Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бережной, О подпространствах $C[0, 1]$, состоящих из негладких функций, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 490–495

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 15:59:58

О подпространствах $C[0, 1]$, состоящих из негладких функций

Е. И. Бережной

Для каждого пространства Гёльдера H^ω строится бесконечномерное замкнутое подпространство $G \subset C[0, 1]$, изоморфное l^1 , такое, что для каждой отличной от тождественного нуля функции $x \in G$ ее сужение на множество положительной меры не принадлежит пространству Гёльдера H^ω .

Библиография: 8 названий.

В геометрической теории банаховых пространств гладких функций значительный интерес представляет следующая задача.

ЗАДАЧА А. Пусть задано некоторое банахово пространство гладких функций X . Существует ли бесконечномерное замкнутое подпространство $Y \subset X$ такое, что у каждой отличной от тождественного нуля функции $y \in Y$ гладкость не лучше, чем у самой негладкой функции из X ?

Этим вопросом занимались многие математики [1]–[8]. Последнее достижение для пространства $C[0, 1]$ выглядит следующим образом [6].

Существует замкнутое бесконечномерное подпространство $E \subset C[0, 1]$ такое, что каждая отличная от тождественного нуля функция $x \in E$ не имеет ни в одной точке $(0, 1)$ ни правой, ни левой конечной производной.

В настоящей работе для каждого пространства Гёльдера H^ω строится бесконечномерное замкнутое подпространство $G \subset C[0, 1]$, изоморфное l^1 , такое, что для каждой отличной от тождественного нуля функции $x \in G$ ее сужение на множество положительной меры не принадлежит пространству Гёльдера H^ω . Конечно, результат настоящей работы можно рассматривать как обобщение основного результата [6]. Отметим также, что способ построения $G \subset C[0, 1]$ значительно проще конструкций из [6].

Пусть задано множество $D \subseteq I = [0, 1]$ положительной меры. Для каждой $x: D \rightarrow R$ определим модуль непрерывности x на D следующим образом. Для каждого $h \geq 0$ положим $D_h = \{t \in D : t + h \in D\}$. Тогда *модулем непрерывности* функции x на D будем называть следующую величину

$$\Omega(x, h; D) = \sup_{0 \leq \delta \leq h} \sup_{t \in D_\delta} |x(t + \delta) - x(t)|.$$

Если $D = I$, то вместо $\Omega(x, h; I)$ будем писать $\Omega(x, h)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00206).

Пусть ω есть некоторый модуль непрерывности. Как обычно, через $H^\omega(D)$ обозначим пространство функций, норма в котором задается равенством

$$\|x\|_{H^\omega(D)} = \sup_{t \in D} |x(t)| + \sup_{h \geq 0} \frac{\Omega(x, h; D)}{\omega(h)}.$$

Если $D = I$, то соответствующее пространство обозначается через H^ω .

Ниже нам потребуется одна элементарная лемма из теории меры Лебега на прямой.

ЛЕММА 1. Пусть задано множество положительной меры M . Тогда существует $h_0 > 0$ такое, что при всех h , $|h| \leq h_0$, в множестве M найдется точка t такая, что $t - h, t + h \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой леммы легко получить, рассматривая точки плотности множества M .

ТЕОРЕМА 1. Зафиксируем пространство Гёльдера H^ω . Существует замкнутое бесконечномерное подпространство $G \subset C[0, 1]$, изоморфное l^1 , такое, что для каждой отличной от тождественного нуля функции $x \in G$ ее сужение на любое множество положительной меры не принадлежит $H^\omega(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конструкция пространства G основана на использовании следующего построения.

Для $t \in [0, 1]$ положим $\varphi_0(t) = 1/4 - |t - 1/2|$ и доопределим функцию φ_0 на всю ось периодически с периодом единица. Выберем сначала две возрастающие последовательности натуральных чисел $\{l_i\}_{i=1}^\infty$, $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ так, чтобы для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнялись соотношения

$$\sum_{i=1}^k 2^{-l_i + n_i} \leq 2^{-(k+1) + n_{k+1} - l_{k+1}}, \quad (1)$$

$$\sum_{i=k+1}^\infty 2^{-l_i} \leq 2^{-k-4-l_k}, \quad (2)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2^{-l_i}}{\omega(2^{-n_i})} = \infty. \quad (3)$$

