Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Лебедев, О теореме Ботта–Бореля–Вейля, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 474–477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3689>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 17:09:03

О теореме Ботта–Бореля–Вейля

А. Лебедев

1. Введение. Основное поле – $\mathbb{C}$, и все рассматриваемые пространства конечномерны. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ – ее максимальная нильпотентная алгебра, а M – неприводимый $\mathfrak{g}$ -модуль. Известная теорема Ботта–Бореля–Вейля (ББВ) утверждает, что

$$\dim H^i(\mathfrak{n}; M) = \text{card}(\{w \in W \mid l(w) = i\}), \quad (1)$$

где W – группа Вейля алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а $l(w)$ – длина элемента w (определения см. в [1]). В частности, размерность (1) не зависит от M . Перечисление применений теоремы ББВ в физике и математике можно найти, например, в [2]; см. также [3].

Попытки описать когомологии алгебры $\mathfrak{n}$ с коэффициентами в $\mathfrak{n}$ -модулях немногочисленны. Обзор таких попыток и обобщение этих результатов см. в статье Толпыго [4].

В двух случаях: когда модуль M – либо (а) тривиальный, либо (б) присоединенный, описание когомологий в духе ББВ выглядит (и является) недостаточным. Действительно, в этих случаях пространство $H^\bullet = \bigoplus H^i(\mathfrak{n}; M)$ естественным образом снабжено (в случае (а)) структурой суперкоммутативной супералгебры или (в случае (б)) супералгебры Ли, напоминающей супералгебру Ли, заданную скобкой Нийенхейса.

Даже если мы знаем все размерности (1), это не описывает умножение в алгебре. Кроме того, даже в случаях, которые рассмотрел Толпыго, эти размерности (1) не описаны достаточно явно, за исключением $i \leq 3$. В случае (б) явное умножение было недавно предложено для нескольких простых алгебр и супералгебр Ли $\mathfrak{g}$ в [5], [6]. Общего ответа нет, каждый случай – исключительный.

Наша исходная цель была описать алгебру $H^\bullet = \bigoplus H^i$ в терминах образующих и определяющих соотношений для тривиального модуля $M = \mathbb{C}$. Однако такое описание может быть слишком сложным. Вычисления показывают, что, по крайней мере в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(r+1)$, минимальное число образующих составляет существенную часть от размерности всей алгебры, и многие из этих образующих имеют высокую степень, а стало быть, такое описание малополезно.

Однако если элементы базиса алгебры $H^\bullet(\mathfrak{n}; \mathbb{C})$ достаточно явно описаны в терминах группы Вейля, элементами которой они пронумерованы, то более сложное описание в терминах образующих и соотношений может быть просто не нужно для вычислительных целей (например, коммутаторов матричных единиц в $\mathfrak{gl}(n)$ достаточно, чтобы описать умножение, в то время как описание в терминах образующих Шевалле [1], [7], Джекобсона–Грозмана–Лейтеса [8], [9] или Сильвестра–т’Хуфта [10], хотя и требуется в некоторых задачах, гораздо более замысловато). Ниже мы проясним алгебраическую структуру в $H^\bullet(\mathfrak{n}; \mathbb{C})$ и опишем, с точностью до знака, структуру суперкоммутативной супералгебры в этом пространстве, порожденном элементами группы Вейля.

2. Результаты. Опишем когомологии с коэффициентами в тривиальном модуле для максимальной нильпотентной подалгебры любой простой конечномерной алгебры Ли.

Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ – ее подалгебра Картана, а Δ – система корней алгебры $\mathfrak{g}$ относительно $\mathfrak{h}$. Пусть Δ^+ и Δ^- – множества положительных и отрицательных корней; пусть $\mathfrak{n}^+$ и $\mathfrak{n}^-$ – соответствующие максимальные нильпотентные подалгебры в $\mathfrak{g}$. Пусть $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+\}$ – базис в $\mathfrak{n}^+$ такой, что вектор e_α имеет вес α относительно $\mathfrak{h}$, и пусть $\{f^\alpha \mid \alpha \in \Delta^+\}$ – двойственный базис. Тогда при любых $\alpha, \beta \in \Delta^+$ имеем

