $t(b + c) = t_2 \cap t_3$ максимален в $T(G)$, то, например, $\langle b + c \rangle_* = Y$. Имеем $\varphi(b + c) = r(b + c)$ и $X = \langle x \rangle_*$, где $x = a + sb + tc$, а r, s и t – некоторые рациональные числа. Заметим, что $\chi(a) \leq \chi(sb + tc)$ (значит, $\chi(a) = \chi(x)$). Действительно, если $h_p(a) > h_p(sb)$, то $h_p(c) = \infty$, и если n – знаменатель s , то $nx - ns(b + c) = na + n(t - s)c \in G$. Отсюда $na + n(t - s)c = p^m g$, где $g \in G$, $m = h_p(na)$. Если $g = k(a + sb + tc) + l(b + c)$ для некоторых рациональных k и l , то $na = p^m ka$. Это противоречит определению m . Пусть

$$\varphi_{11}a = \pi_1\varphi x, \quad \varphi_{12}a = \pi_2\varphi x - rsb, \quad \varphi_{13}a = \pi_3\varphi x - trc, \quad \varphi_{22}b = rb, \quad \varphi_{33}c = rc,$$

где $\pi_i: A \rightarrow A_i$ – проекции. Тогда $\alpha = (\varphi_{11} + \varphi_{12} + \varphi_{13})\pi_1 + \varphi_{22}\pi_2 + \varphi_{33}\pi_3 \in E(A)$ и $\alpha x = \varphi x$, $\alpha(b + c) = \varphi(b + c)$, т.е. $\alpha|G = \varphi$.

в) Поскольку $t_1 \cap t_2 = t_1 > t_1 \cap t_3$, то G почти вполне разложима, $nG \subseteq X \oplus Y$, где X, Y – сервантные подгруппы в G ранга 1, и n – наименьшее натуральное с таким свойством. Так как типы $t(a + b) = t_1$ и $t(b + c) = t_2 \cap t_3$ максимальны в $T(G)$, то $X = \langle a + b \rangle_*$, $Y = \langle b + c \rangle_*$ и $\varphi X \subseteq X$, $\varphi Y \subseteq Y$. Поэтому $\varphi(a + b) = r(a + b)$ и $\varphi(b + c) = s(b + c)$ для некоторых рациональных r и s . Пусть

$$\varphi_{11}a = ra, \quad \varphi_{33}c = sc, \quad \psi = k\varphi - ks \cdot 1_G,$$

где k – наименьшее общее кратное знаменателей чисел r и s . Тогда $\psi \in \text{Hom}(G, A)$ и $Y \subseteq \ker \psi$.

Если $t_2 > t_3$, то найдутся наименьшие натуральные m и t со свойствами $\chi(mb) \geq \chi(a)$ и $\chi(tb) \geq \chi(c)$. Если $\psi G = 0$, то $(s \cdot 1_A)|G = \varphi$. Если же $\psi G \neq 0$, то наибольший общий делитель d чисел m и t делит $k(r-s)$. Это вытекает из того, что d делит $a-c \in G$, $a-c = dg$, $g \in G$, и из того, что $d\psi g = \psi(a-c) = \psi(a+b-b-c) = k(r-s)(a+b)$. Следовательно, система двух сравнений $x \equiv kr \pmod{m}$, $x \equiv ks \pmod{t}$ имеет решение $x = l$. Знаменатели чисел r и s делят соответственно A_1 и A_2 . А так как $t_2 > t_1, t_3$, то A_2 делится на k , поэтому можно определить

$$\varphi_{12}a = k^{-1}(kr-l)b, \quad \varphi_{22}b = k^{-1}lb, \quad \varphi_{32}c = k^{-1}(ks-l)b.$$

Тогда $\alpha = (\varphi_{11} + \varphi_{12})\pi_1 + \varphi_{22}\pi_2 + (\varphi_{32} + \varphi_{33})\pi_3 \in E(A)$ и $\alpha(a+b) = r(a+b)$, $\alpha(b+c) = s(b+c)$, т.е. $\alpha|G = \varphi$.

