Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. З. Шаваровский, О подобии пар матриц четного порядка, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 448–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:59:03

О подобии пар матриц четного порядка

Б. З. Шаваровский

Исследуются инварианты одновременного подобия пары матриц четного порядка $2k$ над полем комплексных чисел в случае, когда все элементарные делители соответствующей характеристической многочленной матрицы одинаковые и их количество равно k .

Библиография: 15 названий.

1. Введение. В настоящей работе продолжается исследование подобия отдельных классов пар матриц, начатое в [1]. Точнее, эта статья посвящена задаче подобия пар матриц четного порядка с некоторыми дополнительными специальными спектральными свойствами. Данную задачу можно рассматривать как частный случай более общей классической задачи – задачи о парах матриц. В настоящее время в этом направлении имеется уже достаточно большое число публикаций. Для примера, кроме более ранних [2]–[5], приведем работы [6]–[10]. Предлагаемый здесь метод базируется на применении к характеристической многочленной матрице, отвечающей паре числовых матриц, полускалярно эквивалентных преобразований и приведении этой матрицы к некоторому более простому, в частности, каноническому виду.

Объектом нашего исследования являются упорядоченные пары (N_1, N_2) квадратных матриц четного порядка $n = 2k$ из кольца $M_n(\mathbb{C})$. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ считается линейно упорядоченным лексикографическим способом. Далее символом 0_r обозначим квадратную нулевую матрицу порядка r , а символ 0 , кроме нулевого элемента поля $\mathbb{C}$, часто будет означать и нулевую прямоугольную матрицу $0_{r,s}$, если из контекста понятно, о матрице каких размеров идет речь. Жорданову форму матрицы всегда будем записывать так, чтобы собственные значения на главной диагонали не убывали, а клетка большего порядка предшествовала клетке меньшего порядка, если собственные значения этих клеток одинаковые. Под *прямой суммой* $[A \oplus B]$ квадратных матриц A, B , как обычно, понимаем матрицу

$$[A \oplus B] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

а матрицу

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

(следуя [11]) назовем *косой суммой* матриц A, B и обозначим $[A \setminus B]$. Обозначение $[A \setminus B]$ распространим также и на блочные матрицы с прямоугольными блоками A и

B . Две матрицы $[A_1 \setminus B_1]$ и $[A_2 \setminus B_2]$ с блоками A_1, A_2 и B_1, B_2 соответственно размеров $n \times t$ и $t \times n$ назовем (m, n) -*блоччно-диагонально подобными*, если они подобны в обычном смысле, причем преобразующая матрица является прямой суммой матриц порядка t и n . Отметим, что применяемое в работе [8] блочно-диагональное подобие в нашей терминологии является (m, m) -блоччно-диагональным преобразованием подобия.

Сопоставим паре (N_1, N_2) числовых матриц характеристическую многочленную матрицу $N(x) = E_n x^2 + N_1 x + N_2$ (E_n – единичная матрица). Будем предполагать, что матрица $N(x)$ имеет k одинаковых элементарных делителей. Следовательно, все ее характеристические корни (корни уравнения $\det N(x) = 0$) равны и без ограничения общности их можно считать нулевыми. В этом случае каноническая диагональная форма матрицы $N(x)$ имеет вид

$$\text{diag}(E_k, x^4 E_k).$$

Таким образом, нами выделен некоторый класс $\{(N_1, N_2)\}$ пар матриц. Цель настоящей работы заключается в исследовании одновременного подобия $(PN_1 P^{-1}, PN_2 P^{-1})$ пар матриц из этого (выделенного) класса. В дальнейшем, говоря о подобии пар матриц, мы всегда будем иметь в виду только одновременное подобие (прилагательное для краткости опускается). Отметим также, что в работе автора [12] решается задача подобия пар (и даже конечных наборов) матриц с попарно различными элементарными делителями первой степени, а в работе [13] – та же задача для пар с одним элементарным делителем. Упомянутые классы пар матриц в некотором смысле являются противоположными по сравнению с рассматриваемым в данной работе. Это обстоятельство в какой-то мере послужило мотивировкой выбора указанного выше класса $\{(N_1, N_2)\}$.

2. Вспомогательные предложения. Далее мы будем пользоваться понятием полускалярной эквивалентности многочленных матриц, заимствованным из [14; раздел IV, § 1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многочленные матрицы $N(x)$ и $K(x)$ над $\mathbb{C}[x]$ будем называть *полускалярно эквивалентными*, если существуют такая неособенная числовая матрица Q и обратимая матрица $R(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, что

$$N(x) = QK(x)R(x).$$

Нетрудно видеть, что применяя полускалярно эквивалентные преобразования (см. [14; раздел IV, § 1, теорема 1]), характеристическую матрицу $N(x)$ пары (N_1, N_2) можно привести к следующему виду:

$$\left\| \begin{array}{cc} E_k & 0 \\ A(x) & x^4 E_k \end{array} \right\|, \quad (1)$$

где $A(x) = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3$, причем некоторые из коэффициентов A_1, A_2, A_3 , возможно, равны нулю. Если (K_1, K_2) – некоторая другая пара из рассматриваемого класса и ее характеристическая матрица $K(x) = E_n x^2 + K_1 x + K_2$ приведена полускалярно эквивалентными преобразованиями к виду

$$\left\| \begin{array}{cc} E_k & 0 \\ B(x) & x^4 E_k \end{array} \right\|, \quad (2)$$

где $B(x) = B_1x + B_2x^2 + B_3x^3$, то имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Следующие условия эквивалентны:

- а) пары матриц (N_1, N_2) , (K_1, K_2) подобны;
- б) соответствующие парам (N_1, N_2) , (K_1, K_2) матрицы (1), (2) полускалярно эквивалентны;
- с) конгруэнция

$$B(x)X_1 - X_2A(x) + B(x)X_3A(x) \equiv 0 \pmod{x^4} \quad (3)$$

с коэффициентами $A(x)$, $B(x)$, взятыми из матриц (1), (2), и неизвестными $(k \times k)$ -матрицами X_1 , X_2 , X_3 имеет решение $X_1 = S_1$, $X_2 = S_2$, $X_3 = S_3$ в $M_k(\mathbb{C})$, где $S_1, S_2 \in GL(k, \mathbb{C})$;

- д) система матричных двусторонних линейных уравнений

$$\begin{cases} B_1X_1 - X_2A_1 = 0, \\ B_2X_1 - X_2A_2 + B_1X_3A_1 = 0, \\ B_3X_1 - X_2A_3 + B_2X_3A_1 + B_1X_3A_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

с коэффициентами A_i , B_i , $i = 1, 2, 3$, матричных многочленов $A(x)$, $B(x)$ из (1), (2) относительно неизвестных $(k \times k)$ -матриц X_1 , X_2 , X_3 имеет решение $(X_1, X_2, X_3) = (S_1, S_2, S_3)$ с неособенными первыми двумя компонентами $X_1 = S_1$, $X_2 = S_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий а) и б) не вызывает сомнений ввиду унитарности характеристических матриц $N(x)$, $K(x)$, которые приводятся к виду (1), (2) соответственно, и того очевидного факта, что полускалярная эквивалентность обладает свойством транзитивности. Но легче всего сослаться на [14; раздел IV, § 1, следствие 2].