$$[e_\alpha, e_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}, & \text{где } N_{\alpha\beta} \in \mathbb{C} \prec \{0\}, \quad \text{если } \alpha + \beta \in \Delta^+, \\ 0, & \text{если } \alpha + \beta \notin \Delta^+. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть W – группа Вейля, а $\prec$ – любое полное упорядочение на W . Для любого элемента $v \in W$ положим

$$\Delta_v = \Delta^+ \cap v\Delta^- = \{\alpha \in \Delta^+ \mid v^{-1}(\alpha) < 0\}, \quad (3)$$

$$C_v = \bigwedge_{\alpha \in \Delta_v} f^\alpha, \quad (4)$$

где порядок сомножителей в (4) задан упорядочением $\prec$. Заметим, что если $v_1 \neq v_2$, то C_{v_1} и C_{v_2} непропорциональны. Заметим также, что, поскольку длина элемента группы Вейля равна числу отрицательных корней, которые он переводит в положительные, то степень элемента C_v равна длине элемента v .

ЛЕММА 2.1. *Множество $\{C_v \mid v \in W\}$ является базисом в $H^\bullet(\mathfrak{n}; \mathbb{C})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы назовем ненулевую коцепь *базисной*, если ее можно представить в виде произведения каких-то элементов f^α . Поскольку элементы C_v являются базисными коцепями, не пропорциональными друг другу, они линейно независимы.

Напомним определения дифференциала в коцепном комплексе: для данной алгебры Ли L , ее модуля V и для любых $e \in V$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L^*$ полагают

$$d(e \otimes \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = de \wedge \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n + \sum_{k=1}^n (-1)^k e \otimes \varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k \wedge \dots \wedge \varphi_n, \quad (5)$$

где $de \in V \otimes L^* = \text{Hom}(L, V)$ и $d\varphi \in \wedge^2 L^* = \text{Hom}(\wedge^2 L, \mathbb{C})$ определены следующим образом:

$$de(x) = xe, \quad d\varphi(x, y) = \varphi([x, y]) \quad \text{для всех } x, y \in L. \quad (6)$$

Поскольку мы рассматриваем коцепи с коэффициентами в тривиальном модуле, получаем упрощенное выражение

$$d(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_k \wedge \dots \wedge \varphi_n. \quad (7)$$

Из формулы (2) выводим, что

$$df^\alpha = \sum_{\{\beta \in \Delta^+ \mid \alpha - \beta \in \Delta^+; \beta \prec \alpha - \beta\}} N_{\beta, \alpha - \beta} f^\beta \wedge f^{\alpha - \beta}. \quad (8)$$

Мы видим, таким образом, что любая базисная коцепь, которая появляется в дифференциале dc базисной коцепи c с ненулевым коэффициентом, может быть получена заменой некоторого f^α в c на $f^\beta \wedge f^{\alpha - \beta}$ для некоторого веса $\beta \in \Delta^+$ такого, что $\alpha - \beta \in \Delta^+$ (и, возможно, умножением на -1). Но согласно определениям (3) и (4) для таких весов α , β и любого элемента $v \in W$, если коцепь C_v содержит f^α , то она содержит также, по крайней мере, один из элементов f^β или $f^{\alpha - \beta}$ (поскольку в противном случае $v^{-1}(\beta) > 0$, $v^{-1}(\alpha - \beta) > 0$ и, следовательно, $v^{-1}(\alpha) > 0$, поэтому C_v не может содержать f^α). Поэтому никакая базисная коцепь не может появиться с ненулевым коэффициентом в dC_v , и $dC_v = 0$.

Аналогично, при любых $v \in W$ и $\alpha, \beta \in \Delta^+$ таких, что $\alpha - \beta \in \Delta^+$, если коцепь C_v не содержит f^α , то она не может содержать одновременно f^β и $f^{\alpha - \beta}$ (в противном случае $v^{-1}(\beta) < 0$, $v^{-1}(\alpha - \beta) < 0$, поэтому $v^{-1}(\alpha) < 0$, а следовательно, C_v содержит f^α). Поэтому C_v не может появиться с ненулевым коэффициентом в дифференциале коцепи. Итак, никакая нетривиальная линейная комбинация элементов C_v не является кограницей.

По теореме ББВ $\dim H^\bullet(\mathfrak{n}; \mathbb{C}) = \text{card}(W)$. Поэтому $\{C_v \mid v \in W\}$ действительно задают базис в $H^\bullet(\mathfrak{n}; \mathbb{C})$.