Пусть теперь $\Pi(A_2) \cap \Pi(A_3) = \emptyset$. Предположим, что $m = h_p(a) > h_p(b)$. Поделив $a+b$ на соответствующую степень числа p , можно считать, что $h_p(b) = 0$. Покажем тогда, что p^m делит $r-s$. Так как $h_p(c) = \infty$, то $a-c = p^m g$, где $g \in G$. Если k – знаменатель числа s , то k и p взаимно просты. Это вытекает из k -делимости Y . Пусть $\psi = k\varphi - ks \cdot 1_G$. Тогда

$$p^m \psi g = \psi(a+b-b-c) = \psi(a+b) - \psi(b+c) = (kr-ks)a + (kr-ks)b.$$

Следовательно, p^m делит $k(r-s)$ и, значит, $r-s$. Поэтому $\chi((r-s)b) \geq \chi(a)$. Пусть

$$\varphi_{11}a = ra, \quad \varphi_{12}a = (r-s)b, \quad \varphi_{22}b = sb, \quad \varphi_{33}c = sc.$$

Тогда $\alpha = (\varphi_{11} + \varphi_{12})\pi_1 + \varphi_{22}\pi_2 + \varphi_{33}\pi_3 \in E(A)$ и $\alpha|G = \varphi$.

II) Пусть $g = a_1 + \dots + a_n \in G$, где G – сервантная подгруппа в A , $f \in E(G)$, $a_j \in A_{i_j}$, $a_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$. Если $fg = b_1 + \dots + b_m \neq 0$, где $b_k \in A_{j_k}$, $b_k \neq 0$, то носитель $I_g = \{i_1, \dots, i_n\}$ элемента g содержит носитель $I_{fg} = \{j_1, \dots, j_m\}$ элемента fg . В самом деле, если, например, $j_m \in I_{fg} \setminus I_g$, то, поскольку $\chi(fg) \geq \chi(g)$, имеем $I_g \subseteq I_{fg}$ (так как в противном случае условие $I_g \setminus I_{fg} \neq \emptyset$ влечет несравнимость типов $t(g)$ и $t(fg)$). Отсюда

$$t_{i_1} \cap \dots \cap t_{i_n} = t(g) = t_{j_1} \cap \dots \cap t_{j_m} \leq t_{i_1} \cap \dots \cap t_{i_n} \cap t_{j_m}.$$

Это влечет $t_{j_m} \geq t_{i_1} \cap \dots \cap t_{i_n}$, что противоречит условию на типы элементов с носителями $\{j_m\}$ и $\{i_1, \dots, i_n\}$. Допустим теперь, что g выбран так, чтобы его носитель I_g был наименьшим среди носителей элементов в G , содержащих i_1 . Тогда $I_g = I_{fg}$. Поэтому $fg = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$ для некоторых рациональных r_j . Заметим, что $r = r_1 = \dots = r_n$. Действительно, если u – числитель, а v – знаменатель числа r_n и, например, $r_1 \neq r_n$, то

$$0 \neq ug - vfg = (u - vr_1)a_1 + \dots + (u - vr_{n-1})a_{n-1} \in G,$$

что противоречит выбору g . Предположим, что $x = g_1 + \dots + g_m \in G$, $g_k \in A_{i_k}$, $fx = s_1 g_1 + \dots + s_m g_m$ и, например, $i_n = j_m$, причем $r \neq s_m$. Для целых чисел t, l

со свойством $ta_n = lg_m$ имеем

$$\begin{aligned} f(tg - lx) &= f(ta_1 + \dots + ta_{n-1} - lg_1 - \dots - lg_{m-1}) = tfg - lfx \\ &= tra_1 + \dots + tra_{n-1} + l(r - s_m)g_m - ls_1g_1 - \dots - ls_{m-1}g_{m-1} = z \in G. \end{aligned}$$

Здесь $i_n \in I_z \setminus I_{tg-lx}$, что противоречит доказанному выше.

Поскольку $\chi(a_j) \leq \chi(ra_j)$, то f продолжается до эндоморфизма группы A .

Легко строится квазиоднородная группа бесконечного ранга, удовлетворяющая условиям II) предложения 8. Например, пусть $\Pi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Pi_i$ – разбиение множества Π всех простых чисел на бесконечные непересекающиеся подмножества Π_i . Пусть группа A_i имеет тип t_i , у которого на местах, соответствующих простым числам из Π_i , стоит 0, а на других – 1. Тогда у типа $t_{i_1} \cap \dots \cap t_{i_n}$ на местах, соответствующих простым числам из $\Pi_{i_1} \cup \dots \cup \Pi_{i_n}$, стоит 0, а на других – 1. Поэтому если $t_{j_1} \cap \dots \cap t_{j_m}$ – тип такой, что, как и в условиях II) предложения 8, $I_n \setminus J_m, J_m \setminus I_n \neq \emptyset$, то эти два типа не сравнимы, поскольку отличаются друг от друга бесконечным количеством 1 и 0.

