Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Парастатистики и общая теорема теории вероятностей в приложении к безрисковым вложениям, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 3, 478–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 13:17:46

Парастатистики и общая теорема теории вероятностей в приложении к безрисковым вложениям

В. П. Маслов

Общая теорема, которая доказывается аналогично [1], может быть сформулирована для произвольных случайных величин x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, $R \geq x_i \geq 0$, R – любое число.

Поскольку для x_i задается также ограничение сверху, вместо формулы Бозе-Эйнштейна мы используем формулы парастатистики [2].

Пусть задана монотонная возрастающая последовательность $\{\lambda_i\}_1^n$, $i = 1, 2, \dots, n$, и задана “размерность” $-\infty < D < \infty$, и, следовательно, задана последовательность чисел

$$\mu_i = \frac{\rho_i(D)}{\min_{1 \leq i \leq n} \rho_i(D)}, \quad \text{где} \quad \rho_i(D) = \frac{\Gamma(D-1+i)}{\Gamma(D)\Gamma(i)},$$

Γ – гамма-функция. Предположим, что

$$Q = \sum_{i=1}^n \mu_i \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Введем константы α, β, σ и E , удовлетворяющие соотношениям

$$E \leq \frac{1}{Q} \sum_{i=D+1}^n \lambda_i \mu_i,$$

$$\frac{1}{Q} \sum_{i=D+1}^n \lambda_i \left\{ \frac{\mu_i}{e^{\beta \lambda_i + \sigma} - 1} - \frac{(R+1)\mu_i}{e^{(\beta \lambda_i + \sigma)(R+1)} - 1} \right\} = E,$$

$$\frac{1}{Q} \sum_{i=D+1}^n \left\{ \frac{\mu_i}{e^{\beta \lambda_i + \sigma} - 1} - \frac{(R+1)\mu_i}{e^{(\beta \lambda_i + \sigma)(R+1)} - 1} \right\} = \alpha.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть задана область изменения случайных величин $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$, $R \geq x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, дополнительно следующими соотношениями:

$$\frac{1}{Q} \sum_{i=D+1}^n \lambda_i x_i \mu_i \leq E, \tag{1}$$

$$\frac{1}{Q} \sum_{i=D+1}^n x_i \mu_i = \alpha. \tag{2}$$

Предполагаем, что все наборы $\{\lambda_i x_i \mu_i\}_1^n$, отвечающие различным наборам $\{x_i\}_1^n$, $R \geq x_i \geq 1$, равновероятны, т.е. такие наборы $\{\lambda_i x_i \mu_i\}_1^n$ равномерно распределены в области, заданной условиями (1) и (2). Тогда

$$P\left(\left[\frac{1}{Q} \sum_{i=s_1}^{s_2} x_i \mu_i - \frac{1}{Q} \sum_{i=s_1}^{s_2} \left\{ \frac{\mu_i}{e^{\beta \lambda_i + \sigma} - 1} - \frac{(R+1)\mu_i}{e^{(\beta \lambda_i + \sigma)(R+1)} - 1} \right\}\right] \geq Q^{-1/4+\varepsilon}\right) \leq e^{-Q^{1/4-\varepsilon}},$$

где s_1, s_2 – любые целые числа, удовлетворяющие неравенствам $D+1 \leq s_1 < s_2 \leq n$, $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало.

Эту теорему можно применить к безрисковому распределению вложений (о задаче об операционных рисках см. [3], а также [4]).

Специфика задачи состоит в том, что предприятия, в которые инвестор хочет сделать вложения, задаются заранее. Возможно, из политических соображений, или из соображений доходности, или из общих экономических стратегий заранее задаются $A_1, A_2, \dots, A_s$ предприятий, где s достаточно велико. Кроме того, инвестор же устанавливает порядок приоритетов среди этих предприятий: предприятия A_i более перспективные, чем предприятия A_{i-1} . Вложение в наиболее приоритетное предприятие A_s должно быть ограничено сверху, а в наименее приоритетное предприятие A_1 – снизу. Эти ограничения указывает инвестор и указывает также бюджетное ограничение и ограничение вида (3).

В остальном же нужно разложить деньги по этим предприятиям так, чтобы операционный риск был минимальным.

В решении этой задачи мы будем придерживаться концепции “отсутствия интеллекта” (zero intelligence) для финансовых рынков.

Поэтому если мы найдем наибольшее “скопление” вариантов для нашей задачи, которые равновероятны в силу принципа “отсутствия интеллекта”, то именно такое разложение будет наименее опасным, безрисковым.