ЛЕММА 2.2. *Для любых $v_1, v_2 \in W$ выполняется в точности одно из следующих двух условий:*

- 1) $C_{v_1} \wedge C_{v_2} = \pm C_v$ для некоторого $v \in W$;
- 2) $C_{v_1} \wedge C_{v_2}$ является кограницей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что эти два условия не могут выполняться одновременно, поскольку элементы C_v не являются кограницами.

Раз C_{v_1} и C_{v_2} – базисные коцепи, то $C_{v_1} \wedge C_{v_2}$ – это либо 0 (а стало быть, кограница), либо базисная коцепь. Предположим, что $C_{v_1} \wedge C_{v_2}$ – базисная коцепь, не равная $\pm C_v$ ни для какого $v \in W$. Тогда ее можно представить в виде

$$C_{v_1} \wedge C_{v_2} = \sum_{v \in W} a(v) C_v + B \quad \text{для некоторых } a(v) \in \mathbb{C}, \quad B \in B^\bullet(n; \mathbb{C}).$$

Поскольку, как показано в доказательстве предыдущей леммы, ни одна из коцепей C_v не входит с ненулевым коэффициентом в разложение какой-либо кограницы по базисным коцепям, мы видим, что коэффициент при C_v в разложении по базисным коцепям равен $a(v)$ в правой части равенства и равен 0 в левой части. Поэтому все $a(v)$ равны 0 и $C_{v_1} \wedge C_{v_2} = B \in B^\bullet(n; \mathbb{C})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Для любого элемента $v \in W$ имеем

- 1) вес коцепи C_v равен $vr - \rho$;
- 2) любой элемент из $C^\bullet(n; \mathbb{C})$ того же веса, что и C_v , пропорционален C_v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По определению (4) вес элемента C_v равен

$$\begin{aligned} - \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap v\Delta^-} \alpha &= \frac{1}{2} \left(- \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap v\Delta^-} \alpha + \sum_{\alpha \in \Delta^- \cap v\Delta^+} \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(- \sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus v\Delta^+} \alpha + \sum_{\alpha \in v\Delta^+ \setminus \Delta^+} \alpha \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha \in v\Delta^+} \alpha - \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(v \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha - \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha \right) = vr - \rho. \end{aligned}$$

2) Это утверждение неявно содержится в [4]. В настоящий момент я не могу предложить независимого и короткого доказательства.

Поскольку вес – аддитивная функция на внешних произведениях, мы доказали следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Если $C_{v_1} \wedge C_{v_2} = \pm C_v$ для некоторых $v, v_1, v_2 \in W$, то

$$(v_1\rho - \rho) + (v_2\rho - \rho) = vr - \rho, \quad \text{т.е.} \quad v_1\rho + v_2\rho = vr + \rho.$$

Итак, из этого утверждения и предложения 2.3 мы получаем следующий закон умножения базисных элементов в $H^\bullet(n; \mathbb{C})$:

- 1) если при некоторых $v_1, v_2 \in W$ не существует элемента $v \in W$ такого, что $vr = v_1\rho + v_2\rho - \rho$, то $C_{v_1} \wedge C_{v_2} = 0$;
- 2) если такой элемент v существует, то

$$C_{v_1} \wedge C_{v_2} = \begin{cases} \pm C_v, & \text{если не существует веса } \alpha \in \Delta^+ \text{ такого, что} \\ & v_1^{-1}\alpha < 0 \text{ и } v_2^{-1}\alpha < 0 \text{ (т.е. если } C_{v_1} \wedge C_{v_2} \neq 0), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Неопределенность знаков в этом правиле выглядит неудовлетворительно – было бы хорошо найти другой базис C'_v такой, что $C'_v = \pm C_v$ для всех $v \in W$ (для разных v знаки могут различаться), и простой алгоритм для выяснения, равно ли

$C'_{v_1} \wedge C'_{v_2}$ элементу C'_v или $-C'_v$ в случае, когда $C_{v_1} \wedge C_{v_2} = \pm C_v$. К сожалению, эта неопределенность, похоже, неизбежна (разумеется, всегда возможно вычислить коцепи C_{v_1} , C_{v_2} и C_v и непосредственно найти нужный знак, но такой способ нельзя назвать достаточно простым). Этот алгоритм мог бы иметь следующий вид: для некоего полного упорядочения $<$ на W , совместимого с упорядочением по длине, если $C_{v_1} \wedge C_{v_2} = \pm C_v$ и $v_1 < v_2$, то $C'_{v_1} \wedge C'_{v_2} = C'_v$. Это, однако, невозможно даже для мономиального базиса алгебры Грассмана $\Lambda(n)$ при $n \geq 3$, а если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ достаточно велика (например, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(r+1)$ при $r \geq 5$), то $H^\bullet(\mathfrak{n}; \mathbb{C})$ содержит подсупералгебру, изоморфную $\Lambda(3)$.