Следующая лемма уточняет лемму 2 из [5], доказанную для qpi -групп.

ЛЕММА 9. Пусть A – редуцированная $wqpi$ -группа без кручения, H – такая ее сервантная подгруппа, что $\Pi(H) \cap \Pi(A/H) = \emptyset$. Тогда $A = H_1 \oplus A_1$, где H_1 – замыкание подгруппы H в Z -адической топологии группы A и $\Pi(H_1) \cap \Pi(A_1) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{A}$ – Z -адическое пополнение группы A , то $\bar{A} = \bar{H} \oplus V$, где группа V изоморфна пополнению редуцированной части A/H . Поэтому $\Pi(\bar{H}) = \Pi(H)$, $\Pi(V) = \Pi(A/H)$ и, значит, $\Pi(\bar{H}) \cap \Pi(V) = \emptyset$; в частности, подгруппы $\bar{H}$ и V вполне характеристичны в $\bar{A}$. Поскольку $\bar{A}$ сервантно инъективна, все эндоморфизмы группы A продолжаются до эндоморфизмов группы $\bar{A}$. Обозначим $B = A \cap V$. Так как $\Pi(H) \cap \Pi(B) = \emptyset$, то подгруппа $H \oplus B$ сервантна в A .

Делимость факторгруппы A/H эквивалентна равенству $\Pi(A/H) = \emptyset$. Если $p \in \Pi(A/H)$, то по условию $pH = H$. Пусть $\psi_p = 1_A - p\varphi_p \in E(A)$, где φ_p – продолжение деления подгруппы H на p . Считаем, что $\psi_p \in E(\bar{A})$. Поскольку H плотна в $\bar{H}$, то $\psi_p \bar{H} = 0$. Отсюда $0 \neq \psi_p A \subseteq \psi_p \bar{A} = \psi_p V \subseteq V$ и, значит, $0 \neq \psi_p A \subseteq A \cap V = B$.

Пусть $\alpha \in E(A)$ и $\alpha(H \oplus B) = 0$. Тогда $\alpha(\bar{H} \oplus \bar{B}) = 0$. Имеем $V = \bar{B} \oplus V_1$, где V_1 – некоторая подгруппа в V . Если $a \in A$, $a = x + y + z$, где $x \in \bar{H}$, $y \in \bar{B}$, $z \in V_1$, то $\alpha a = \alpha z = b \in B$. Пусть $\pi \in E(A)$ – продолжение проекции $H \oplus B$ на H . Тогда $\pi \alpha \pi = 0$. Имеем $\pi(\pi - \pi^4)\pi = 0$, откуда $\pi^3 = \pi^6$. Следовательно, $A = H_1 \oplus A_1$, где $H \subseteq H_1 = \text{im } \pi^3$, $B \subseteq A_1 = \text{ker } \pi^3$. Если H не плотна в H_1 , то по доказанному $H_1 = H_2 \oplus H_3$, где $H \subseteq H_2$ и $H_3 \neq 0$. Тогда $\bar{A} = \bar{H} \oplus W$, где $W = \bar{H}'_2 \oplus \bar{H}_3 \oplus \bar{A}_1$, $\bar{H}_2 = \bar{H} \oplus \bar{H}'_2$. Поскольку V вполне характеристична в $\bar{A}$, то V определяется однозначно. Следовательно, $V = W$ и $H_3 \oplus B \subseteq A \cap V = B$, что противоречит условию $H_3 \neq 0$.

ТЕОРЕМА 10. Редуцированная группа без кручения A с циклическими p -базисными подгруппами является $wqpi$ -группой тогда и только тогда, когда

$$\bigoplus_{p \in \Pi} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p \in \Pi} A_p = S,$$