Обозначим через p_i i -е простое число и положим $i(k) = (p_i)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Образум функции

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-l_{i(k)}} \varphi_0(2^{n_{i(k)}} t).$$

Из (2) следует, что для всех $i \in \mathbb{N}$ верны неравенства

$$\|\varphi_i\|_{C[0, 1]} \leq 2^{-2} \sum_{k=1}^\infty 2^{-l_{i(k)}} \leq 2^{-2} \sum_{k=2}^\infty 2^{-l_k} \leq 2^{-2} 2^{-n_1 - 4 - l_1} \leq 2^{-8}. \quad (4)$$

Построим еще одну последовательность натуральных чисел $\{m_k\}$, которая будет играть важную роль в построении пространства G . Положим $m_1 = 2$. Пусть построены $m_2, \dots, m_{k-1}$. Выберем $i(k)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$2^{-l_{i(k)}} 2^{n_{i(k)}} \geq 2^k 2^{m_{k-1}}, \quad (5)$$

и положим

$$m_k = 64n_{i(k)}. \quad (6)$$

Очевидно, что верны неравенства

$$m_{k+1} \geq 64m_k. \quad (7)$$

Образует функции $\psi_k(t) = \varphi_k(t) + \varphi_0(2^{m_k}t)$ и положим

$$e_k(t) = \frac{\psi_k(t)}{\|\psi_k|C[0,1]\|}, \quad G = \overline{\text{span}\{e_k(t)\}_{k=1}^\infty}.$$

Покажем, что построенное пространство G удовлетворяет теореме 1. Сначала покажем, что пространство G изоморфно l^1 . Для этого достаточно указать такую константу $c > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого набора чисел $\{a_k\}$ выполнено неравенство

$$\sup_t \left| \sum_{k=1}^n a_k e_k(t) \right| \geq c \sum_{k=1}^n |a_k|. \quad (8)$$

Положим $M_k = \{t : |\varphi_0(2^{m_k}t)| \geq 1/8\}$. Нетрудно увидеть, что M_k состоит из объединения отрезков длины 2^{-m_k-2} , причем из (7) следует, что каждый из отрезков содержит более двух периодов функции $\varphi_0(2^{m_{k+1}}t)$. Поэтому из геометрических соображений легко следует неравенство

$$\sup_t \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_0(2^{m_k}t) \right| \geq \sup_{t \in M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_n} \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_0(2^{m_k}t) \right| \geq \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Из последнего неравенства и (4) получим

$$\begin{aligned} \sup_t \left| \sum_{k=1}^n a_k e_k(t) \right| &\geq \sup_t \left| \sum_{k=1}^n (\varphi_k(t) + \varphi_0(2^{m_k}t)) \frac{a_k}{\|\psi_k|C[0,1]\|} \right| \\ &\geq \sup_t \left| \sum_{k=1}^n \varphi_0(2^{m_k}t) \frac{a_k}{\|\psi_k|C[0,1]\|} \right| - \sup_t \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \frac{a_k}{\|\psi_k|C[0,1]\|} \right| \\ &\geq 2^{-3} \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{\|\psi_k|C[0,1]\|} - 2^{-8} \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{\|\psi_k|C[0,1]\|} \\ &\geq (2^{-3} - 2^{-8}) \sum_{k=1}^n \frac{|a_k|}{\|\psi_k|C[0,1]\|} \geq \frac{2^{-3} - 2^{-8}}{2^{-2} + 2^{-8}} \sum_{k=1}^n |a_k|. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (8) выполнено с $c = (2^{-3} - 2^{-8})/(2^{-2} + 2^{-8})$.

Из (8) и очевидной оценки $2^{-3} \leq \|\psi_k|C[0,1]\| \leq 2^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$, следует, что для доказательства теоремы достаточно убедиться, что для любой функции $x(t) = \sum_{k=i_0}^\infty a_k \psi_k(t)$ со свойствами

$$a_{i_0} \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=i_0}^\infty |a_k| \leq 1 \quad (9)$$

ее сужение на любое множество D положительной меры не принадлежит $H^\omega(D)$.

Зафиксируем множество D положительной меры. При каждом $k \in \mathbb{N}$ положим $h_k = 2^{-(n_{i_0(k)}+4)}$. Согласно лемме 1 можно считать, что для каждого k , начиная

с некоторого k_0 , найдутся три точки $t_0, t_1 = t_0 + h_k, t_{-1} = t_0 - h_k$, принадлежащие множеству D (вообще говоря, t_0 зависит от k).

