Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Пугачев, Пространство простых конфигураций является польским, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 581–589

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 12:24:03

УДК 517

ПРОСТРАНСТВО ПРОСТЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ЯВЛЯЕТСЯ ПОЛЬСКИМ

О. В. Пугачев

В работе доказывается, что пространство конфигураций без кратных точек на гладком римановом многообразии, наделенное слабой топологией, является польским; приводится критерий предкомпактности множества в этом пространстве.

Библиография: 13 названий.

В 1990-е годы возрос интерес к анализу в пространствах конфигураций на римановых многообразиях (см., например, [1]–[7]). Пространства конфигураций представляют собой интересный пример бесконечномерных многообразий, относительно простых в описании и обладающих разнообразными аналитическими и геометрическими свойствами. Меры на этих пространствах также представляют большой интерес (см. [8]–[10]).

Есть два подхода к описанию пространства конфигураций: можно допускать конфигурации с кратными точками или же рассматривать только простые конфигурации, т.е. не имеющие кратных точек. Пространство конфигураций с кратными точками обладает более простыми геометрическими и топологическими свойствами. В частности, известно, что оно является польским со слабой топологией (см. [4]), т.е. его слабая топология задается метрикой, относительно которой оно полно и сепарабельно. В то же время пространство без кратных точек оказывается более удобным для физических приложений (поскольку в одной точке не могут находиться одновременно несколько частиц), и на нем удобно строить диффузионные процессы (см. [11]).

Цель данной работы – доказать, что пространство конфигураций без кратных точек также является польским (это свойство весьма важно в теории мер, см. [12, гл. 1]). Кроме того, выводится критерий предкомпактности множества в этом пространстве.

1. Топология и метрика пространства конфигураций. Пусть M – некомпактное связное полное локально компактное метрическое пространство (например, риманово многообразие конечной размерности). Через $\text{dist}_M(x, y)$ будем обозначать расстояние между точками $x, y \in M$ в полной метрике на M , в которой всякое ограниченное множество предкомпактно. Обозначим через $C_0(M)$ класс непрерывных функций на M с компактными носителями, а через $C_0(U)$ будем обозначать класс функций $\varphi \in C_0(M)$ таких, что $\text{supp } \varphi \subset \text{Int } U$, $U \subset M$.

Если $A \subset M$, то через 1_A будем обозначать индикаторную функцию:

$$1_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пространство $\hat{\Gamma}$ конфигураций с кратными точками на M состоит из натуральнозначных σ -конечных мер γ на M таких, что $\gamma(A) < \infty$ для любого компакта $A \subset M$. Иначе говоря, γ имеет вид

$$\gamma = \sum_{i=1}^N k_i \delta_{x_i}, \quad N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \quad x_i \in M, \quad k_i \in \mathbb{N},$$

где k_i – кратность точки x_i , δ_{x_i} – мера Дирака, сосредоточенная в x_i , и последовательность $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ не имеет предельных точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Слабой топологией на $\hat{\Gamma}$ будем называть топологию σ , порожденную функциями вида

$$\langle \varphi, \gamma \rangle = \int \varphi(x) \gamma(dx), \quad \varphi \in C_0(M), \quad (1)$$

т.е. стандартные окрестности в этой топологии имеют вид

$$U = \{\gamma: |\langle \varphi_j, \gamma - \gamma_o \rangle| < \varepsilon, j = 1, \dots, m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \varphi_j \in C_0(M). \quad (2)$$

Известно, что пространство $\hat{\Gamma}$ со слабой топологией является польским, т.е. гомеоморфно полному сепарабельному метрическому пространству. Для удобства дальнейших рассуждений приведем доказательство этого факта.

Зафиксируем точку $o \in M$. Будем обозначать

$$B_r = \{x \in M: \text{dist}_M(o, x) \leq r\}.$$

Для любых $R > r > 0$ существует функция $\theta_r^R \in C_0(M)$ такая, что $1_{B_r} \leq \theta_r^R \leq 1_{B_R}$.