где A – сервантная вполне характеристическая подгруппа в S , Π – некоторое множество простых чисел, $\Pi(A_p) \cap \Pi(A_q) = \emptyset$ при $p \neq q$, $p, q \in \Pi$, а A_p – связанные $wqri$ -группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть $q^\omega A \neq 0$ для некоторого $q \in \Pi(A)$. Поскольку $r_p(A) = 1$ для каждого $p \in \Pi(A)$, то

$$\Pi(A/q^\omega A) \cap \Pi(q^\omega A) = \emptyset.$$

Поэтому по лемме 9 $A = q^\omega A \oplus A_q$ для некоторой подгруппы A_q . Так как $r_p(A_q) = 1$ для всех $p \in \Pi(A)$, то A_q – неразложимая группа. Из $\Pi(q^\omega A) \cap \Pi(A_q) = \emptyset$ следует, что A_q – вполне характеристична в A . Следовательно, если $A_p \neq 0$, то

$$A_p = (q^\omega A \cap A_p) \oplus (A_q \cap A_p).$$

В силу неразложимости подгрупп A_p либо $A_p \subseteq q^\omega A$, либо $A_p = A_q$. Поэтому найдется такое множество Π простых чисел, что сумма $\sum_{p \in \Pi} A_p$ является прямой $U = \bigoplus_{p \in \Pi} A_p \subseteq A$, причем факторгруппа A/U делима. Имеем

$$A_q = (A_p \cap A_q) \oplus (p^\omega A \cap A_q), \quad q^\omega A = (A_p \cap q^\omega A) \oplus (p^\omega A \cap q^\omega A).$$

Если $q^\omega A \cap A_p = q^\omega(A_p) \neq 0$, то условие $A_p \cap A_q \neq 0$ влечет $p \in \Pi(A_q) \cap \Pi(q^\omega A)$, так как $p \in \Pi(A_p \cap A_q) \subseteq \Pi(A_q)$ и $p \in \Pi(A_p \cap q^\omega A) \subseteq \Pi(q^\omega A)$. Это противоречие показывает, что $A_p \cap A_q = 0$, откуда

$$A = ((p^\omega A \cap A_q) \oplus (p^\omega A \cap q^\omega A)) \oplus (A_p \cap q^\omega A),$$

где $(p^\omega A \cap A_q) \oplus (p^\omega A \cap q^\omega A) = p^\omega A$, а $A_p \cap q^\omega A = A_p$. Значит, $A_p \subseteq q^\omega A$. В частности, $qA_p = A_p$. Это доказывает квазиоднородность A_p . Поэтому условие $r_p(A_q) = 1$ для всех $p \in \Pi(A_q)$ влечет связанность A_q [1; 88, упр. 17]. Проекции $\pi_p: A \rightarrow A_p$ индуцируют гомоморфизм

$$f: A \rightarrow \prod_{p \in \Pi} A_p = S.$$

Так как

$$\ker f = \bigcap_{p \in \Pi} p^\omega A = 0,$$

то f – мономорфизм, действующий тождественно на U . отождествим A с ее образом fA . Пусть $a = pg$, где $g = (\dots, g_p, \dots) \in S$. Имеем $pg_p = \pi_p(pg) = \pi_p(a)$. Поэтому $a = pg_p + y$, где $pg_p \in A_p$, $y \in p^\omega A$. Откуда $y = pz$ для некоторого $z \in p^\omega A$ и, значит, $a = p(g_p + z)$, где $g_p + z \in A$. Поскольку

$$\Pi(A_p) \cap \Pi\left(\bigoplus_{q \neq p} A_q\right) = \emptyset,$$

это доказывает сервантность A в S . Пусть $\varphi \in E(S)$. Тогда $\varphi U \subseteq U$. Поэтому $\varphi|U$ продолжается до некоторого $\psi \in E(A)$. Имеем $\varphi|U = \psi|U$, а так как U плотна в A , то $\varphi|A = \psi$, т.е. $\varphi A = \psi A \subseteq A$; значит, A вполне характеристична в S .

Достаточность. Из леммы 3 следует, что S является $wqri$ -группой. Поэтому A , как сервантная вполне характеристическая подгруппа группы S , также является $wqri$ -группой.

Следующая лемма использует идею доказательства теоремы 2.2 из [3] и обобщает эту теорему на $wqri$ -группы.

ЛЕММА 11. Пусть A – $wqri$ -группа без кручения, $0 \neq a \in A$. Тогда если A – однородная или квазиоднородная вполне транзитивная группа, а тип $t(a)$ максимален в $T(A)$, то a содержится в прямом слагаемом в A с сильно неразложимыми сервантными подгруппами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество M всех пар (G, η) , где G – сервантная подгруппа в A , $a \in G$, $\eta \in \text{Hom}(G, A)$, $\eta a = a$, $\eta G \subseteq G$, и каждый ненулевой гомоморфизм $\langle \eta G \rangle_* \rightarrow A$ есть мономорфизм. Множество M частично упорядочено: $(G_1, \eta_1) \leq (G_2, \eta_2)$, если $G_1 \subseteq G_2$ и $\eta_2|_{G_1} = \eta_1$. Так как M индуктивно и $M \neq \emptyset$, поскольку $(\langle a \rangle_*, 1) \in M$, то M обладает максимальным элементом (H, φ) . Пусть $\psi \in E(A)$, $\psi|_H = \varphi$.

