Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Явление буферности в одном двумерном кусочно-линейном отображении из радиофизики, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 507–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3693>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:42:28

Явление буферности в одном двумерном кусочно-линейном отображении из радиопизики

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Изучается вопрос об аттракторах двумерного отображения

$$(u, v) \rightarrow (v, -(1 - \mu)u - F(v)), \quad F(v) = \begin{cases} q_1 & \text{при } v > 0, \\ 0 & \text{при } v = 0, \\ -q_2 & \text{при } v < 0, \end{cases}$$

где $0 < \mu \ll 1$, $q_1, q_2 > 0$. Данное отображение служит математической моделью автогенератора с релейным усилителем и с отрезком длинной линии без искажений в цепи обратной связи. Устанавливается, что при надлежащем уменьшении параметра μ в рассматриваемой системе сосуществуют устойчивые циклы сколь угодно больших периодов. Показывается также, что при $\mu \rightarrow 0$ общее число этих циклов неограниченно растет, т.е. реализуется явление буферности.

Библиография: 4 названия.

1. Рассмотрим автогенератор, блок-схема которого изображена на рис. 1. Предполагаем, что вольт-амперная характеристика его нелинейного элемента имеет вид, представленный на рис. 2. Считаем, далее, что в цепь обратной связи этого генератора включен отрезок $0 \leq x \leq 1$ длинной линии с равномерно

Рис. 1

Рис. 2

распределенными индуктивностью L , емкостью C , активным сопротивлением R и проводимостью G . Тогда, как показано в [1], математической моделью описанного

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-01004).

генератора служит следующая краевая задача, рассматриваемая на отрезке $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} U_t &= -V_x - \alpha_1 U, & V_t &= -U_x - \alpha_2 V, \\ V|_{x=1} &= \beta_1 U|_{x=1}, & \beta_2 V|_{x=0} + U|_{x=0} + \varphi(KU|_{x=1}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь U , V – нормированные переменные составляющие напряжения и силы тока в линии;

$$\alpha_1 = G\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \alpha_2 = R\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad \beta_1 = \frac{1}{R_{\text{вх}}}\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \beta_2 = R_{\text{вых}}\sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (2)$$

где $R_{\text{вх}}$, $R_{\text{вых}}$ – входное и выходное сопротивления усилителя; $K > 0$ – коэффициент усиления, а функция $\varphi(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ получается из нелинейной характеристики усилителя в результате сдвига рабочей точки A (см. рис. 2) в начало координат. В связи с этим считаем, что $\varphi'(z) > 0$ при всех $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$ и, что самое главное,

$$\begin{aligned} \varphi(z) &\rightarrow q_1 \quad \text{при } z \rightarrow +\infty, & \varphi(z) &\rightarrow -q_2 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty, \\ z\varphi'(z) &\rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (3)$$

где $q_1, q_2 > 0$.

Исследование аттракторов краевой задачи (1) проводилось в ряде работ (см., например, [1]–[3]). Было установлено, что при согласованном уменьшении параметров (2) и увеличении коэффициента усиления K в этой системе происходит неограниченное накапливание устойчивых циклов, т.е. наблюдается явление буферности. Следует отметить, впрочем, что в упомянутых работах была изучена лишь локальная динамика задачи (1) в малой окрестности ее нулевого состояния равновесия. Вопрос же о том, что происходит в ней при существенном увеличении K , когда заведомо перестает работать какая-либо локальная теория, до сих пор оставался открытым. В настоящей статье ответ на этот вопрос удастся получить в случае линии без искажений, т.е. при дополнительном предположении

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0. \quad (4)$$

Анализ автоколебательных процессов в рассматриваемой модели базируется на следующем специальном приеме. Проинтегрируем фигурирующую в (1) линейную систему методом Римана. В результате убеждаемся, что при выполнении равенств (4) любое решение указанной системы, удовлетворяющее линейному граничному условию в точке $x = 1$, имеет вид