Для доказательства эквивалентности условий с) и д) достаточно в левой части конгруэнции (3) вычислить коэффициенты при x , x^2 , x^3 и сопоставить их с левыми частями уравнений системы (4).

Доказательство б) $\iff$ с). Пусть матрицы (1), (2) полускалярно эквивалентны. Представив преобразующие матрицы в блочном виде, аналогичном виду матриц (1), (2), можем записать равенство

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_3 \\ S_4 & S_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_k & 0 \\ A(x) & x^4 E_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_k & 0 \\ B(x) & x^4 E_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} R_{11}(x) & R_{12}(x) \\ R_{21}(x) & R_{22}(x) \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Из последнего получаем, что $S_4 = 0_k$ и

$$B(x)S_1 - S_2A(x) + B(x)S_3A(x) \equiv 0 \pmod{x^4}.$$

Поскольку преобразующие матрицы обратимые, то матрицы S_1 , S_2 неособенные и условие с) доказано.

Обратно, пусть S_1 , S_2 , S_3 суть матрицы, удовлетворяющие конгруэнции (3), причем S_1 , S_2 неособенные. Тогда матрица

$$R_{21}(x) = \frac{1}{x^4}(S_2A(x) - B(x)S_1 - B(x)S_3A(x))$$

принадлежит кольцу $M_k(\mathbb{C}[x])$. Образовав матрицы

$$R_{11}(x) = S_1 + S_3 A(x), \quad R_{12}(x) = x^4 S_3, \quad R_{22}(x) = S_2 - B(x) S_3,$$

принадлежащие $M_k(\mathbb{C}[x])$, непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства (5), положив $S_4 = 0_k$. Этим условие b) и предложение в целом доказаны.

Следующее предложение дает некоторые инварианты пары (N_1, N_2) относительно подобия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Ранги матриц*

$$A_1, \quad \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \end{vmatrix},$$

где A_1, A_2, A_3 – соответствующие коэффициенты матричного многочлена $A(x)$ из (1), являются инвариантами пары (N_1, N_2) относительно подобия или характеристической матрицы $N(x)$ этой пары относительно полускалярной эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из полускалярной эквивалентности матриц (1) и (2) согласно предложению 1 следует существование решения (S_1, S_2, S_3) системы (4), где S_1, S_2 – неособенные матрицы. Из первого уравнения, первых двух и всех трех уравнений системы (4) соответственно имеем равенства

$$\begin{aligned} A_1 &= S_2^{-1} B_1 S_1, \\ \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix} &= [S_2^{-1} \oplus S_2^{-1}] \begin{vmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_1 & 0 \\ S_3 A_1 & S_1 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & A_1 & 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 \end{vmatrix} &= [S_2 \oplus S_2 \oplus S_2] \begin{vmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ B_2 & B_1 & 0 \\ B_3 & B_2 & B_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ S_3 A_1 & S_1 & 0 \\ S_3 A_2 & S_3 A_1 & S_1 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает следствие настоящего предложения.

Далее, в зависимости от рангов матриц, инвариантность которых установлена в предложении 2, исследуем следующие случаи.

Случай I. Ранг матрицы A_1 максимально возможный ($\text{rank } A_1 = k$, т.е. $\det A_1 \neq 0$).

Случай II. Ранг матрицы A_1 минимально возможный ($\text{rank } A_1 = 0$, т.е. $A_1 = 0_k$).

Случай III. $0 < \text{rank } A_1 < k$.

Случай III-A. $0 < \text{rank } A_1 < k$ и ранг матрицы $\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix}$ максимально возможный (т.е. равный $k + \text{rank } A_1$).

Случай III-B. $0 < \text{rank } A_1 < k$ и ранг матрицы $\begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix}$ минимально возможный (т.е. равный $2 \text{rank } A_1$).

Прежде чем приступить к рассмотрению каждого из указанных случаев в отдельности и по существу докажем одно общее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Матрица*

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix},$$

состоящая из коэффициентов матрицы $A(x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$ из (1), является неособенной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме о регуляризации (см. [14; раздел III, § 2, теорема 3]) ранг взаимной к матрице (1) на системе корней многочлена x^{4k} матрицы равен $4k$. Поскольку взаимная к матрице (1) имеет вид

$$x^{4k-4} \begin{vmatrix} x^4 E_k & 0 \\ -A(x) & E_k \end{vmatrix},$$

то, учитывая [14; раздел II, § 2, предложение 6], имеем

$$\text{rank } M_{\|A(x) \quad E \quad xA(x) \quad xE\|}(x^4) = \text{rank } \begin{vmatrix} A(0) & E_k & (xA(x))_{x=0} & 0 \\ A'(0) & 0 & (xA(x))'_{x=0} & E_k \\ A''(0) & 0 & (xA(x))''_{x=0} & 0 \\ A'''(0) & 0 & (xA(x))'''_{x=0} & 0 \end{vmatrix} = 4k.$$

Следовательно,

$$\text{rank } \begin{vmatrix} 0 & E_k & 0 & 0 \\ A_1 & 0 & 0 & E_k \\ 2A_2 & 0 & 2E_1 & 0 \\ 6A_3 & 0 & 6A_2 & 0 \end{vmatrix} = 4k,$$

откуда и вытекает нужное предложение.