Покажем, что все ненулевые гомоморфизмы $D = \langle \psi A \rangle_* \rightarrow A$ есть мономорфизмы. Отсюда, так как A – $wqri$ -группа, будет следовать, что все сервантные подгруппы группы D сильно неразложимы.

Если $H = A$, то $\psi|_D = 1_D$, поскольку $a \in D$, $\psi a = a$. Поэтому D – прямое слагаемое в A ; в этом случае лемма доказана.

Допустим, что $H \neq A$. Тогда существует $b \in A \setminus H$ со свойством $c = \psi b \notin \langle \varphi H \rangle_*$. Так как в противном случае $(H, \varphi) < (\langle b, H \rangle_*, \psi)$. Докажем, что группа $B = \langle a, c \rangle_*$ сильно неразложима. Допустим, что нашлось натуральное число n со свойством $nB \subseteq X \oplus Y$, где X, Y – сервантные подгруппы в B ранга 1. Тогда однородность группы A влечет разложимость B и, значит, $B = \langle a \rangle_* \oplus W$ для некоторой подгруппы W в B . Если A неоднородна, то в силу максимальной типа $t(a)$, например, $t(a) = t(X)$. Допустим, что тип $t(Y)$ не сравним с $t(a)$. Тогда по условию A вполне транзитивна. Предположим, что $x \in X$, $y \in Y$ и $h_p(x) = h_p(y) = 0$ для некоторого простого числа p . Имеем

$$\chi(x + p^k y) \leq \chi(ny),$$

где k – такое натуральное, что $ny \notin p^k A$. Следовательно, $f(x + p^k y) = ny$ для некоторого $f \in E(A)$. Отсюда $fx \neq 0$ и в силу максимальной $t(x) = t(fx) = t(ny - p^k fy) \geq t(y)$. Противоречие. Поэтому $\Pi(X) \cap \Pi(Y) = \emptyset$. Это противоречит квазиоднородности группы A . Итак, $t(a) \geq t(Y)$. Тогда $B/\langle a \rangle_*$ – группа ранга 1 типа $t(Y)$ и все элементы из $B \setminus \langle a \rangle_*$ имеют тип $t(Y)$. Поэтому $\langle a \rangle_*$ – прямое слагаемое в B : $B = \langle a \rangle_* \oplus W$ [1; предложение 86.5]. Существует $\alpha \in E(A)$, $\alpha a = a$, $\alpha W = 0$. Откуда $\alpha \psi(\langle b, H \rangle_*) = \varphi H$ и, значит, $(\langle b, H \rangle_*, \alpha \psi) \in M$, что противоречит максимальной (H, φ) . Итак, B сильно неразложима. Поскольку все ненулевые элементы из $\text{Hom}(\langle \varphi H \rangle_*, A)$ – мономорфизмы, то в $\langle \varphi H \rangle_*$ каждая сервантная подгруппа сильно неразложима. С учетом доказанного выше получаем, что $\langle a, c \rangle_*$ сильно неразложима для любого $c \in D$. Поэтому по лемме 1 каждый гомоморфизм из $\text{Hom}(\langle a, c \rangle_*, A)$ однозначно определяется своим действием на c . Допустим, что U – сервантная подгруппа в D и $mU \subseteq U_1 \oplus U_2 \subseteq U$ для некоторого натурального m . Поскольку A – $wqri$ -группа, существует ее эндоморфизм β , действующий на U_1 как умножение на m и $\beta U_2 = 0$. Пусть теперь $g_1 \in U_1$, $g_2 \in U_2$ ($g_1, g_2 \neq 0$). Так как $\beta g_1 = m g_1$, то $\beta a = m a \neq 0$. С другой стороны, $\beta g_2 = 0$ влечет $\beta a = 0$. Противоречие. Следовательно, любая сервантная подгруппа группы D сильно неразложима.