ЛЕММА 1.3. Слабая топология на $\hat{\Gamma}$ порождается счетным набором функций вида (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $R > 0$ класс функций $C_0(B_R)$ является сепарабельным относительно равномерной сходимости, следовательно, существуют функции $\psi_{R,1}, \psi_{R,2}, \dots \in C_0(B_R)$ такие, что любая функция $f \in C_0(B_R)$ равномерно приближается ими на B_R . Продолжим эти функции на все M , положив $\psi_{R,j} = 0$ вне B_R .

Возьмем счетный набор функций

$$\{\theta_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\psi_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}}.$$

Тогда топология τ , порожденная функциями $\langle \theta_n^{n+1}, \gamma \rangle$ и $\langle \psi_{n,k}, \gamma \rangle$, совпадает со слабой топологией σ . Достаточно доказать, что τ не слабее σ , т.е. что в любой σ -окрестности любой конфигурации γ_o содержится τ -окрестность γ_o . Пусть

$$U = \{\gamma: |\langle \varphi_j, \gamma - \gamma_o \rangle| < 1, j = 1, \dots, m\}, \quad \varphi_j \in C_0(M).$$

Выберем такое n , что $\text{supp } \varphi_j \subset B_n, j = 1, \dots, m$. Для каждого номера j найдем функцию ψ_{n,k_j} такую, что

$$\sup_{x \in B_n} |\psi_{n,k_j}(x) - \varphi_j(x)| < \frac{1/3}{\langle \theta_n^{n+1}, \gamma_o \rangle + 1}.$$

Возьмем τ -окрестность γ_o вида

$$U_0 = \{\gamma: |\langle \theta_n^{n+1}, \gamma - \gamma_o \rangle| < 1\} \cap \left\{ |\langle \psi_{n,k_j}, \gamma - \gamma_o \rangle| < \frac{1}{3}, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Тогда для каждой $\gamma \in U_0$ и $j = 1, \dots, m$ мы имеем

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_j, \gamma - \gamma_o \rangle| &\leq |\langle \psi_{n,k_j}, \gamma - \gamma_o \rangle| + \langle |\varphi_j - \psi_{n,k_j}|, \gamma_o \rangle + \langle |\varphi_j - \psi_{n,k_j}|, \gamma \rangle \\ &< \frac{1}{3} + \frac{1/3}{\langle \theta_n^{n+1}, \gamma_o \rangle + 1} (\gamma_o(B_n) + \gamma(B_n)) \\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{1/3}{\langle \theta_n^{n+1}, \gamma_o \rangle + 1} (\langle \theta_n^{n+1}, \gamma_o \rangle + \langle \theta_n^{n+1}, \gamma \rangle) < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $U_0 \subset U$.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Существует метрика ρ , задающая топологию $\sigma = \tau$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенумеруем функции, задающие топологию τ :

$$\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty = \{\theta_n^{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\psi_{n,k}\}_{n,k \in \mathbb{N}}.$$

Положим

$$\rho(\gamma, \zeta) = \sum_{i=1}^\infty \min\{2^{-i}; |\langle \varphi_i, \gamma - \zeta \rangle|\}.$$

Легко проверить, что ρ является метрикой и задает сходимость в топологии τ .

ТЕОРЕМА 1.5. *Пространство $\hat{\Gamma}$ с метрикой ρ является полным и сепарабельным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность в $(\hat{\Gamma}, \rho)$. Для любых $R > r > 0$ существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \theta_r^R, \gamma_k \rangle =: M_r^R$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $M_n^{n+1} \leq M_{n+2}^{n+3}$.

(а) Если $M_{n+2}^{n+3} - M_n^{n+1} < 1$, то найдется единственное целое число N_n такое, что $M_n^{n+1} \leq N_n \leq M_{n+2}^{n+3}$, и поскольку

$$\langle \theta_n^{n+1}, \gamma_k \rangle \leq \gamma_k(B_{n+1}) \leq \langle \theta_{n+2}^{n+3}, \gamma_k \rangle \quad \forall k,$$

то существует такой номер K_n , что $\gamma_k(B_{n+1}) = N_n$ при $k \geq K_n$. Положим $R_n := n + 1$.