3. Случай I. Имеем в матрице $A(x)$ из (1) неособенный коэффициент A_1 при x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *В классе $\{CN(x)Q(x)\}$ полускалярно эквивалентных матриц существует, притом единственная, матрица вида*

$$\begin{vmatrix} E_k & 0 \\ \bar{B}(x) & x^4 E_k \end{vmatrix}, \quad (6)$$

в которой $\bar{B}(x) = E_k x + Jx^3$, J – жорданова матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Существование.* Очевидно, мы с самого начала можем считать в матрице $A(x)$ из (1) коэффициент A_1 при x равным E_k . Нетрудно убедиться в том, что такая матрица (1) полускалярно эквивалентна матрице (2) с коэффициентами блока $B(x)$ вида: $B_1 = E_k$, $B_2 = 0_k$, $B_3 = A_3 - A_2^2$. Для этого необходимо проверить разрешимость системы (4) после подстановки $X_1 = X_2 = E_k$, $X_3 = A_2$. Наконец, подвергая полученную матрицу преобразованию подобия матрицей $P = [P_0 \oplus P_0]$, где P_0 – преобразующая к жордановой форме матрицы $A_3 - A_2^2$, получаем матрицу (6) нужного вида и свойств.

Единственность. Если матрицы (1) и (2), где $A(x) = E_k x + J_1 x^3$, $B(x) = E_k x + J_2 x^3$, J_1, J_2 – жордановы матрицы, полускалярно эквивалентны, то согласно предложению 1 существует решение системы (4) $X_1 = S_1$, $X_2 = S_2$, $X_3 = S_3$, где $\det S_1 \neq 0$, $\det S_2 \neq 0$. Из первого уравнения (4) следует $S_1 = S_2$, из второго $S_3 = 0_k$, из третьего $J_2 = S_1 J_1 S_1^{-1}$. Этим все доказано.

Таким образом, в случае I матрицу (6) с указанным в предложении 4 видом блока $\overline{B}_1(x)$ можно считать канонической относительно полускалярно эквивалентных преобразований. Это на основании предложения 1 дает критерий подобия соответствующих пар матриц (в условиях рассматриваемого случая I).

4. Случай II. В матрице $A(x)$ из (1) коэффициент A_1 при x равен 0_k : $A(x) = A_1x^2 + A_3x^3$. Тогда согласно предложению 3 имеем $\det A_2 \neq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В классе $\{CN(x)Q(x)\}$ полускалярно эквивалентных матриц существует, притом единственная, матрица вида (6), в которой $\overline{B}(x) = E_kx^2 + Jx^3$, J – жорданова матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование очевидно.

Единственность. Из полускалярной эквивалентности матриц (1) и (2), где $A(x) = E_kx^2 + J_1x^3$, $B(x) = E_kx^2 + J_2x^3$, J_1, J_2 – жордановы матрицы, согласно предложению 1 следует существование неособенных матриц S_1, S_2 и матрицы S_3 , удовлетворяющих уравнениям системы (4). Из второго уравнения этой системы имеем, $S_1 = S_2$, а из третьего $J_2 = S_1J_1S_1^{-1}$. Предложение доказано.

Предложение 5 решает вопрос о канонической форме многочленной матрицы $N(x)$ относительно полускалярной эквивалентности и, следовательно, вопрос о подобии соответствующих пар матриц (в рассматриваемом случае).

5. Случай III. Пусть $\text{rank } A_1 = r$, $0 < r < k$. Мы можем считать, что на самом деле

$$A_1 = [E_r \oplus 0_{k-r}].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если в многочленной матрице $A(x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$ из (1) коэффициент A_1 представить в виде

$$A_1 = [E_r \oplus 0_{k-r}],$$

а коэффициент A_2 в аналогичном блочном виде

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_2^{(11)} & A_2^{(12)} \\ A_2^{(21)} & A_2^{(22)} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

то $\text{rank } A_2^{(22)}$ является инвариантом пары (N_1, N_2) относительно подобия или характеристической матрицы $N(x)$ этой пары относительно полускалярной эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инвариантность ранга матрицы $A_2^{(22)}$ из (7) немедленно следует из инвариантности ранга матрицы

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix}$$

(см. предложение 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. В классе полускалярно эквивалентных матриц $\{CN(x)Q(x)\}$ существует матрица вида (2), где

$$B(x) = B_1x + B_2x^2 + B_3x^3, \quad B_1 = [E_r \oplus 0_{k-r}], \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0_r & B_2^{(12)} \\ B_2^{(21)} & B_2^{(22)} \end{bmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в матрице $A(x)$ из (1)

$$A_1 = [E_r \oplus 0_{k-r}], \quad A_2 = \begin{pmatrix} A_2^{(11)} & A_2^{(12)} \\ A_2^{(21)} & A_2^{(22)} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} A_3^{(11)} & A_3^{(12)} \\ A_3^{(21)} & A_3^{(22)} \end{pmatrix},$$

где $A_2^{(11)}, A_3^{(11)}$ – $(r \times r)$ -блоки, и в матрице $B(x)$ из (2) положить

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1, & B_2 &= \begin{pmatrix} 0_r & A_2^{(12)} \\ A_2^{(21)} & A_2^{(22)} \end{pmatrix}, & B_3 &= \begin{pmatrix} B_3^{(11)} & B_3^{(12)} \\ B_3^{(21)} & B_3^{(22)} \end{pmatrix}, \\ B_3^{(11)} &= A_3^{(11)} - (A_2^{(11)})^2, & B_3^{(12)} &= A_3^{(12)} - A_2^{(11)} A_2^{(12)}, \\ B_3^{(21)} &= A_3^{(21)} - A_2^{(21)} A_2^{(11)}, & B_3^{(22)} &= A_3^{(22)}, \end{aligned}$$

то не представляет труда проверить, что система (4) удовлетворяется при

$$X_1 = X_2 = E_k, \quad X_3 = [A_2^{(11)} \oplus 0_{k-r}].$$

Это с учетом предложения 1 и доказывает наше предложение.