Предположим, что $\alpha \in \text{Hom}(D, A)$, $\alpha \neq 0$ и $c \in \ker \alpha$, $c \neq 0$. Элемент $g \in D$ имеет тип $t(g) = t(a)$. Поскольку $\langle g, c \rangle_*$ сильно неразложима, то $t(\alpha g) > t(g)$ и, следовательно, в силу максимальности типа $\alpha g = 0$. Гомоморфизм α индуцирует эндоморфизм $\alpha\psi \in E(A)$, который по лемме 5 равен нулю. Следовательно, $\alpha = 0$.

Так как $\psi a = a$, то ψ действует на D как тождественный гомоморфизм. Поэтому $A = D \oplus \ker \psi$.

Из доказанной леммы следует, что всякая однородная $wqri$ -группа без кручения, имеющая квазиразложимые сервантные подгруппы, разложима. Рассмотрим подробнее такие группы. Справедлива

ТЕОРЕМА 12. *Однородная разложимая $wqri$ -группа является qri -группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 11 $A = A_1 \oplus B_1$, где в A_1 сервантные подгруппы сильно неразложимы, $B_1 \neq 0$. Допустим, что найдутся сервантная подгруппа H в A_1 , $a \in A_1$ и $p \in \Pi(A)$ такие, что $h_p(a + H) = 0$. Если $b \in B_1 \setminus pB_1$, $\chi(a) \leq \chi(b)$ и $G = \langle a + pb, H \rangle_*$, то

$$\chi_{G/H}(a + pb + H) = \chi_A(a + pb).$$

Поэтому существует $f \in E(G)$ такой, что $\ker f = H$ и $f(a + pb) = a + pb$. Пусть $\varphi \in E(A)$, $\varphi|G = f$, π – проекция A на A_1 . Имеем

$$\pi\varphi(a + pb) = a, \quad \pi\varphi\pi \in E(A_1), \quad H \subseteq \ker \pi\varphi\pi.$$

Поэтому, так как все ненулевые эндоморфизмы A_1 – мономорфизмы, $\pi\varphi\pi = 0$, откуда $\pi\varphi(a + pb) = p\pi\varphi b = a$, что противоречит выбору a . Следовательно, A_1 – связанная группа. В B_1 также найдется связанная подгруппа A_2 . Так как $t(A_1) = t(A_2)$, из леммы 2 следует, что $A_1 \cong A_2$. Если $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$, где A_i – изоморфные связанные группы, то A есть qri -группа [3; теорема 3.1]. Допустим, что A имеет сервантную подгруппу $G = \bigoplus_{i=1}^\infty A_i$, где A_i – изоморфные связанные группы. Заметим, что всякое счетное множество элементов группы A можно вложить в некоторую такую подгруппу. Пусть $a_i \in A_i \setminus pA_i$, $\chi(a_i) = \chi(a_j)$, $i, j = 1, 2, \dots$. Положим $b_i = a_i - pa_{i+1}$. Имеем

$$a_1 = b_1 + pa_2 = \dots = b_1 + pb_2 + \dots + p^{n-1}b_n + p^n a_{n+1}.$$

Пусть F – замыкание в p -адической топологии группы A ее сервантной подгруппы $B = \bigoplus_{i=1}^\infty \langle b_i \rangle_*$ и $\{g_i\}_{i=1}^\infty \subseteq F$ – последовательность Коши в этой топологии. Заметим, что $G \subseteq F$. Так как B плотна в F , то можно считать, что $g_i \in B$. Если $g_{i+1} - g_i = p^i x_i$, то пусть $\varphi \in E(B)$ со свойством $\varphi b_1 = g_1$, $\varphi b_i = x_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots$. По условию φ продолжается до $\psi \in E(A)$. Тогда

$$\begin{aligned} \psi a_1 &= \psi b_1 + p\psi b_2 + \dots + p^{n-1}\psi b_n + p^n \psi a_{n+1} \\ &= g_1 + px_1 + \dots + p^{n-1}x_{n-1} + p^n \psi a_{n+1} = g_n + p^n \psi a_{n+1}, \end{aligned}$$

т.е. F и, значит, A в силу сказанного выше замечания полны в p -адической топологии. Поэтому A алгебраически компактна, в частности, является qri -группой.