(б) Если $M_{n+2}^{n+3} - M_n^{n+1} \geq 1$, то выберем $l > M_{n+2}^{n+3} - M_n^{n+1}$, $l \in \mathbb{N}$, и рассмотрим следующие $l + 2$ функций из класса $C_0(M)$:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &:= \theta_n^{n+1}; \\ \varphi_j &:= \theta_{n+1+(j-1)/l}^{n+1+j/l}, \quad j = 1, \dots, l; \\ \varphi_{l+1} &:= \theta_{n+2}^{n+3}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\varphi_j \leq 1_{B_{n+1+j/l}} \leq \varphi_{j+1}$. Тогда найдется такое j , $0 \leq j \leq l$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_{j+1}, \gamma_k \rangle - \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_j, \gamma_k \rangle < 1,$$

и, повторив рассуждения из пункта (а), найдем $R_n := n + 1 + j/l$ и целое

$$N_n \in \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_j, \gamma_k \rangle; \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_{j+1}, \gamma_k \rangle \right]$$

такие, что с некоторым K_n для всех $k \geq K_n$ выполнено равенство $\gamma_k(B_{R_n}) = N_n$.

Поскольку это рассуждение проходит для всех $n \in \mathbb{N}$, мы получаем последовательность шаров

$$B_{R_1} \subset B_{R_2} \subset \dots, \quad R_n \rightarrow \infty,$$

таких, что

$$\exists K_n: \quad \forall k \geq K_n \quad \gamma_k(B_{R_n}) = N_n.$$

При каждом R_n локальные конфигурации $\gamma_k|_{B_{R_n}}$, $k \geq K_n$, можно рассматривать как точки компакта $B_{R_n}^{N_n}/S_{N_n}$, где S_{N_n} обозначает группу перестановок N_n элементов. Из любой подпоследовательности $\{\gamma_{k_i}|_{B_{R_n}}\}_{i=1}^\infty$ можно выбрать подпоследовательность $\{\gamma_{k_{i_j}}|_{B_{R_n}}\}_{j=1}^\infty$, сходящуюся на $B_{R_n}^{N_n}/S_{N_n}$ к некоторой N_n -точечной (точки всегда считаются с учетом кратности) конфигурации $\gamma^{(n)}$ на B_{R_n} . При этом разные подпоследовательности будут давать одну и ту же предельную конфигурацию $\gamma^{(n)}$. Действительно, если $\gamma_i^*|_{B_{R_n}} \rightarrow \gamma^{(n)}$, $\gamma_i^{**}|_{B_{R_n}} \rightarrow \zeta$ и $\zeta \neq \gamma^{(n)}$, то найдется функция $\varphi \in C_0(M)$ с носителем на B_{R_n} такая, что $\langle \varphi, \gamma^{(n)} \rangle \neq \langle \varphi, \zeta \rangle$, откуда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle \varphi, \gamma_i^* \rangle \neq \lim_{i \rightarrow \infty} \langle \varphi, \gamma_i^{**} \rangle,$$

что противоречит фундаментальности $\{\gamma_k\}$ по ρ , поскольку функция $\langle \varphi, \cdot \rangle$ непрерывна по ρ . Отсюда следует, что вся последовательность $\{\gamma_k|_{B_{R_n}}\}_{k=K_n}^\infty$ сходится к $\gamma^{(n)}$. Очевидно, что при $m > n$ $\gamma^{(m)} \geq \gamma^{(n)}$. Возьмем предел возрастающих мер

$$\gamma_o := \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^{(n)}.$$

Мера γ_o является σ -конечной и принимает натуральные значения; ее носитель не имеет предельных точек, так как любой компакт $A \subset M$ вложен в некоторый шар B_{R_n} , на котором γ_o конечна. Следовательно, $\gamma_o \in \hat{\Gamma}$. Легко проверить, что $\langle \varphi, \gamma_k \rangle \rightarrow \langle \varphi, \gamma_o \rangle$ при всех $\varphi \in C_0(M)$.