6. Случай III-A. Имеем

$$\text{rank } A_1 = r, \quad 0 < r < k, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} = k + r. \quad (8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если выполняются условия (8), то в классе полускалярно эквивалентных матриц $\{CN(x)Q(x)\}$ существует, притом единственная, матрица вида (6), где

$$\overline{B}(x) = [E_r \oplus 0_{k-r}]x + [0_r \oplus E_{k-r}]x^2 + [J_1 \oplus J_2]x^3,$$

J_1, J_2 – матрицы Жордана порядков r и $k - r$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Выполнение условий настоящего предложения обеспечивает полноту ранга блока $A_2^{(22)}$ матрицы (7). Последнее влечет за собой возможность придания матрице $A(x)$ из (1) вида

$$A(x) = [E_r \oplus 0_{k-r}]x + [0_r \oplus E_{k-r}]x^2 + \begin{pmatrix} A_3^{(11)} & A_3^{(12)} \\ A_3^{(21)} & A_3^{(22)} \end{pmatrix} x^3,$$

где $A_3^{(11)}$ – $(r \times r)$ -блок. Покажем, что матрица (1) с таким блоком $A(x)$ полускалярно эквивалентна матрице (2), где

$$B(x) = [E_r \oplus 0_{k-r}]x + [0_r \oplus E_{k-r}]x^2 + [A_3^{(11)} \oplus A_3^{(22)}]x^3.$$

Для этого прямой проверкой убеждаемся, что матрицы

$$X_1 = X_2 = E_k, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0_r & A_3^{(12)} \\ A_3^{(21)} & 0_{k-r} \end{pmatrix}$$

являются решениями уравнений (4), нужными для выполнения условия d) предложения 1. Применим теперь к полученной матрице вида (2) подобие с трансформирующей матрицей $[P_1 \oplus P_2 \oplus P_1 \oplus P_2]$, где P_1, P_2 – преобразующие к жордановой форме

матриц $A_3^{(11)}$, $A_3^{(22)}$ соответственно. В результате приходим к матрице вида (6) с указанным в предложении видом блока $\bar{B}(x)$.

Единственность. Если допустить существование в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ другой матрицы (6) с блоком в позиции $\bar{B}(x)$ вида

$$[E_r \oplus 0_{k-r}]x + [0_r \oplus E_{k-r}]x^2 + [\bar{J}_1 \oplus \bar{J}_2]x^3,$$

где $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ – жордановы матрицы порядков r и $k-r$ соответственно, то, обращаясь к условию d) предложения 1, получаем, что матрицы $\bar{J}_1$, $\bar{J}_2$ соответственно подобны матрицам J_1 , J_2 . Предложение доказано.

Таким образом, предложением 8 полностью решается задача канонической формы матрицы $N(x)$ относительно полускалярной эквивалентности и задача критерия подобия соответствующей пары матриц (в условиях этого предложения).

7. Случай III-B. Рассмотрим далее ситуацию, почти прямо противоположную описанной в предложении 8, когда

$$\text{rank } A_1 = r, \quad 0 < r < k, \quad \text{rank} \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_1 \end{vmatrix} = 2r. \quad (9)$$

Тогда в матрице (7) блок $A_2^{(22)}$ нулевой и, должно быть, $r \geq k/2$, поскольку в противном случае $\text{rank} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \end{vmatrix} < k$, что противоречит предложению 3.

Предположим сначала $r = k/2$. Тогда, очевидно, число k является четным, т.е. $r = 2m$, и матрицу $A(x)$ из (1) можно выбрать при желании в виде

$$A(x) = [E_m \oplus 0_m]x + [E_m \setminus E_m]x^2 + A_3x^3.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Если в матрице $A(x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$ из (1) коэффициенты A_1 , A_2 представить в виде

$$A_1 = [E_m \oplus 0_m], \quad A_2 = [E_m \setminus E_m],$$

а коэффициент A_3 в аналогичном блочном виде

$$A_3 = \begin{vmatrix} A_3^{(11)} & A_3^{(12)} \\ A_3^{(21)} & A_3^{(22)} \end{vmatrix},$$

то $\det(A_3^{(22)} - E_m) \neq 0$, форма Жордана блока $A_3^{(22)}$ является инвариантом пары (N_1, N_2) относительно подобия и блок $A_3^{(11)}$ можно считать нулевым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неособенность матрицы $A_3^{(22)} - E_m$ непосредственно следует из предложения 3, учитывая вид матриц A_1 , A_2 .

Если матрица (1) полускалярно эквивалентна матрице (2), где

$$B(x) = [E_m \oplus 0_m]x + [E_m \setminus E_m]x^2 + \begin{vmatrix} B_3^{(11)} & B_3^{(12)} \\ B_3^{(21)} & B_3^{(22)} \end{vmatrix} x^3,$$

то согласно предложению 1 существует решение системы (4) $X_1 = S_1$, $X_2 = S_2$, $X_3 = S_3$, где S_1 , S_2 – неособенные матрицы. Из первого уравнения этой системы

следует, что матрицы S_1, S_2 имеют вид

$$S_1 = \begin{vmatrix} S_1^{(11)} & 0 \\ S_1^{(21)} & S_1^{(22)} \end{vmatrix}, \quad S_2 = \begin{vmatrix} S_2^{(11)} & S_2^{(12)} \\ 0 & S_2^{(22)} \end{vmatrix},$$

причем $S_1^{(11)} = S_2^{(11)}$; из второго

$$S_1^{(11)} = S_1^{(22)} = S_2^{(22)},$$

а из третьего

$$B_3^{(22)} S_1^{(11)} - S_1^{(11)} A_3^{(22)} = 0,$$

где $\det S_1^{(11)} \neq 0$.

Наконец, чтобы показать, что блок $A_3^{(11)}$ в матрице A_3 можно считать нулевым, достаточно убедиться в том, что матрицы $X_1 = X_2 = E_k$, $X_3 = [0, 5A_3^{(11)} \setminus 0, 5A_3^{(11)}]$ удовлетворяют системе (4), где

$$B_1 = A_1 = [E_m \oplus 0_m], \quad B_2 = A_2 = [E_m \setminus E_m], \quad B_3 = \begin{vmatrix} 0_m & A_3^{(12)} \\ A_3^{(21)} & A_3^{(22)} \end{vmatrix},$$

и применить предложение 1.

Для дальнейшего нам понадобится ввести некоторое определение. Пусть матрица $I = \bigoplus_{i=1}^l I^{(m_i)}(\alpha_i)$ имеет (верхнюю) жорданову форму с клетками Жордана $I^{(m_i)}(\alpha_i)$ порядка m_i и собственным значением α_i , $i = 1, \dots, l$, и некоторая матрица G представлена в блочной форме $G = \|G_{ij}\|_1^l$ с диагональными блоками G_{ij} порядка m_i , причем

$$G_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1^{(ij)} & \dots & \alpha_{\mu_{ij}}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}, \quad \mu_{ij} = \min(m_i, m_j),$$

если $\alpha_i \alpha_j = 1$, и $G_{ij} = 0$ в противном случае. Здесь $\alpha_1^{(ij)}, \dots, \alpha_{\mu_{ij}}^{(ij)}$ – некоторые (произвольные, возможно, нулевые) элементы. Будем говорить, что пара матриц (G, I) имеет строгую форму.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если выполняются условия (9), то в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ полускалярно эквивалентных матриц существует матрица вида (6), где

$$\overline{B}(x) = [E_m \oplus 0_m]x + [E_m \setminus E_m]x^2 + \begin{vmatrix} 0_m & 0_m \\ G & J \end{vmatrix} x^3,$$