Сразу же отметим, что найдется индекс $s \in \mathbb{N}$ такой, что верно по крайней мере одно из неравенств

$$(s-1)2^{-n_{i_0(k)}} \leq t_0 < t_1 \leq s2^{-n_{i_0(k)}}, \quad (10)$$

$$(s-1)2^{-n_{i_0(k)}} \leq t_{-1} < t_0 \leq s2^{-n_{i_0(k)}}. \quad (11)$$

Мы будем считать, что выполнено (10). Если нарушается (10) и, следовательно, выполнено (11), то рассуждения аналогичны.

Непосредственно из (6) следует, что при всех $j = k, k+1, k+2, \dots$ выполняются равенства

$$\varphi_0(2^{m_j} t_1) - \varphi_0(2^{m_j} t_0) = 0.$$

Поэтому справедливо представление

$$\begin{aligned} x(t_0) - x(t_1) &= \sum_{j=i_0}^{\infty} a_j \{ \psi_j(t_0) - \psi_j(t_1) \} \\ &= \sum_{j=i_0}^{\infty} a_j \{ \varphi_j(t_0) - \varphi_j(t_1) \} + \sum_{j=i_0}^{k-1} a_j \{ \varphi_0(2^{m_j} t_0) - \varphi_0(2^{m_j} t_1) \} \\ &\quad + \sum_{j=k}^{\infty} a_j \{ \varphi_0(2^{m_j} t_0) - \varphi_0(2^{m_j} t_1) \} \\ &= \sum_{j=i_0}^{\infty} a_j \{ \varphi_j(t_0) - \varphi_j(t_1) \} + \sum_{j=i_0}^{k-1} a_j \{ \varphi_0(2^{m_j} t_0) - \varphi_0(2^{m_j} t_1) \}. \end{aligned}$$

Тогда, используя (1), (2) и (9), получаем соотношение

$$\begin{aligned} |x(t_0) - x(t_1)| &\geq |a_{i_0}| |\varphi_{i_0}(t_0) - \varphi_{i_0}(t_1)| \\ &\quad - \sum_{j=i_0+1}^{\infty} |a_j| |\varphi_j(t_0) - \varphi_j(t_1)| - \sum_{j=i_0}^{k-1} |a_j| |\varphi_0(2^{m_j} t_0) - \varphi_0(2^{m_j} t_1)| \\ &\geq |a_{i_0}| 2^{-l_{i_0(k)}} |\varphi_0(2^{n_{i_0(k)}} t_0) - \varphi_0(2^{n_{i_0(k)}} t_1)| \\ &\quad - |a_{i_0}| \sum_{j \neq k} 2^{-l_{i_0(j)}} |\varphi_0(2^{n_{i_0(j)}} t_0) - \varphi_0(2^{n_{i_0(j)}} t_1)| \\ &\quad - \sum_{j=i_0+1}^{\infty} |a_j| |\varphi_j(t_0) - \varphi_j(t_1)| - \sum_{j=i_0}^{k-1} |a_j| |\varphi_0(2^{m_j} t_0) - \varphi_0(2^{m_j} t_1)| \\ &\geq |a_{i_0}| 2^{-l_{i_0(k)}} |\varphi_0(2^{n_{i_0(k)}} t_0) - \varphi_0(2^{n_{i_0(k)}} t_1)| \\ &\quad - \sum_{j \neq k} 2^{-l_{i_0(j)}} |\varphi_0(2^{n_{i_0(j)}} t_0) - \varphi_0(2^{n_{i_0(j)}} t_1)| - \sum_{j=i_0+1}^{\infty} |\varphi_j(t_0) - \varphi_j(t_1)| \\ &\quad - \sum_{j=i_0}^{k-1} |\varphi_0(2^{m_j} t_0) - \varphi_0(2^{m_j} t_1)| = |a_{i_0}| A_1 - A_2 - A_3 - A_4. \quad (12) \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое отдельно.