(ii) Пусть S – счетное плотное подмножество M . Рассмотрим счетное множество $\mathcal{S}$ конечных конфигураций на S . Зафиксируем $\gamma_o \in \hat{\Gamma}$ и функции φ_j , $j = 1, \dots, m$, задающие окрестность вида (2). Пусть

$$\Omega := \bigcup_{j=1}^m \text{supp } \varphi_j, \quad N := \gamma_o(\Omega).$$

Пусть $\delta < \varepsilon (N \sup_{1 \leq j \leq m} |\nabla \varphi_j|)^{-1}$. Можно найти N -точечную конфигурацию γ' на $\Omega \cap S$ такую, что

$$\forall x \in \text{supp } \gamma_o \cap \Omega \quad \exists x' \in \text{supp } \gamma': \quad \text{dist}_M(x, x') < \delta$$

и кратности точек x в γ_o и x' в γ' совпадают. Тогда

$$|\langle \varphi_j, \gamma' - \gamma_o \rangle| < \delta N \sup_{1 \leq j \leq m} |\nabla \varphi_j| < \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пространство Γ простых конфигураций M есть подмножество $\widehat{\Gamma}$, задаваемое условием

$$\Gamma = \{\gamma \in \widehat{\Gamma}: \forall x \in M \quad \gamma(\{x\}) \leq 1\}.$$

На Γ будем рассматривать ту же слабую топологию σ , которая по-прежнему может быть задана метрикой ρ . Но (Γ, ρ) уже не является полным метрическим пространством, поскольку существует ρ -фундаментальная последовательность конфигураций из Γ , сходящаяся к конфигурации с кратной точкой. Однако пространство может быть полным по одной метрике и не полным по другой, даже если обе метрики задают одну и ту же топологию.

ПРИМЕР. Пусть $X = (-\pi/2; \pi/2)$. Рассмотрим две метрики, задающие обычную сходимость:

$$d_1(x, y) = |x - y|; \quad d_2(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|.$$

Относительно d_1 пространство X неполно, а относительно d_2 оно полно, поскольку функция tg осуществляет его изометрическую биекцию на пространство $\mathbb{R}$, наделенное метрикой d_1 .

Докажем, что пространство Γ со слабой топологией также является польским. Введем на Γ функции

$$h_n(\gamma) = \sum_{x, y \in \operatorname{supp} \gamma, x \neq y} \frac{\theta_n^{n+1}(x) \theta_n^{n+1}(y)}{\operatorname{dist}_M(x, y)}.$$

Эта величина конечна, так как γ имеет конечное число точек на $\operatorname{supp} \theta_n^{n+1} \subset B_{n+1}$.

ЛЕММА 1.7. (i) Функция h_n слабо непрерывна на Γ .

(ii) Если последовательность конфигураций $\{\gamma_k\}$ слабо сходится к $\gamma_o \in \widehat{\Gamma} \setminus \Gamma$, причем γ_o имеет кратную точку в B_n , то $h_n(\gamma_k) \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Зафиксируем $\gamma_o \in \Gamma$. Пусть

$$l := \min_{x, y \in B_{n+1} \cap \operatorname{supp} \gamma_o} \operatorname{dist}_M(x, y), \quad N := \gamma_o(B_{n+1}),$$

$\operatorname{dist}_M(\operatorname{supp} \gamma_o \setminus B_{n+1}, B_{n+1}) =: 2\delta$. Поскольку в B_{n+2} лежит конечное число точек γ_o , мы имеем $\delta > 0$. Возьмем $\varepsilon \in (0; \min\{\delta, l/3\})$. Зафиксируем функции

$$\varphi_\varepsilon^y \in C_0(M), \quad 1_{\{y\}} \leq \varphi_\varepsilon^y \leq 1_{\{\operatorname{dist}_M(y, \cdot) < \varepsilon\}}, \quad (3)$$

и рассмотрим функцию

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{y \in B_{n+1} \cap \operatorname{supp} \gamma_o} \varphi_\varepsilon^y.$$