матрица J имеет жорданову форму, а пара матриц $(G, J - E_m)$ строгую форму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Исходя из условий настоящего предложения и учитывая предложение 9, легко видеть, что в классе полускалярно эквивалентных матриц $\{CN(x)Q(x)\}$ существует матрица вида (1), где в блоке $A(x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$

коэффициенты A_1 , A_2 имеют указанный в предложении (нужный) вид, а коэффициент A_3 вид

$$A_3 = \begin{Bmatrix} 0_m & A_3^{(12)} \\ A_3^{(21)} & J \end{Bmatrix},$$

где J – жорданова матрица. Очевидно, $J - E_m$ – также жорданова матрица. Пусть $(G, J - E_m)$ – пара матриц, имеющая строгую форму, причем в блоках

$$G_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_1^{(ij)} & \dots & \alpha_{\mu_{ij}}^{(ij)} & 0 & \dots & 0 \end{Bmatrix}$$

матрицы $G = \|G_{ij}\|$ элементы $\alpha_1^{(ij)}, \dots, \alpha_{\mu_{ij}}^{(ij)}$ неопределенные (параметры). Рассмотрим матрицу (2), где коэффициенты блока $B(x) = B_1x + B_2x^2 + B_3x^3$ имеют вид

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2, \quad B_3 = \begin{Bmatrix} 0_m & 0_m \\ G & J \end{Bmatrix},$$

и покажем, что параметры $\alpha_1^{(ij)}, \dots, \alpha_{\mu_{ij}}^{(ij)}$ в блоке G можно выбрать так, что матрицы (1) и (2) будут полускалярно эквивалентными. Для этого рассмотрим неизвестные $(k \times k)$ -матрицы вида

$$X_1 = \begin{Bmatrix} E_m & 0_m \\ X_1^{(21)} & E_m \end{Bmatrix}, \quad X_2 = \begin{Bmatrix} E_m & X_2^{(12)} \\ 0_m & E_m \end{Bmatrix}, \quad X_3 = \begin{Bmatrix} X_3^{(11)} & X_3^{(12)} \\ X_3^{(21)} & 0_m \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

для которых

$$X_1^{(21)} - X_2^{(12)} + X_3^{(11)} = 0, \quad (11)$$

и покажем, что при надлежащем выборе блоков $X_1^{(21)}$, $X_2^{(12)}$, $X_3^{(11)}$, $X_3^{(12)}$, $X_3^{(21)}$ матриц X_1 , X_2 , X_3 последние будут удовлетворять системе (4) (при указанных выше A_i , B_i , $i = 1, 2, 3$). Очевидно, первым двум уравнениям системы (4) удовлетворяют произвольные матрицы X_1 , X_2 , X_3 вида (10), если только выполняется соотношение (11). После подстановки неизвестных матриц (10) в третье уравнение системы (4) получаем уравнение

$$\begin{Bmatrix} 0_m & 0_m \\ G & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_m & 0_m \\ X_1^{(21)} & E_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} E_m & X_2^{(12)} \\ 0_m & E_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0_m & A_3^{(12)} \\ A_3^{(21)} & J \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_3^{(12)} + X_3^{(21)} & X_3^{(11)} \\ X_3^{(11)} & 0_m \end{Bmatrix} = 0.$$

Последнее с учетом (11) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} X_2^{(12)}A_2^{(21)} - X_3^{(12)} - X_3^{(21)} = 0_m, \\ X_1^{(21)} + X_2^{(12)}(J - E_m) + A_2^{(12)} = 0_m, \\ (J - E_m)X_1^{(21)} + X_2^{(12)} - (A_2^{(21)} - G) = 0_m. \end{cases}.$$

Из второго и третьего уравнений этой системы получаем уравнение

$$(J - E_m)^{-1}X_2^{(12)} - X_2^{(12)}(J - E_m) = A_3^{(12)} + (J - E_m)^{-1}(A_3^{(21)} - G). \quad (12)$$

Пусть $I^{(m_i)}(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, l$, – жордановы клетки, составляющие матрицу $J - E_m$; m_i , α_i – соответственно порядки и собственные значения этих клеток. Представим все матрицы, входящие в уравнение (12) (известные и неизвестные), в блочном виде с квадратными блоками порядков m_i на главной диагонали. Если $X_{ij}^{(12)}$, $A_{ij}^{(12)}$, $A_{ij}^{(21)}$, G_{ij} – блоки в позиции (i, j) матриц $X_2^{(12)}$, $A_2^{(12)}$, $A_2^{(21)}$, G соответственно, то из уравнения (12) будем иметь l^2 уравнений вида

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_i^{-1} & -\alpha_i^{-2} & \dots & (-1)^{m_i-1} \alpha_i^{-m_i} \\ 0 & \alpha_i^{-1} & \dots & (-1)^{m_i-2} \alpha_i^{-m_i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_i^{-1} \end{array} \right\| X_{ij}^{(12)} - X_{ij}^{(12)} \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_j & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_j \end{array} \right\| \\ & = A_{ij}^{(12)} + \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_i^{-1} & -\alpha_i^{-2} & \dots & (-1)^{m_i-1} \alpha_i^{-m_i} \\ 0 & \alpha_i^{-1} & \dots & (-1)^{m_i-2} \alpha_i^{-m_i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_i^{-1} \end{array} \right\| (A_{ij}^{(21)} - G_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (13)$$

Если $\alpha_i \alpha_j = 1$, то, как нетрудно видеть, неопределенные элементы матрицы G_{ij} можно выбрать так, что уравнение (13) будет иметь решение. Если же $\alpha_i \alpha_j \neq 1$, то, полагая $G_{ij} = 0$, получим, что уравнение (13) имеет единственное решение (см. [15; глава VIII, § 3]. Таким образом, при надлежащем выборе матрицы G системе (4) удовлетворяют некоторые матрицы вида (10), что согласно предложению 1 и доказывает наше предложение.

В доказанном предложении ничего не говорится о точности определения установленной там формы матрицы вида (6). Стало быть, последняя, вообще говоря, не единственная. Однако из предложений 9 и 10 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если выполняются условия предложения 9, причем матрица $A_3^{(22)} - E_m$ не имеет собственных значений, расположенных симметрично относительно единичной окружности, т.е. взаимно обратных или равных ± 1 , то в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ полускалярно эквивалентных матриц существует, притом единственная, матрица вида (6), где

$$\bar{B}(x) = [E_m \oplus 0_m]x + [E_m \setminus E_m]x^2 + [0_m \oplus J]x^3,$$

J – жорданова матрица.