Из (5) и (7) следует неравенство

$$A_4 \leq |t_1 - t_0| \sum_{j=i_0}^{k-1} 2^{m_j} \leq 2|t_1 - t_0| 2^{m_{k-1}} \leq 2^{-k-3-l_{i_0(k)}}. \quad (13)$$

Из (1), (2) и того факта, что индексами в суммах представляющих $\varphi_j(t)$ являются степени одного и того же простого числа p_j , следует, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} A_2 + A_3 &\leq \sum_{j \neq k} 2^{-l_{i_0(j)}} |\varphi_0(2^{n_{i_0(j)}} t_0) - \varphi_0(2^{n_{i_0(j)}} t_1)| \\ &\quad + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-l_{i(j)}} |\varphi_0(2^{n_{i(j)}} t_0) - \varphi_0(2^{n_{i(j)}} t_1)| \\ &\leq \sum_{j < i_0(k)} 2^{-l_j} |\varphi_0(2^{n_j} t_0) - \varphi_0(2^{n_j} t_1)| + \sum_{j > i_0(k)} 2^{-l_j} |\varphi_0(2^{n_j} t_0) - \varphi_0(2^{n_j} t_1)| \\ &\leq |t_0 - t_1| \sum_{j < i_0(k)} 2^{-l_j} 2^{n_j} + \frac{1}{2} \sum_{j > i_0(k)} 2^{-l_j} \\ &\leq 2^{-i_0(k)-l_{i_0(k)}-4} + 2^{-k-5-l_{i_0(k)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Поэтому из (12)–(14) получаем

$$|x(t_0) - x(t_1)| \geq |a_{i_0}| A_1 - 2^{-4-l_{i_0(k)}} (2^{-k+1} + 2^{-i_0(k)} + 2^{-k-1}).$$

Поскольку выполнено (10), то $A_1 = 2^{-l_{i_0(k)}-4}$ и, следовательно, выполнено соотношение

$$|x(t_0) - x(t_1)| \geq 2^{-l_{i_0(k)}-4} (|a_{i_0}| - 2^{-k+1} - 2^{-i_0(k)} - 2^{-k-1}).$$

Поэтому

$$\frac{|x(t_0) - x(t_1)|}{\omega(t_1 - t_0)} \geq \frac{2^{-l_{i_0(k)}-4}}{\omega(2^{-n_{i_0(k)}-4})} (|a_{i_0}| - 2^{-k+1} - 2^{-i_0(k)} - 2^{-k-1}).$$

Так как выполнено условие (3), то $x \notin H^\omega(D)$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Зафиксируем пространство Гёльдера H^ω . Существует замкнутое бесконечномерное подпространство $G_0 \subset C[0, 1]$, изоморфное l^1 , такое, что для каждой отличной от тождественного нуля функции $x \in G_0$ в каждой точке $t_0 \in (0, 1)$ справедливы равенства*

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{|x(t_0 + h) - x(t_0)|}{\omega(h)} = \overline{\lim}_{h \rightarrow +0} \frac{|x(t_0 - h) - x(t_0)|}{\omega(h)} = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно положить $G_0 = G$, где пространство G построено выше, и повторить рассуждения из теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. P. Fonf, V. I. Gurariy, M. I. Kadets, “An infinite dimensional subspace of $C[0, 1]$ consisting of nowhere differentiable functions”, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **52**:11–12 (1999), 13–16.
- [2] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, Мир, М., 1965.
- [3] П. П. Петрушев, С. Л. Троянски, “О теореме Банаха–Мазура об универсальности $C[0, 1]$ ”, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **37**:3 (1984), 283–285.
- [4] В. И. Гурарий, “Линейное пространство состоящее из всюду недифференцируемых функций”, *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, **44**:5 (1991), 13–16.
- [5] L. Rodriguez-Piazza, “Every separable Banach space is isometric to a space of continuous nowhere differentiable functions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**:12 (1995), 3649–3654.
- [6] Е. И. Бережной, “Подпространство $C[0, 1]$, состоящее из функций, не имеющих конечных односторонних производных ни в одной точке”, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 348–354.
- [7] Е. И. Бережной, “Подпространство пространства Гёльдера, состоящее из самых негладких функций”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 329–339.
- [8] Е. И. Бережной, “О подпространствах пространств Гёльдера, состоящих из функций минимальной гладкости”, *Докл. РАН*, **399**:4 (2004), 446–449.

Е. И. Бережной

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: ber@uniyar.ac.ru

Поступило

25.03.2006