В качестве примера применения правила умножения рассмотрим $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(r+1)$. В этом случае группа Вейля изоморфна группе S_{r+1} перестановок целых чисел от 0 до r . Мы получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.5. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(r+1)$ имеем

- 1) если для $s_1, s_2 \in S_{r+1}$ множество $\{s_1^{-1}(i) + s_2^{-1}(i) - i \mid 0 \leq i \leq r\}$ не совпадает с множеством всех целых чисел от 0 до r , то $C_{s_1} \wedge C_{s_2} = 0$;
- 2) в противном случае положим

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & r \\ s_1^{-1}(0) + s_2^{-1}(0) & s_1^{-1}(1) + s_2^{-1}(1) - 1 & \cdots & s_1^{-1}(r) + s_2^{-1}(r) - r \end{pmatrix}^{-1}.$$

Если существуют целые числа i, j такие, что $0 \leq i < j \leq r$, $s_1^{-1}(i) > s_1^{-1}(j)$ и $s_2^{-1}(i) > s_2^{-1}(j)$, то $C_{s_1} \wedge C_{s_2} = 0$; в противном случае $C_{s_1} \wedge C_{s_2} = \pm C_s$.

В качестве еще одного примера рассмотрим алгебры Ли ранга 2: B_2 и G_2 (мы уже рассмотрели алгебру A_2 в предыдущем примере). В этих случаях таблица умножения устроена просто:

- $C_v \wedge C_{v'} = 0$, если $v' \neq -v$ (как линейные преобразования пространства $\mathfrak{h}^*$);
 $C_v \wedge C_{-v} = \pm C_{-\text{id}}$.

Автор благодарен Институту математики им. М. Планка (г. Лейпциг) и Международной научной школе им. М. Планка за финансовую поддержку, а также Дмитрию Лейтесу, поставившему задачу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, Гл. 7–8: Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли, Мир, М., 1978. [2] P. Woit, *Differential geometric methods in theoretical physics. Physics and geometry* (Davis, CA, 1988), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., **245**, eds. C. Ling-Lie, W. Nahm, Plenum, New York, 1990, 533–545; *Quantum field theory and representation theory: a sketch*, [arXiv:hep-th/0206135](#). [3] P. Grozman, D. Leites, *The nonholonomic Riemann and Weyl tensors for flag manifolds*, [arXiv:math.DG/0509399](#). [4] A. Tolpygo, *Homology Homotopy Appl.*, **6**:1 (2004), 59–85. [5] A. Lebedev, D. Leites, I. Shereshevskii, *Lie Groups and Invariant Theory*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **213**, ed. É. Vinberg, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 157–172; [arXiv:math.KT/0404139](#). [6] P. Grozman, D. Leites, *Czech. J. Phys.*, **51**:1 (2001), 1–22; [arXiv:hep-th/9702073](#). [7] P. Grozman, D. Leites, *Czech. J. Phys.*, **54**:11 (2004), 1313–1319; [arXiv:math.RT/0509469](#). [8] P. Grozman, D. Leites, *Contemporary Mathematical Physics*, F. A. Berezin memorial volume, Amer. Math. Soc. Transl. (2), **175**, eds. R. Dobrushin, R. Minlos, M. Shubin, and A. Vershik, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 57–67; [arXiv:math-ph/0510013](#). [9] Д. Лейтес, А. Сепреев, *ТМФ*, **123**:2 (2000), 205–236; [arXiv:math.RT/0509528](#). [10] К. Заксе, *ТМФ*, **149**:1 (2006), 3–17.

А. Лебедев

Нижегородский государственный
 университет им. Н. И. Лобачевского
 E-mail: yorool@mail.ru

Поступило

20.09.2006

Исправленный вариант

24.10.2006