Наличие в матрице $A_3^{(22)} - E_m$ взаимно обратных или равных ± 1 собственных значений значительно усложняет ситуацию. Впрочем, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполняются условия предложения 9, причем матрица $A_3^{(22)} - E_m$ имеет простую структуру, t (различных) пар взаимно обратных собственных значений кратностей p_j , q_j , $j = 1, \dots, t$, и собственные значения $+1, -1$ кратностей l_1, l_2 соответственно, то в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ существует матрица вида (6), где

$$\bar{B}(x) = [E_m \oplus 0_m]x + [E_m \setminus E_m]x^2 + \left\| \begin{array}{cc} 0_m & 0_m \\ G & J \end{array} \right\| x^3,$$

матрица J имеет форму Жордана, пара $(G, J - E_m)$ строгую форму, причем матрица G с точностью до перестановки блоков преобразованиями подобия имеет вид

$$G = \left[\left[\begin{array}{ccc} \left\| \begin{array}{c} G_1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\| & & \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ G_t \end{array} \right\| \\ \left\| \begin{array}{c} \bar{G}_1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right\| & & \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ \bar{G}_t \end{array} \right\| \end{array} \right] \oplus J_1 \oplus J_2 \oplus 0 \right],$$

где G_j и $\bar{G}_j$, $j = 1, \dots, t$, – матрицы размеров $q_j \times p_j$ и $p_j \times q_j$, а J_1 и J_2 – жордановы матрицы порядков l_1 и l_2 соответственно. Матрица $\bar{B}(x)$ определяется с точностью до (p_j, q_j) -блочного-диагонального подобия матриц $[G_j \setminus \bar{G}_j]$, $j = 1, \dots, t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ указанной в следствии матрицы вида (6) следует из предложений 9 и 10.

Единственность матрицы $\bar{B}(x)$ с отмеченной в следствии точностью докажем для случая наличия в матрице $A_3^{(22)} - E_m$ лишь одной пары взаимно обратных собственных значений $\alpha_1, \alpha_2 \neq \pm 1$ кратностей k_1, k_2 соответственно. Для этого рассмотрим систему (4), где

$$A_1 = B_1 = [E_m \oplus 0_m], \quad A_2 = B_2 = [E_m \setminus E_m], \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ F & J \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0_m & 0_m \\ G & J \end{bmatrix},$$

и пары $(F, J - E_m)$, $(G, J - E_m)$ имеют строгую форму. Будем полагать для определенности, что матрица $J - E_m$ имеет вид

$$J - E_m = [\alpha_1 E_{k_1} \oplus \alpha_2 E_{k_2} \oplus E_{k_3} \oplus (-1)E_{k_4} \oplus I], \quad (14)$$

где $\alpha_1 \alpha_2 = 1$ и диагональ блока I свободна от $\alpha_1, \alpha_2, \pm 1$ и взаимно обратных элементов. Тогда матрицы F и G в A_3 и B_3 , по-видимому, имеют строение

$$F = [[F_1 \setminus \bar{F}_1] \oplus J_1 \oplus J_2 \oplus 0], \quad G = [[G_1 \setminus \bar{G}_1] \oplus \tilde{J}_1 \oplus \tilde{J}_2 \oplus 0]. \quad (15)$$

Согласно предложению 1 система (4) с указанными выше коэффициентами A_i, B_i , $i = 1, 2, 3$, имеет решение S_1, S_2, S_3 с неособенными компонентами S_1, S_2 . Поэтому из первых двух уравнений этой системы следует, что матрицы S_1, S_2 имеют вид

$$S_1 = \begin{bmatrix} S_{11} & 0_m \\ S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0_m & S_{11} \end{bmatrix}, \quad \det S_{11} \neq 0.$$

Из третьего уравнения получаем, что имеет место соотношение

$$GS_{11} - S_{11}F - (J - E_m)S_{12}(J - E_m) + S_{12} = 0_m \quad (16)$$

и матрица S_{11} коммутирует с жордановой матрицей J . Следовательно, матрица S_{11} имеет вид

$$S_{11} = [S_{(k_1)} \oplus S_{(k_2)} \oplus S_{(k_3)} \oplus S_{(k_4)} \oplus S], \quad (17)$$

где $S_{(k_i)}$, $i = 1, 2, 3, 4$, – неособенные матрицы порядка k_i . Учитывая вид (14), (15), (17) матриц $J - E_m, F, G, S_{11}$, из соотношения (16) находим, что

$$\begin{aligned} [G_1 \setminus \bar{G}_1] - [S_{(k_1)} \oplus S_{(k_2)}] - [S_{(k_1)} \oplus S_{(k_2)}][F_1 \setminus \bar{F}_1] &= 0, \\ \tilde{J}_1 S_{(k_3)} - S_{(k_3)} J_1 &= 0, \quad \tilde{J}_2 S_{(k_4)} - S_{(k_4)} J_2 = 0. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Очевидно, что-то более определенное можно сказать о точности определения матрицы вида (6) в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ в условиях предложения 10 и во многих других случаях, отличных от рассмотренных в следствиях 1 и 2. Например, если матрица $A_3^{(22)} - E_m$ имеет лишь один отличный от единицы инвариантный множитель, то задача решается полностью. Однако в общем случае возникают определенные трудности. Впрочем, это и понятно, поскольку уже в случае, рассмотренном в следствии 2, мы, решая задачу подобия пар (N_1, N_2) матриц порядка $n = 2k$, приходим, по сути дела, к аналогичной задаче для пары (G, J) матриц четырех меньшего порядка $m = k/2$. При этом возникает потребность в исследовании (m, n) -блочно-диагонального подобия матриц вида $[A \setminus B]$, где блоки A и B имеют размеры $n \times m$ и $m \times n$ соответственно. Но это – тема другого исследования.