Тогда $\langle \varphi_\varepsilon^y, \gamma_o \rangle = 1$, $\langle \varphi_\varepsilon, \gamma_o \rangle = N$. Если

$$\gamma \in U_\varepsilon := \left\{ |\langle \varphi_\varepsilon, \gamma \rangle - N| < \frac{1}{2}, \quad |\langle \theta_{n+1+\delta}^{n+1+2\delta}, \gamma \rangle - N| < \frac{1}{2} \right\} \\ \cap \left\{ |\langle \varphi_\varepsilon^y, \gamma \rangle - 1| < \frac{1}{2} \quad \forall y \in B_{n+1} \cap \operatorname{supp} \gamma_o \right\},$$

то $\gamma(B_{n+1+\delta}) = N$ и при этом

$$\forall x \in \operatorname{supp} \gamma_o \cap B_{n+1} \quad \exists! x' \in \operatorname{supp} \gamma \cap B_{n+1+\delta}: \quad \operatorname{dist}_M(x, x') < \varepsilon.$$

Для любых $x, y \in \text{supp } \gamma_o \cap B_{n+1}$ и соответствующих им $x', y' \in \text{supp } \gamma$ мы имеем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\theta_n^{n+1}(x')\theta_n^{n+1}(y')}{\text{dist}_M(x', y')} - \frac{\theta_n^{n+1}(x)\theta_n^{n+1}(y)}{\text{dist}_M(x, y)} \right| \\ & < \frac{|\theta_n^{n+1}(x') - \theta_n^{n+1}(x)| + |\theta_n^{n+1}(y') - \theta_n^{n+1}(y)|}{l - 2\varepsilon} + \left(\frac{1}{l - 2\varepsilon} - \frac{1}{l} \right) \\ & \leq \frac{2 \sup |\nabla \theta_n^{n+1}| \varepsilon}{l/3} + \frac{2\varepsilon}{l(l/3)} = C(\gamma_o, n)\varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|h_n(\gamma) - h_n(\gamma_o)| < \frac{N(N-1)}{2} C(\gamma_o, n)\varepsilon.$$

Построив окрестности U_ε при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, получаем непрерывность h_n в γ_o .

(ii) Пусть последовательность $\{\gamma_k\}$ слабо сходится к $\gamma_o \in \hat{\Gamma} \setminus \Gamma$; пусть $x_o \in B_n$ — кратная точка γ_o , т.е. $\gamma_o(\{x_o\}) \geq 2$. При сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ таком, что

$$\sup_{B_{n+\varepsilon}} \theta_n^{n+1} \geq \frac{1}{2},$$

возьмем функцию $\varphi_\varepsilon^{x_o}$ вида (3); тогда $\langle \varphi_\varepsilon^{x_o}, \gamma_k \rangle \rightarrow \langle \varphi_\varepsilon^{x_o}, \gamma_o \rangle \geq 2$, откуда следует, что при всех k , начиная с некоторого $K(\varepsilon)$, выполняется оценка

$$\gamma_k \{ \text{dist}_M(x, x_o) \leq \varepsilon \} \geq \langle \varphi_\varepsilon^{x_o}, \gamma_k \rangle > 3/2,$$

следовательно, $\gamma_k \{ \text{dist}_M(x, x_o) \leq \varepsilon \} \geq 2$, т.е. ε -окрестность точки x_o содержит хотя бы две точки x и y конфигурации γ_k и, поскольку эти точки лежат в шаре $B_{n+\varepsilon}$, получаем оценку

$$h_n(\gamma_k) \geq \frac{\theta_n^{n+1}(x)\theta_n^{n+1}(y)}{\text{dist}_M(x, y)} \geq \frac{(1/2)(1/2)}{2\varepsilon} = \frac{1}{8\varepsilon}.$$

ТЕОРЕМА 1.8. *На пространстве Γ существует метрика ρ_1 со следующими свойствами:*

- (i) метрика ρ_1 задает топологию σ ;
- (ii) пространство (Γ, ρ_1) полно;
- (iii) пространство (Γ, ρ_1) сепарабельно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на Γ метрику

$$\rho_1(\gamma, \zeta) := \rho(\gamma, \zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} \min\{2^{-n}, |h_n(\gamma) - h_n(\zeta)|\}.$$