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \exp(-\alpha t) \left[h(t - (x - 1)) + \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1} h(t + (x - 1)) \right], \\ V(t, x) &= \exp(-\alpha t) \left[h(t - (x - 1)) - \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1} h(t + (x - 1)) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где $h(t)$ – произвольная непрерывная функция (пока речь идет об обобщенных решениях класса C , хотя в дальнейшем мы расширим этот класс). Подставляя, далее, формулы (5) во второе граничное условие из (1) и полагая $\theta(t) = \exp(-\alpha t)h(t)$, $\eta(t) = \theta(t - 1)$, приходим к системе разностных уравнений, которая в векторной форме записи имеет вид

$$z(t + 1) = H(z(t)), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} z &= (\eta, \theta)^T, & H(z) &= (\theta, -\kappa_1 \eta - \kappa_2 \varphi(2K\theta))^T, \\ \kappa_1 &= \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1} \cdot \frac{1 - \beta_2}{1 + \beta_2} \exp(-2\alpha), & \kappa_2 &= \frac{\exp(-\alpha)}{(1 + \beta_2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Теория разностных уравнений с непрерывным временем развита в монографии [4]. Напомним, что произвольному начальному условию $z_0(t) \in C_0$, где C_0 – нелинейное многообразие непрерывных при $-1 \leq t \leq 0$ вектор-функций $z_0(t) = (\eta_0(t), \theta_0(t))^T$, удовлетворяющих условиям согласования

$$\eta_0(0) = \theta_0(-1), \quad \theta_0(0) = -\kappa_1 \eta_0(-1) - \kappa_2 \varphi(2K\theta_0(-1)),$$

соответствует единственная непрерывная при всех $t \geq -1$ вектор-функция $z(t)$: $z(t) = z_0(t)$ при $-1 \leq t \leq 0$, обращающая уравнение (6) в тождество. Добавим еще, что эта функция строится методом шагов.

Итак, на многообразии C_0 определена сильно непрерывная по t нелинейная полугруппа

$$T[t, z_0(s)] = z(t + s), \quad -1 \leq s \leq 0, \quad t \geq 0, \quad (8)$$

аттракторы которой при $t \rightarrow \infty$, собственно говоря, и представляют для нас интерес. Следует, однако, заметить (см. [4]), что в наиболее содержательном случае, когда соответствующее разностному уравнению (6) дискретное отображение в $\mathbb{R}^2$

$$z \rightarrow H(z) \quad (9)$$

имеет аттрактор, отличный от неподвижной точки, почти все траектории полугруппы (8) при $t \rightarrow \infty$ становятся асимптотически разрывными. А это, в свою очередь, означает, что в описанной ситуации данная полугруппа вообще не имеет аттракторов в пространстве C_0 .

Из всего вышесказанного вытекает, что необходимо каким-либо образом расширить фазовое пространство разностного уравнения (6), включив в него разрывные функции. Один из возможных способов сделать это заключается в следующем. Фиксируем некоторое разбиение отрезка $[-1, 0]$ точками $-1 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = 0$, $n \geq 1$ и рассмотрим банахово пространство

$$E(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n) = C([\tau_0, \tau_1]; \mathbb{R}^2) \times C([\tau_1, \tau_2]; \mathbb{R}^2) \times \dots \times C([\tau_{n-1}, \tau_n]; \mathbb{R}^2). \quad (10)$$

Определим затем в пространстве (10) оператор $\tilde{H}$ по формуле

$$(z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \xrightarrow{\tilde{H}} (H(z_1(t)), H(z_2(t)), \dots, H(z_n(t))). \quad (11)$$

Далее, фиксируем произвольно начальное условие

$$\tilde{z}_0(t) = (z_{1,0}(t), z_{2,0}(t), \dots, z_{n,0}(t)) \in E(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n) \quad (12)$$

и рассмотрим положительную полутраекторию

$$(z_{1,m}(t), z_{2,m}(t), \dots, z_{n,m}(t)) = \tilde{H}^m(\tilde{z}_0(t)), \quad m \geq 0, \quad (13)$$

отображения (11) с этим начальным условием.