Рассмотрим далее ситуацию, когда в матрице (7) $A_2^{(22)} = 0_{k-r}$ и $r > k/2$. Согласно предложению 7 матрицу $A(x)$ из (1) при желании можно выбрать в виде

$$A(x) = [E_r \oplus 0_{k-r}]x + [A_2^{(21)} \setminus A_2^{(12)}]x^2 + A_3x^3. \quad (18)$$

На основании предложения 3 получаем, что блоки $A_2^{(12)}$, $A_2^{(21)}$ имеют полные ранги, т.е. $\text{rank } A_2^{(12)} = \text{rank } A_2^{(21)} = k - r$. Следовательно, блок $A_2^{(12)}$ можно выбрать в виде

$$A_2^{(12)} = \begin{Bmatrix} E_{k-r} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

а на основании предложения 1 несложно уяснить себе, что в матрице

$$A_2^{(21)} = \begin{Bmatrix} A_2^{(211)} & A_2^{(212)} \end{Bmatrix}$$

ранг k_1 блока $A_2^{(211)}$, состоящего из $k - r$ столбцов, является инвариантом пары (N_1, N_2) относительно подобия. Поэтому блок $A_2^{(21)}$ можно выбрать в виде

$$A_2^{(21)} = \begin{Bmatrix} E_{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{k-r-k_1} \end{Bmatrix}.$$

Сейчас мы ограничимся рассмотрением только крайних случаев, когда $k_1 = k - r$ или $k_1 = 0$. В последнем случае, должно быть, $r \geq 2k/3$. Случай $0 < k_1 < k - r$ представляется более сложным, а результат менее эффективным и поэтому здесь не приводится.

Если число k_1 максимально возможное, т.е. $k_1 = k - r$, то в матрице $A_3 = \|A_3^{(ij)}\|_1^3$ (см. (18)) блоки $A_3^{(11)}$, $A_3^{(12)}$, $A_3^{(21)}$ размеров $(k - r) \times (k - r)$, $(k - r) \times (2r - k)$, $(2r - k) \times (k - r)$ соответственно можно считать нулевыми. Для доказательства этого факта достаточно обратиться к системе (4), положив

$$\begin{aligned} A_1 = B_1 &= [E_r \oplus 0_{k-r}], & A_2 = B_2 &= [[E_{k-r} \setminus 0_{2r-k}] \setminus E_{k-r}], & A_3 &= \|A_3^{(ij)}\|_1^3, \\ B_3 &= \begin{Bmatrix} 0_{k-r} & 0_{k-r, 2r-k} & A_3^{(13)} \\ 0_{2r-k, k-r} & A_3^{(22)} & A_3^{(23)} \\ A_3^{(31)} & A_3^{(32)} & A_3^{(33)} \end{Bmatrix}, & & & (19) \\ X_1 = X_2 &= E_k, & X_3 &= \|X_3^{(ij)}\|_1^3, \end{aligned}$$

где $X_3^{(13)} = A_3^{(11)}$, $X_3^{(23)} = A_3^{(21)}$, $X_3^{(32)} = A_3^{(12)}$ и все остальные блоки $X_3^{(ij)}$ нулевые. Применяя теперь к коэффициентам B_1 , B_2 , B_3 блока $B(x)$ матрицы (2) предложение 3, находим, что для матрицы B_3 (19) матрица

$$\begin{vmatrix} A_3^{(22)} & A_3^{(23)} \\ A_3^{(32)} & A_3^{(33)} - E_{k-r} \end{vmatrix}$$

неособенная, а на основании предложения 1 можно получить, что форма Жордана блока $A_3^{(33)}$ является инвариантом пары (N_1, N_2) относительно подобия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Если в наших предположениях $(k_1 = k - r)$ в матрице (19) $\det(A_3^{(33)} - E_{k-r}) \neq 0$, то в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ полускалярно эквивалентных матриц существует матрица вида (6), где

$$\begin{aligned} \bar{B}(x) = & [E_r \oplus 0_{k-r}]x + [[E_{k-r} \setminus 0_{2r-k}] \setminus E_{k-r}]x^2 \\ & + \begin{vmatrix} 0_{k-r} & 0_{k-r, 2r-k} & 0_{k-r} \\ 0_{2r-k, k-r} & J_2 & 0_{2r-k, k-r} \\ G & 0_{k-r, 2r-k} & J_1 \end{vmatrix} x^3. \end{aligned}$$

Здесь матрицы J_1 , J_2 имеют жорданову форму, а пара $(G, J_1 - E_{k-r})$ строгую форму. Матрицы J_1 , J_2 определяются однозначно. Если, кроме того, матрица $J_1 - E_{k-r}$ не имеет взаимно обратных и равных ± 1 собственных значений, то $G = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложения 1 (условия а), d)) аналогично доказательству предложения 10.

Рассмотрим теперь прямо противоположную ситуацию, когда число k_1 минимально возможное, т.е. $k_1 = 0$. Тогда матрица $A(x)$ из (1) может быть взята в виде

$$A(x) = [E_r \oplus 0_{k-r}]x + [[0_{2r-k} \oplus E_{k-r}] \setminus E_{k-r}]x^2 + \|A_3^{(ij)}\|_1^3 x^3. \quad (20)$$

Здесь разбиение на блоки коэффициента при x^3 соответствует разбиению коэффициента при x^2 . Из предложения 1 нетрудно получить, что ранг блока $A_3^{(33)}$ порядка $k - r$ матрицы $\|A_3^{(ij)}\|_1^3$ является инвариантом пары (N_1, N_2) относительно подобия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Если $r = 2k/3$ и ранг блока $A_3^{(33)}$ матрицы $\|A_3^{(ij)}\|_1^3$ из (20) является полным, то в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ полускалярно эквивалентных матриц существует, притом единственная, матрица вида (6), где

$$\bar{B}(x) = [E_r \oplus 0]x + [[0 \oplus E] \setminus E]x^2 + [[J \setminus 0] \oplus E]x^3, \quad (21)$$

все блоки 0 , E квадратные порядка $k/3$, J – жорданова матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование. Если коэффициентами A_1 , A_2 , A_3 уравнений системы (4) являются соответствующими коэффициентами матрицы $A(x)$ вида (20) и в этой системе

$$B_1 = A_1, \quad B_2 = A_2, \quad B_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_3^{(13)} \\ A_3^{(21)} & 0 & A_3^{(23)} \\ A_3^{(31)} & A_3^{(32)} & A_3^{(33)} \end{vmatrix}, \quad (22)$$

то непосредственной проверкой убеждаемся, что этой системе удовлетворяют решения

$$X_1 = X_2 = E_k, \quad X_3 = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & A_3^{(12)} \\ 0 & 0 & A_3^{(22)} \\ A_3^{(11)} & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