Перейдем к вполне транзитивным $wqri$ -группам без кручения. Сначала ограничимся квазиоднородным случаем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть A – квазиоднородная вполне транзитивная $wqri$ -группа без кручения бесконечного p -ранга и множество $T(A)$ содержит максимальные элементы. Тогда если A имеет ненулевые эндоморфизмы с ненулевыми ядрами, то A является однородной алгебраически компактной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 \neq a \in A$ – элемент с максимальным типом, то по лемме 11 $A = A_1 \oplus B$, где $a \in A_1$, все сервантные подгруппы в A_1 сильно неразложимы и, следовательно, по лемме 1 все ненулевые эндоморфизмы в A_1 суть мономорфизмы. Пусть $h_p(a) = 0$ и $b \in B \setminus pB$. Имеем

$$\chi(a + pb) \leq \chi(b).$$

Поэтому $fa + pfb = b$ для некоторого $f \in E(A)$. Если π – проекция A на B , то $0 \neq x = \pi fa \in B$ в силу выбора b . Ввиду максимальной $t(a) = t(x)$. Поэтому $x \in A_2$ для некоторого прямого слагаемого A_2 в B . Поскольку $t(a) = t(\varphi a)$ для любого $0 \neq \varphi \in E(A_1)$, найдется натуральное n со свойством $\chi(na) = \chi(\varphi a)$. Отсюда $\psi\varphi a = na$, где $\psi \in E(A_1)$ и, значит, $\psi\varphi = n \cdot 1_{A_1}$. В частности, φ сохраняет типы всех элементов группы A_1 . Из этого вытекает, что типы всех ненулевых элементов в A_1 максимальны. Пусть $a \in A_1 \setminus pA_1$, $b \in A_2 \setminus pA_2$. Поскольку $\chi(pa + b) \leq \chi(a)$, то $pfa + fb = a$, $f \in E(A)$. Отсюда $fb \neq 0$ и $t(b) = t(fb) = t(a - pfa) = t(a)$. Следовательно, $A_1 \oplus A_2$ однородна. Так как $r_p(A)$ бесконечен, то так же, как в теореме 12, A – однородная алгебраически компактная группа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Если A – квазиоднородная вполне транзитивная $wqri$ -группа с сильно неразложимыми сервантными подгруппами и в множестве $T(A)$ имеются максимальные элементы, то все ее ненулевые эндоморфизмы суть мономорфизмы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если A имеет конечный p -ранг для некоторого $p \in \Pi(A)$, то справедливость предложения следует из вполне транзитивности A [8; следствие 5]. Если же p -ранг бесконечен, то достаточно сослаться на предложение 13.

ЛЕММА 15. Если A – редуцированная вполне транзитивная $wqri$ -группа без кручения, то $\Pi(A/p^\omega A) \cap \Pi(p^\omega A) = \emptyset$ для любого $p \in \Pi(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $q \in \Pi(A/p^\omega A) \cap \Pi(p^\omega A)$, где $p^\omega A \neq 0$. Тогда $q^\omega A \neq p^\omega A$. Возьмем $b \in p^\omega A \setminus qA$. Допустим, что $\psi_p^2 a \notin q^\omega A$ для некоторого $a \in A$, где $\psi_p = 1_A - p\varphi_p$, а φ_p – продолжение деления на p подгруппы $p^\omega A$, $\varphi_p \in E(A)$. Имеем

$$\psi_p(q^n a + b) = q^n \psi_p a,$$

где $n > h_q(\psi_p^2 a)$. Поскольку

$$\chi(q^n a + b) \leq \chi(\psi_p a),$$

существует $f \in E(A)$ со свойством $f(q^n a + b) = \psi_p a$. Отсюда $q^n \psi_p f a = \psi_p^2 a$. Противоречие с выбором n .

Допустим, что $\psi_p^2 A \subseteq q^\omega A$. Тогда $q^\omega A \neq 0$. Из

$$a = \psi_q a + q\varphi_q a = \psi_q a + q\psi_q \varphi_q a + q^2 \varphi_q^2 a = \dots$$

вытекает, что подгруппа $\psi_q A$ плотна в A в ее q -адической топологии. Поэтому $\psi_q^2 A$ также плотная в q -адической топологии подгруппа группы A . Следовательно, если $\psi_q^2 A \subseteq p^\omega A$, то факторгруппа $A/p^\omega A$ q -делима, что противоречит условию $q \in \pi(A/p^\omega A)$. Значит, найдется $g \in A$ со свойством $m = h_p(\psi_q^2 g) < \infty$. Пусть $x \in q^\omega A \setminus pA$ (такой элемент x найдется, поскольку $\psi_p^2 A \subseteq q^\omega A$). Имеем

$$\psi_q(p^n g + x) = p^n \psi_q g,$$

где $n > m$. Если $\alpha(p^n g + x) = \psi_q g$, то $p^n \psi_q \alpha g = \psi_q^2 g$, что противоречит выбору n .