(i) Докажем, что топология, задаваемая метрикой ρ_1 , не сильнее слабой топологии (задаваемой метрикой ρ). Пусть $\rho(\gamma_m, \gamma_o) \rightarrow 0$, $\gamma_m, \gamma_o \in \Gamma$. Поскольку функции h_n непрерывны по ρ на Γ , мы получаем $|h_n(\gamma_m) - h_n(\gamma_o)| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ для любого $n \in \mathbb{N}$, откуда следует $\rho_1(\gamma_m, \gamma_o) \rightarrow 0$.

(ii) Пусть $\gamma_m \in \Gamma$ и последовательность $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна по ρ_1 . Тогда $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна и по ρ , и в силу полноты $(\hat{\Gamma}, \rho)$ существует конфигурация $\gamma_o \in \hat{\Gamma}$ такая, что $\rho(\gamma_m, \gamma_o) \rightarrow 0$. Если $\gamma_o \in \Gamma$, то в силу пункта (i) мы получим

$\rho_1(\gamma_m, \gamma_o) \rightarrow 0$, что и требовалось доказать. Если же $\gamma_o \notin \Gamma$, то в силу пункта (ii) леммы 1.7 существует $n \in \mathbb{N}$, при котором $h_n(\gamma_m) \rightarrow +\infty$, откуда вытекает, что существует подпоследовательность $\{\gamma_{m_i}\}$ такая, что $|h_n(\gamma_{m_{i+1}}) - h_n(\gamma_{m_i})| > 1$. Следовательно, $\rho_1(\gamma_{m_{i+1}}, \gamma_{m_i}) \geq 2^{-n}$, что противоречит предположению о фундаментальности $\{\gamma_m\}$ по ρ_1 .

(iii) Пусть S – счетное плотное подмножество M . Рассмотрим счетное множество $\mathcal{S}_1$ конечных конфигураций на S без кратных точек. Зафиксируем $\gamma_o \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти конечную конфигурацию γ_n^ε на $S \cap B_n$ без кратных точек такую, что

$$\forall x \in \text{supp } \gamma_o \cap B_n \quad \exists! x' \in \text{supp } \gamma_n^\varepsilon: \quad \text{dist}_M(x, x') < \varepsilon.$$

Построим последовательность конфигураций $\{\gamma_n^{1/n}\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}_1$. Докажем, что они слабо сходятся к γ_o (следовательно, по доказанному пункту (i) они сходятся и по метрике ρ_1). Действительно, пусть $\varphi \in C_0(M)$, $\text{supp } \varphi \subset B_n$, $\sup |\nabla \varphi| = c$, $\gamma_o(B_n) = N$. Тогда при $m \geq n$ мы имеем

$$|\langle \varphi, \gamma_m^{1/m} - \gamma \rangle| \leq \sum_{x \in \text{supp } \gamma_o \cap B_n} |\varphi(x') - \varphi(x)| \leq N \frac{1}{m} c \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

2. Компактность в пространстве конфигураций.

ТЕОРЕМА 2.1. *Чтобы подмножество Q пространства $\hat{\Gamma}$ было предкомпактным в слабой топологии, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: для любого компакта $A \subset M$*

$$\sup_{\gamma \in Q} \gamma(A) < \infty. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть A – компактное подмножество M . Существует функция $\varphi \in C_0(M)$ такая, что $\varphi \geq 1_A$. Поскольку функция $\langle \varphi, \cdot \rangle$ слабо непрерывна на $\hat{\Gamma}$, она ограничена на Q . Следовательно,

$$\sup_{\gamma \in Q} \gamma(A) \leq \sup_{\gamma \in Q} \langle \varphi, \gamma \rangle < \infty.$$

Достаточность. Пусть (4) выполнено хотя бы для шаров $B_1, B_2, B_3, \dots$. Рассмотрим множество

$$K = \{\gamma \in \hat{\Gamma}: \gamma(B_n) \leq N_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}, \quad (5)$$