Это согласно предложению 1 доказывает возможность приведения матрицы (1), где блок $A(x)$ имеет вид (20), к матрице (2), где в позиции блока $B(x)$ стоит матричный многочлен с указанными выше коэффициентами B_1, B_2, B_3 . Умножением такой матрицы $B(x)$ слева и справа соответственно на матрицы

$$[E \oplus (A_3^{(33)})^{-1} \oplus (A_3^{(33)})^{-1}], \quad [E \oplus (A_3^{(33)}) \oplus E]$$

можно достичь того, что в позиции блока $A_3^{(33)}$ коэффициента B_3 (см. (22)) будет находиться единичная матрица E . При этом изменения претерпят лишь ненулевые блоки матрицы B_3 , а матрицы-коэффициенты B_1, B_2 не изменятся. Чтобы не вводить новых обозначений будем считать, что в матрице B_3 $A_3^{(33)} = E$. Далее убеждаемся в правильности следующей конгруэнции:

$$\begin{aligned} & \left([E_r \oplus 0]x + [[0 \oplus E] \setminus E]x^2 + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ A_3^{(21)} - A_3^{(23)} A_3^{(31)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{array} \right\| x^3 \right) \\ & \times \left\| \begin{array}{ccc} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ A_3^{(31)} & A_3^{(32)} + A_3^{(23)} & E \end{array} \right\| - \left\| \begin{array}{ccc} E & 0 & -A_3^{(13)} - A_3^{(31)} \\ 0 & E & -A_3^{(23)} \\ 0 & 0 & E \end{array} \right\| \\ & \times \left([E_r \oplus 0]x + [[0 \oplus E] \setminus E]x^2 + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & A_3^{(13)} \\ A_3^{(21)} & 0 & A_3^{(23)} \\ A_3^{(31)} & A_3^{(32)} & E \end{array} \right\| x^3 \right) \\ & + \left([E_r \oplus 0]x + [[0 \oplus E] \setminus E]x^2 + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ A_3^{(21)} - A_3^{(23)} A_3^{(31)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{array} \right\| x^3 \right) \\ & \times \left\| \begin{array}{ccc} -A_3^{(31)} & -A_3^{(32)} - A_3^{(23)} - A_3^{(13)} - A_3^{(31)} & -A_3^{(31)} A_3^{(32)} \\ 0 & -A_3^{(23)} & -A_3^{(23)} A_3^{(32)} \\ -(A_3^{(13)} + A_3^{(31)}) A_3^{(31)} & -A_3^{(13)} A_3^{(32)} & 0 \end{array} \right\| \\ & \times \left([E_r \oplus 0]x + [[0 \oplus E] \setminus E]x^2 + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & A_3^{(13)} \\ A_3^{(21)} & 0 & A_3^{(23)} \\ A_3^{(31)} & A_3^{(32)} & E \end{array} \right\| x^3 \right) \equiv 0 \pmod{x^4}. \end{aligned}$$

Согласно предложению 1 это значит, что в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ полускалярно эквивалентных матриц существует матрица вида (6) с матрицей

$$[E_r \oplus 0]x + [[0 \oplus E] \setminus E]x^2 + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ A_3^{(21)} - A_3^{(23)} A_3^{(31)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \end{array} \right\| x^3$$

в позиции блока $\overline{B}(x)$. Приведение полученной матрицы к матрице указанного в предложении вида не вызывает сомнений.

Единственность. Если в классе $\{CN(x)Q(x)\}$ кроме матрицы (6) с блоком $\overline{B}(x)$ вида (21) существует другая матрица вида (6) с блоком

$$[E_r \oplus 0]x + [[0 \oplus E] \setminus E]x^2 + [[J_1 \setminus 0] \oplus E]x^3$$

в позиции $\overline{B}(x)$, то на основании предложения 1 можно получить, что матрицы J , J_1 подобны. Следовательно, на самом деле, имеем $J = J_1$.

Этим мы завершаем изучение ситуации, когда в условиях предложения 6 блок $A_2^{(22)}$ матрицы (7) является нулевым. Если $0 < \text{rank } A_2^{(22)} < k - r$, то применяемые здесь методы не приводят к столь прозрачным результатам, как в рассмотренных выше случаях.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. З. Шаваровский, “Полная система инвариантов пары матриц четного порядка со специальной формой Смита ее характеристической матрицы относительно подобия”, *Матем. заметки*, **73**:6 (2003), 923–941.
- [2] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, “Неразложимые представления группы Лоренца”, *УМН*, **23**:2 (1968), 3–60.
- [3] Л. А. Назарова, А. В. Ройтер, В. В. Сергейчук, В. М. Бондаренко, “Применение модулей над диадой для классификации конечных p -групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p , и n пар взаимно аннулирующих операторов”, *Записки. науч. сем. ЛОМИ*, **28** (1972), 69–72.
- [4] В. М. Бондаренко, “Представления диэдральных групп над полем характеристики 2”, *Матем. сб.*, **96** (138):1 (1975), 63–74.
- [5] S. Friedland, “Simultaneous similarity of matrices”, *Adv. Math.*, **50**:3 (1983), 189–265.
- [6] Р. М. Булатович, “Одновременное приведение симметрической и кососимметрической матриц к каноническому виду”, *Мат. Цире Гор.*, **8** (1997), 33–36.
- [7] Х. Д. Икрамов, “Об одновременной приводимости к блочно-треугольному виду пар косых проекторов”, *ЖВМ и МФ*, **38**:2 (1998), 181–182.
- [8] Х. Д. Икрамов, “Об одном критерии квазидиагонализуемости вещественных матриц”, *ЖВМ и МФ*, **40**:1 (2000), 6–20.
- [9] G. R. Belitskii, “Normal form in matrix spaces”, *Integral Equations Operator Theory*, **38**:3 (2000), 251–283.
- [10] V. V. Sergeichuk, “Canonical matrices for linear matrix problem”, *Linear Algebra Appl.*, **317**:1–3 (2000), 53–102.
- [11] В. В. Сергейчук, “Классификационные задачи для систем форм и линейных отображений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:6 (1987), 1170–1190.
- [12] Б. З. Шаваровский, “Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований”, *Матем. заметки*, **64**:5 (1998), 769–782.
- [13] Б. З. Шаваровский, “Каноническая форма многочленной матрицы с одним элементарным делителем относительно полускалярно эквивалентных преобразований”, *Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки*, 1988, № 10, 32–35.
- [14] П. С. Казімірський, *Розклад матричних многочленів на множники*, Наукова думка, Київ, 1981.
- [15] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.

Б. З. Шаваровский

Институт прикладных проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, г. Львов

Поступило

30.07.2004