Пусть согласно условию величина C_i (безразлично, в какой валюте) вложения в i -е предприятие удовлетворяет соотношению

$$C_i + R \geq C_{i+1} \geq C_i, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad C_s = M, \quad C_1 = K, \quad (3)$$

причем M и K заданы. Отсюда

$$C_s - C_1 = M - K. \quad (4)$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^s C_i \leq C_s s.$$

Поэтому бюджетное ограничение Φ удовлетворяет соотношению

$$sK \leq \sum_{i=1}^s C_i \leq \Phi \leq Ms, \quad (5)$$

т.е. при этом естественном неравенстве для бюджетного ограничения Φ

$$\sum_{i=1}^s C_i \leq \Phi. \quad (6)$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^s C_i \equiv \sum_{i=2}^s (s-i)(C_i - C_{i-1}) + C_1 s \leq \Phi.$$

Отсюда

$$\sum_{i=2}^s (s-i)(C_i - C_{i-1}) \leq \Phi - Ks. \quad (7)$$

Обозначим

$$n_i = C_i - C_{i-1}, \quad \lambda_i = s - i. \quad (8)$$

Отсюда

$$\sum_{j=2}^i n_j = C_i - C_1. \quad (9)$$

Мы получаем

$$\sum_{i=2}^s n_i \lambda_i \leq \Phi - Ks. \quad (10)$$

Обозначим $\Phi' = \Phi - Ks$.

Рассмотрим множество всех $\{n_i\}$ таких, что

$$\sum_{i=2}^s n_i \lambda_i \leq \Phi'. \quad (11)$$

Поскольку все наборы $\{C_i\}$ равновероятны при условиях (3) и (4), откуда следует, что значения

$$n_i = C_i - C_{i-1}, \quad i = 2, \dots, s,$$

удовлетворяющие равенству

$$\sum_{i=2}^s n_i = M - K, \quad (12)$$

равновероятны при условии $R \geq n_i \geq 0$ и условии (11).

ТЕОРЕМА 2. Число вариантов $\{n_i\}$, $i = 2, \dots, s$, таких, что выполнено (11), и для которых

$$\left| C_i - C_1 - \sum_{j=2}^i \left\{ \frac{1}{e^{\beta(s-j)-\sigma} - 1} - \frac{R+1}{e^{\beta(R+1)(s-j)-(R+1)\sigma} - 1} \right\} \right| \geq s^{1/4+\varepsilon}$$

меньше, чем $(s/L)^{-d}$, где d – любое число, L – общее число вариантов, σ – константа, $i > \varepsilon s$, ε сколь угодно мало.

Константы σ и β находятся из условий

$$M - K = \sum_{j=2}^s \left\{ \frac{1}{e^{\beta(s-j)-\sigma} - 1} - \frac{R+1}{e^{\beta(R+1)(s-j)-(R+1)\sigma} - 1} \right\}, \quad (13)$$

$$\sum_{j=2}^s \left\{ \frac{s-j}{e^{\beta(s-j)-\sigma} - 1} - \frac{(s-j)(R+1)}{e^{\beta(R+1)(s-j)-(R+1)\sigma} - 1} \right\} = \Phi' = \Phi - Ks. \quad (14)$$

Аналогичная теорема доказывается в работах [5]–[7].

СЛЕДСТВИЕ. Безрисковое вложение при условиях (3)–(5) осуществляется, если

$$C_i = C_1 + \sum_{j=2}^i \left\{ \frac{1}{e^{\beta(s-j)-\sigma} - 1} - \frac{R+1}{e^{\beta(R+1)(s-j)-(R+1)\sigma} - 1} \right\}, \quad i > \varepsilon s. \quad (15)$$

Если говорить о реальных вложениях, то условие $i > \varepsilon R$ можно не принимать во внимание, а полагать в формуле (15) $i = 2, \dots, s-1$. Это и будет самая безрисковая ситуация. Однако, если вложения в A_s и A_1 выбраны правильно и приоритеты установлены согласно перспективности, которая ясна инвестору, может быть, лучше, чем рядовому вкладчику, то распределение по формуле (15) дает безрисковый доход.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **81:2** (2007), 251–264. [2] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **64:5** (1998), 791–792. [3] В. П. Маслов, *Докл. РАН*, **411:5** (2006), 591–593. [4] В. П. Маслов, В. В. Вьюгин, *Докл. РАН*, **413:5** (2007). [5] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **12:4** (2005), 483–488. [6] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **80:2** (2006), 220–230. [7] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **14:1** (2007), 31–60.

В. П. Маслов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Поступило

05.02.2002