На следующем этапе установим соответствие между траекториями (13) и некоторыми решениями разностного уравнения (6). А именно, положим

$$z(t) = z_{k,m}(t - m) \quad \text{при } t \in [m + \tau_{k-1}, m + \tau_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad m \geq 0. \quad (14)$$

Получившуюся в итоге функцию назовем *разрывным решением* уравнения (6), а построенные с учетом формул (14), (5) разрывные функции $U(t, x)$, $V(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in [0, 1]$, по определению будем считать разрывными решениями исходной краевой задачи (1). Более того, любую определенную таким образом разрывную траекторию уравнения (6) или исходной системы (1) назовем *устойчивой (неустойчивой) по Ляпунову*, если аналогичным свойством обладает соответствующая траектория дискретного отображения (11) в пространстве (10).

Из приведенных определений ясно, что если, например, отображение (11) имеет экспоненциально устойчивый цикл, то разрывный цикл с теми же свойствами устойчивости существует и у исходной краевой задачи (1). Для отыскания же у этого отображения требуемых циклов заметим следующее. Рассмотрим вспомогательное отображение (9) в $\mathbb{R}^2$ и предположим, что оно имеет экспоненциально устойчивый цикл периода $p \geq 1$ с компонентами z_k^* , $k = 1, \dots, p$. Тогда, как нетрудно увидеть, экспоненциально устойчивые циклы (некоторые из которых могут совпадать) исходного отображения (11) порождаются любыми начальными условиями (12), в которых $z_{k,0}(t) \equiv c_k$, $k = 1, \dots, n$, а векторы $c_k \in \mathbb{R}^2$ независимо друг от друга принимают значения из множества $\{z_k^*\}$.

Подводя итог, отметим, что проблема отыскания устойчивых разрывных циклов краевой задачи (1) свелась к нахождению устойчивых циклов отображения (9), которое после нормировок и переобозначений

$$u = \frac{\eta}{\varkappa_2}, \quad v = \frac{\theta}{\varkappa_2}, \quad 2K\varkappa_2 \rightarrow K, \quad \mu = 1 - \varkappa_1 \quad (15)$$

преобразуется к виду

$$(u, v) \rightarrow (v, -(1 - \mu)u - \varphi(Kv)). \quad (16)$$

Исследование отображения (16) будем проводить при дополнительных условиях $K = \infty$, $0 < \mu \ll 1$. Первое из них означает, что в качестве нелинейного элемента генератора взято идеальное реле, а второе заведомо выполняется при традиционных в данной тематике предположениях о малости параметров α , β_1 , β_2 (см. (2), (7), (15)). Далее, перейдем в системе (16) к пределу при $K \rightarrow \infty$ и воспользуемся свойствами (3). В итоге после нормировок $2u/q_2 \rightarrow u$, $2v/q_2 \rightarrow v$ получим отображение

$$\Pi(\mu): (u, v) \rightarrow (v, -(1 - \mu)u - \psi(v)) \quad (17)$$

с релейной нелинейностью

$$\psi(v) = \begin{cases} 2d & \text{при } v > 0, \\ 0 & \text{при } v = 0, \\ -2 & \text{при } v < 0, \end{cases} \quad d = \frac{q_1}{q_2},$$

которое и является объектом дальнейшего анализа.

2. Приступим к описанию основной конструкции. С этой целью фиксируем произвольно натуральное l и введем в рассмотрение на плоскости (u, v) прямоугольник Ω_l с вершинами

$$\begin{aligned} A_l &= (-d, -d + (l+1)(d+1)), & B_l &= (-d + (l+1)(d+1), -d), \\ C_l &= (1, -d - l(d+1)), & D_l &= (-d - l(d+1), 1). \end{aligned}$$

Рассмотрим затем все точки вида $(-d + k(d+1), -d + m(d+1))$, $k, m \in \mathbb{Z}$, лежащие на границе Γ_l этого прямоугольника. Занумеруем их, начиная с вершины A_l , в порядке обхода контура Γ_l по часовой стрелке и обозначим получившиеся точки через P_k , $k = 0, 1, \dots, 4l+1$. В результате имеем набор точек

$$S_l = \{P_k, k = 0, 1, \dots, 4l+1\}, \quad (18)$$

расположение которых в простейшем случае $l = 1, d = 1$ показано на рис. 3. Далее, нам потребуется отображение

$$\Pi_0: (u, v) \rightarrow (v, -u - \psi(v)), \quad (19)$$

получающееся из (17) при $\mu = 0$. Нетрудно убедиться, что отображение (19) не только оставляет инвариантным множество (18), но и справедливо следующее более сильное утверждение.