где $N_n = \sup_{\gamma \in Q} \gamma(B_n)$. Тогда $K \supset Q$. Докажем, что K – компакт в слабой топологии. Пусть $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ – последовательность конфигураций из K . Поскольку $\{\gamma_j(B_1)\}_{j=1}^\infty$ принимает лишь значения $0, 1, \dots, N_1$, хотя бы одно из этих значений, скажем k_1 , встречается бесконечно много раз. Среди тех γ_j , при которых $\gamma_j(B_1) = k_1$, выберем подпоследовательность $\{\gamma_i^1\}_{i=1}^\infty$ такую, что локальные конфигурации $\gamma_i^1|_{B_1}$ сходятся к некоторой k_1 -точечной конфигурации γ^1 на B_1 .

Повторяя эту процедуру для шаров $B_2, B_3, \dots$, построим подпоследовательности

$$\{\gamma_i^1\}_{i=1}^\infty \supset \{\gamma_l^2\}_{l=1}^\infty \supset \{\gamma_m^3\}_{m=1}^\infty \supset \dots$$

такие, что $\{\gamma_m^n|_{B_n}\}_{m=1}^\infty$ слабо сходится к некоторой конфигурации γ^n на B_n . Очевидно, что $\gamma_n \leq \gamma_{n+1}$. Наконец, выберем диагональную подпоследовательность $\{\gamma_n^n\}_{n=1}^\infty$. Она слабо сходится к конфигурации $\gamma_o = \sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n \in K$: действительно, если $\varphi \in C_0(M)$, то найдется n такое, что $\text{supp } \varphi \subset B_n$ и при $m \geq n$

$$\langle \varphi, \gamma_m^m \rangle = \langle \varphi, \gamma_m^m|_{B_n} \rangle \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \langle \varphi, \gamma^n \rangle = \langle \varphi, \gamma_o \rangle.$$

Таким образом, множество K компактно.

ТЕОРЕМА 2.2. *Чтобы подмножество Q пространства Γ было предкомпактным в слабой топологии, необходимо и достаточно выполнения условия: для любого компакта $A \subset M$ выполнены (4) и*

$$\inf_{\gamma \in Q} \min_{x, y \in \text{supp } \gamma \cap A} \text{dist}_M(x, y) > 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Поскольку Q предкомпактно в Γ по метрике ρ_1 , оно имеет конечную ε -сеть относительно ρ_1 (следовательно, и относительно ρ) при любом $\varepsilon > 0$. Следовательно, Q предкомпактно в $(\hat{\Gamma}, \rho)$, откуда в силу теоремы 2.1 вытекает (4). Теперь предположим, что нарушено условие (6) для некоторого компакта $A \subset M$. Пусть $A \subset B_n$. Тогда существует последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty \subset Q$ такая, что

$$\forall k \quad \exists x_k, y_k \in \text{supp } \gamma_k \cap B_n: \quad \text{dist}_M(x_k, y_k) < \frac{1}{k}.$$

Следовательно,

$$h_n(\gamma_k) \geq \frac{\theta_n^{n+1}(x_k)\theta_n^{n+1}(y_k)}{\text{dist}_M(x_k, y_k)} > k,$$

что приводит к противоречию, так как функция h_n слабо непрерывна на Γ по лемме 1.7 и должна быть ограниченной на предкомпактном множестве $Q \subset \Gamma$.

Достаточность. Пусть выполнены условия (4) и (6) хотя бы для компактов $B_n, n = 1, 2, \dots$. Обозначим

$$N_n := \sup_{\gamma \in Q} \gamma(B_n), \quad l_n := \inf_{\gamma \in Q} \min_{x, y \in \text{supp } \gamma \cap B_n} \text{dist}_M(x, y)$$