ТЕОРЕМА 16. *Редуцированная вполне транзитивная группа без кручения является wqri-группой тогда и только тогда, когда*

$$\bigoplus_{p \in \Pi} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p \in \Pi} A_p = S,$$

где A – сервантная вполне характеристическая подгруппа в S , Π – некоторое множество простых чисел, $\Pi(A_p) \cap \Pi(A_q) = \emptyset$ при $p \neq q$, $p, q \in \Pi$, а A_p – квазиоднородные вполне транзитивные wqri-группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду лемм 9, 15 $A = p^\omega A \oplus A_p$, где $\pi(p^\omega A) \cap \pi(A_p) = \emptyset$. Поэтому A_p вполне характеристичны в A . Имеем

$$q^\omega A = (q^\omega A \cap p^\omega A) \oplus (q^\omega A \cap A_p), \quad A_p = (q^\omega A \cap A_p) \oplus (A_q \cap A_p).$$

Допустим, что

$$q^\omega A \cap A_p = q^\omega(A_p) \neq 0.$$

Тогда если $A_q \cap A_p \neq 0$, то выберем $a \in (q^\omega A \cap A_p) \setminus pA$ и $b \in (A_q \cap A_p) \setminus pA$. Получаем

$$\chi(a + pb) \leq \chi(b).$$

Поэтому $fa + pfb = b$ для некоторого $f \in E(A)$. Если π – проекция группы A на $A_q \cap A_p$, то

$$0 \neq \pi fa = b - p\pi fb \in q^\omega(A_q \cap A_p) = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что A_p являются квазиоднородными группами. Оставшаяся часть теоремы доказывается так же, как теорема 10.

СЛЕДСТВИЕ 17. 1) Если A – однородная wqri-группа, то A неразложима $\iff$ все ее сервантные подгруппы сильно неразложимы $\iff$ все ее ненулевые эндоморфизмы – мономорфизмы.

2) Всякая квазиоднородная вполне транзитивная wqri-группа, множество типов всех ненулевых элементов которой содержит максимальные элементы, является квазисервантно инъективной.

3) Всякая вполне транзитивная wqri-группа из класса $\mathcal{L}$ является квазисервантно инъективной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) вытекает из леммы 11 и утверждения 1) леммы 1.

2) вытекает из леммы 11, предложения 13 и из того, что квазиоднородная вполне транзитивная группа A с сильно неразложимыми сервантными подгруппами, в $T(A)$ которой существуют максимальные элементы, является квазисервантно инъективной [3; теорема 1.12].

3) следует из теоремы 16 и 2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, Мир, М., 1974; т. 2, Мир, М., 1977.
- [2] D. M. Arnold, B. O'Brien, J. D. Reid, "Quasi-pure injective and projective torsion-free abelian groups of finite rank", *Proc. London Math. Soc.*, **38**:3 (1979), 532–544.
- [3] Ю. Б. Добрусин, "Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения", *Абелевы группы и модули*, Томск, 1980, 45–69.
- [4] П. А. Крылов, "Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения", *Абелевы группы и модули*, **7**, Томск, 1988, 81–99.
- [5] П. А. Крылов, "Об одном классе квазисервантно инъективных абелевых групп", *Матем. заметки*, **45**:4 (1989), 53–58.
- [6] А. Р. Чехлов, "Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения", *Матем. заметки*, **46**:3 (1989), 93–99.
- [7] А. Р. Чехлов, "Абелевы группы без кручения конечного p -ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами", *Абелевы группы и модули*, **10**, Томск, 1991, 157–178.
- [8] А. Р. Чехлов, "Квазисервантно инъективные абелевы группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами", *Матем. заметки*, **68**:4 (2000), 587–592.
- [9] Ю. Б. Добрусин, "О продолжении частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения", *Абелевы группы и модули*, **4**, Томск, 1986, 36–53.
- [10] А. Р. Чехлов, "Об одном классе эндотранзитивных групп", *Матем. заметки*, **69**:6 (2001), 944–949.
- [11] С. Ф. Кожухов, "Почти вполне разложимые абелевы группы без кручения", *Абелевы группы и модули*, Томск, 1980, 91–101.

А. Р. Чехлов

Томский государственный университет

E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Поступило

26.12.2002

Исправленный вариант

18.10.2006