Рис. 3

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место цепочка равенств*

$$\Pi_0(P_k) = P_{k+l+1}, \quad k = 0, 1, \dots, 4l+1, \quad (20)$$

где, естественно, предполагается, что $P_n = P_m$ в случае $n = m \pmod{4l+2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элементы множества (18), лежащие на ребрах $D_l A_l$ и $A_l B_l$. Таковыми являются, очевидно, точки с координатами

$$(-d - (k-1)(d+1), -d + (l-k+2)(d+1)), \quad k = 1, 2, \dots, l+1, \quad (21)$$

$$(-d + m(d+1), -d + (l-m+1)(d+1)), \quad m = 1, 2, \dots, l+1, \quad (22)$$

соответственно. Непосредственная проверка показывает, что каждая точка первого семейства с номером k под действием отображения (19) переходит в точку второго семейства с номером $m = l - k + 2$. Ясно также, что, двигаясь вдоль контура Γ_l в направлении по часовой стрелке от произвольной точки множества (21) к ее образу, мы “перепрыгиваем” ровно через l промежуточных точек. А это эквивалентно выполнению соотношений (20) для элементов множества S_l , принадлежащих ребру $D_l A_l$.

На следующем этапе обратимся к точкам множества S_l , находящимся на ребре $B_l C_l$, координаты которых имеют вид

$$(-d + r(d + 1), -d - (l - r + 1)(d + 1)), \quad r = 1, 2, \dots, l + 1. \quad (23)$$

Заметим, далее, что образом любой точки (22) с номером m , $m \leq l$, является точка (23) с номером $r = l - m + 1$. А отсюда, как и в предыдущем случае, вытекает справедливость для семейства (22) при $m \leq l$ требуемых равенств (20).

Итак, при любых значениях параметра $d > 0$ соотношения (20) выполняются для всех элементов множества (18), лежащих в полуплоскости $v > 0$. Проверять же их справедливость для оставшихся элементов из S_l нет необходимости, поскольку как само отображение (19), так и множество (18) инвариантны относительно преобразования $u/d \rightarrow -u$, $v/d \rightarrow -v$ и последующей замены $1/d \rightarrow d$. Теорема доказана.

В связи с установленной теоремой естественно возникает вопрос о характере поведения траекторий отображения (19) с начальными условиями из множества (18). Ответ на него содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 2. *В случае четного l точки (18) образуют единый цикл G_l отображения (19) периода $4l + 2$, мультипликаторы которого равны -1 . Если же l нечетно, то множество S_l распадается на два цикла $G_l^{(1)}$, $G_l^{(2)}$ периода $2l + 1$, каждый из которых имеет комплексные мультипликаторы $\pm i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование циклов, лежащих в множестве (18), очевидно, так как это множество инвариантно относительно отображения (19) и состоит из конечного числа элементов. Далее, пусть $P_{k_0} \in S_l$ – начальное условие какого-либо из этих циклов, а s – наименьшее натуральное число такое, что $\Pi_0^s(P_{k_0}) = P_{k_0}$. Из геометрических соображений ясно (см. (20)), что прежде, чем вернуться в первоначальное положение, точка P_{k_0} совершает некоторое количество полных “обходов” вдоль контура Γ_l . А это значит, что

$$(l + 1)s = m(4l + 2) \quad (24)$$

при некотором натуральном m . Заметим также, что поскольку нас интересует наименьший период s , то в равенстве (24) в качестве m следует взять наименьшее натуральное число, для которого выражение $4m - 2m/(l + 1)$ получается целым. А отсюда, автоматически следует, что $m/(l + 1) = 1/2$ или $m/(l + 1) = 1$.

Первая из отмеченных альтернатив реализуется при нечетном l и в этом случае все циклы из множества (18) имеют периоды $s = 2l + 1$. Тем самым, таких циклов в точности два, а их мультипликаторы, являющиеся собственными значениями матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^s, \quad (25)$$

равны $\pm i$.

