Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Привалов, Приближение $1/x$ полиномами на $[-1, -a] \cup [a, 1]$, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 472–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:08:46

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Приближение $1/x$ полиномами на $[-1, -a] \cup [a, 1]$

И. А. Привалов

Известна (см., например, [1], [2]) роль, которую играет в численных методах решение задачи о наилучшем приближении функции $1/(x - a)$ многочленами. Целью работы является нахождение многочлена, наименее уклоняющегося от функции $1/x$ на $[-1, -a] \cup [a, 1]$ в равномерной метрике. Так как $1/x$ на этих отрезках нечетная функция, то задача ставится так:

$$\left\| \frac{1}{x} - (a_1x + a_3x^3 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1}) \right\|_{C([-1, -a] \cup [-a, 1])} \rightarrow \min. \quad (1)$$

Следующий результат принадлежит С.Н. Бернштейну (см., например, [2]):

ТЕОРЕМА 1. Пусть дан многочлен

$$w(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right) \left(1 - \frac{x}{b_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{b_{2q}}\right),$$

положительный в замкнутом интервале $[-1, 1]$ (степень $w(x)$ будет нечетной, если взять $b_{2q} = \infty$). Пусть

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right), & |v| \leq 1, \\ b_k &= \frac{1}{2} \left(c_k + \frac{1}{c_k} \right), & |c_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, 2q, \\ \Omega(v) &= \prod_{k=1}^{2q} \sqrt{v - c_k}, & L_m = \frac{1}{2^{m-1}} \prod_{k=1}^{2q} \sqrt{1 + c_k^2}, \quad m > q. \end{aligned}$$

Тогда

$$T_m(x; w) = \frac{L_m}{2} \left(v^{2q-m} \frac{\Omega(1/v)}{\Omega(v)} + v^{2m-q} \frac{\Omega(v)}{\Omega(1/v)} \right) \sqrt{w(x)}, \quad m \geq q, \quad (2)$$

является многочленом степени m со старшим коэффициентом 1 и

$$\min_{A_k} \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_m|}{\sqrt{w(x)}} = L_m,$$

причем экстремальный многочлен есть $T_m(x; w)$.

Перейдем к решению задачи (1).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00060.

ТЕОРЕМА 2. Экстремальным многочленом в задаче (1) будет многочлен вида

$$P_{2n+1}^*(x) = \frac{1}{x} - \frac{T_{n+1}\left(\frac{2x^2 - (1+a^2)}{1-a^2}t\right)}{xT_{n+1}(b_1)} = \frac{T_{n+1}(b_1) - T_{n+1}\left(\frac{2x^2 - (1+a^2)}{1-a^2}\right)}{xT_{n+1}(b_1)},$$

где $T_{n+1}(x)$ – многочлен (2) с $q = 1$, $b_1 = (a^2 + 1)/(a^2 - 1)$, $b_2 = \infty$.

Для доказательства теоремы вначале сделаем замену $t = x^2$. Тогда задача (1) перейдет в равносильную

$$\left\| \frac{1 - (a_1 t + a_3 t^2 + \dots + a_{2n+1} t^{n+1})}{\sqrt{t}} \right\|_{C([a^2, 1])} \rightarrow \min. \quad (3)$$

Пусть a_{2n+1}^* – коэффициент при старшей степени в решении задачи (3). Поделим (3) на a_{2n+1}^* и осуществим отображение

$$t = \frac{a^2 + 1}{2} + \frac{1 - a^2}{2}y,$$

переходящее от $t \in [a^2, 1]$ к $y \in [-1, 1]$. Тогда получим на $[-1, 1]$ равносильную задачу

$$|a_{2n+1}^*| \frac{((1-a^2)/2)^{n+1}}{\sqrt{(1+a^2)/2}} \left\| \frac{y^{n+1} + \alpha_1 y^n + \dots + \alpha_{n+1}}{\sqrt{1-y(a^2-1)/(1+a^2)}} \right\|_{C([-1, 1])} \rightarrow \min.$$

Мы можем найти коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$, поскольку решение этой задачи описывает теорема 1. Подсчитав коэффициенты

$$\frac{((1-a^2)/2)^{n+1}}{\sqrt{(1+a^2)/2}} \quad \text{и} \quad a_{2n+1}^*,$$

получим утверждение теоремы.

Заметим, что

$$T_{n+1}(b_1) - T_{n+1}\left(\frac{2x^2 - (1+a^2)}{1-a^2}\right)$$

при $x = 0$ обращается в 0; следовательно,

$$\frac{T_{n+1}(b_1) - T_{n+1}\left(\frac{2x^2 - (1+a^2)}{1-a^2}\right)}{xT_{n+1}(b_1)}$$

является многочленом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] F. Steven, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **12**:4 (1991), 766–789. [2] В. И. Лебедев, *Функциональный анализ и вычислительная математика*, ВИНТИ, М., 1994. [3] Н. И. Ахизер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.

И. А. Привалов

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: vanecka@mail.ru

Поступило
28.09.2006