и рассмотрим множество

$$K_1 = \left\{ \gamma \in \Gamma: \gamma(B_n) \leq N_n, \quad \min_{x, y \in \text{supp } \gamma} \frac{\text{dist}_M(x, y)}{\theta_n^{n+1}(x)\theta_n^{n+1}(y)} \geq l_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Очевидно, что $K_1 \supset Q$. Докажем, что K_1 компактно в слабой топологии. Поскольку K_1 содержится в компакте K , заданном формулой (5), из любой последовательности $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty \subset K_1$ можно выбрать подпоследовательность $\{\gamma_{(i)}\}_{i=1}^\infty \subset K_1$, слабо сходящуюся к некоторой конфигурации $\gamma_o \in K$. Но если $\gamma_o \in K \setminus K_1$, то при некотором n найдутся такие $x, y \in \text{supp } \gamma_o$, что

$$\theta_n^{n+1}(x) \geq \theta_n^{n+1}(y) > 0 \quad \text{и} \quad (\theta_n^{n+1}(x)\theta_n^{n+1}(y))^{-1} \text{dist}_M(x, y) < l_n.$$

Тогда найдется $\varepsilon \in (0; \text{dist}_M(x, y)/2)$, при котором справедлива следующая оценка: если $\text{dist}_M(z, x) < \varepsilon$, $\text{dist}_M(w, y) < \varepsilon$, то $(\theta_n^{n+1}(z)\theta_n^{n+1}(w))^{-1} \text{dist}_M(z, w) < l_n$. Но, используя функции $\varphi_\varepsilon^x, \varphi_\varepsilon^y$ вида (3), мы обнаружим, что существует $J \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $i \geq J$ конфигурация $\gamma_{(i)}$ содержит точки z_i и w_i такие, что $\text{dist}_M(z_i, x) < \varepsilon$, $\text{dist}_M(w_i, y) < \varepsilon$, что приводит к противоречию с предположением $\gamma_{(i)} \in K_1$. Таким образом, $\gamma_o \in K_1$ и слабая компактность множества K_1 , содержащего Q , доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Неотрицательная мера μ на топологическом пространстве X называется *радоновской*, если для любого множества $A \subset X$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ компактно}\}.$$

ТЕОРЕМА 2.4. *Любая вероятностная мера на Γ , как и на $\hat{\Gamma}$, является радоновской относительно слабой топологии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что на польском пространстве всякая вероятностная мера является радоновской (см. [12, гл. 1, теорема 1.4] или [13, гл. I, предложение 1.5]).

Автор благодарит профессора В. И. Богачева за постановку интересной задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Albeverio S., Daletskii A., Lytvynov E. Laplace operators on differential forms over configuration spaces // J. Geom. Phys. (to appear).
- [2] Bichteler K., Gravereaux J. B., Jacod J. Malliavin Calculus for Processes with Jumps: Gordon & Breach Sci. Publ., 1987.
- [3] Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А., Смородина Н. В. Локальные свойства распределений стохастических функционалов. М.: Физматлит, 1995.
- [4] Röckner M. Stochastic analysis on configuration spaces: Basic ideas and recent results // New Directions in Dirichlet Forms. Studies in Advanced Math. V. 8. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1998.
- [5] Röckner M., Schmuland B. A support property for infinite-dimensional interacting diffusion processes // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. 1998. V. 326. P. 359–364.
- [6] Смородина Н. В. Дифференциальное исчисление в пространстве конфигураций и устойчивые меры. I // Теор. вероятн. и прилож. 1988. Т. 33. С. 522–534.
- [7] Смородина Н. В. Формула Остроградского–Гаусса для пространства конфигураций // Теор. вероятн. и прилож. 1990. Т. 35. № 4. С. 725–736.
- [8] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces // J. Funct. Anal. 1998. V. 154. № 2. P. 444–500.
- [9] Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M. Analysis and geometry on configuration spaces: the Gibbsian case // J. Funct. Anal. 1998. V. 157. № 1. P. 242–291.
- [10] Bogachev V. I., Pugachev O. V., Röckner M. Surface measures and tightness of capacities on Poisson space // J. Funct. Anal. (to appear).
- [11] Ma Zhi-Ming, Röckner M. Construction of diffusions on configuration spaces // Osaka J. Math. 2000. V. 37. P. 273–314.
- [12] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [13] Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.

Московский государственный технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступило
09.11.2000
Исправленный вариант
01.06.2001