В случае четного l с необходимостью имеем $m = l + 1$, а значит, в множестве S_l существует единственный цикл периода $s = 4l + 2$. Снова привлекая матрицу (25), убеждаемся, что мультипликаторы этого цикла равны -1 . Теорема доказана.

Обратимся теперь к исходному отображению (17). Из теорем 1, 2 вытекает, что при $\mu \rightarrow 0$ количество его устойчивых циклов неограниченно растет. Точнее говоря, справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. *По любому натуральному m_0 можно указать такое достаточно малое $\mu_0 = \mu_0(m_0) > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ отображение (17) имеет аналитически зависящие от μ экспоненциально устойчивые циклы*

$$G_{2m-1}^{(1)}(\mu), \quad G_{2m-1}^{(2)}(\mu), \quad G_{2m}(\mu), \quad m = 1, 2, \dots, m_0, \quad (26)$$

обращающиеся при $\mu = 0$ в циклы

$$G_{2m-1}^{(1)}, \quad G_{2m-1}^{(2)}, \quad G_{2m}, \quad m = 1, 2, \dots, m_0, \quad (27)$$

системы (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для построения циклов (26) с требуемыми свойствами рассмотрим серию уравнений

$$\Pi^s(\mu)(P) = P, \quad (28)$$

где $s = 4m - 1$ или $s = 8m + 2$, а $m = 1, 2, \dots, m_0$. Заметим, далее, что поскольку мультипликаторы циклов (27) равны $\pm i$ или -1 , то к любому из уравнений (28) применима теорема о неявной функции по переменной P в точке $\mu = 0$, $P = P_*$, где P_* – произвольный элемент множества S_{2m-1} (в случае $s = 4m - 1$) или S_{2m} (при $s = 8m + 2$). Таким образом, все эти уравнения имеют аналитические по μ решения, что и означает существование интересующих нас циклов (26).

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости найденных циклов. Нетрудно увидеть, что их мультипликаторы определяются из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu - 1 & 0 \end{pmatrix}^s,$$

где $s = 4m - 1$ или $s = 8m + 2$ соответственно. Остается добавить, что во всех случаях собственные значения λ_1, λ_2 этих матриц таковы, что $|\lambda_1| = |\lambda_2| = (1 - \mu)^{s/2} < 1$. Теорема 3 доказана.

3. Сделаем некоторые выводы о динамике исходной краевой задачи (1), вытекающие из проделанного анализа. В связи с этим обратим внимание, что в силу наложенных на функцию $\varphi(z)$ ограничений (см. (3)) предельное равенство

$$\lim_{q_2} \frac{2}{q_2} \varphi(Kv) = \psi(v), \quad K \rightarrow \infty,$$

справедливо в метрике $C^1(\Omega)$, где Ω – произвольное замкнутое множество, не содержащее точку $v = 0$. А отсюда, в свою очередь, следует, что устойчивые циклы, аналогичные циклам (26), сохраняются при любом фиксированном достаточно малом $\mu > 0$ и в рамках системы (16), если, конечно, параметр K в ней надлежащим образом велик.

Итак, отображение (16) имеет устойчивые циклы, причем количество последних за счет выбора параметров μ , K может быть сделано сколь угодно большим. Вспоминая, далее, о связи между решениями систем (16) и (1) (см. п. 1), убеждаемся, что феномен буферности наблюдается и в рамках исходной краевой задачи (1).

В заключение добавим, что, как следует из содержащихся в [4] результатов, при отходе от условия (4), т.е. при $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + \nu$, $\alpha = \text{const} > 0$, $|\nu| \ll 1$, сглаживания разрывных колебаний не происходит: аналоги построенных выше разрывных циклов “выживают” и лишь немного деформируются.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений”, *Тр. МИАН*, **222** (1998), 1–191.
- [2] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Автоколебания в RCLG-линии с малыми искажениями”, *Дифференц. уравнения*, **34**:11 (1998), 1559–1561.
- [3] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента”, *Тр. МИАН*, **233** (2001), 153–207.
- [4] А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1986.

С. Д. Глызин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. Ю. Колесов

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniar.ac.ru

Н. Х. Розов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

Поступило

30.03.2005

Исправленный вариант

09.02.2006