Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Дудаков, Псевдоконечная однородность, изолированность и сводимость, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 515–527

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 10:46:00

Псевдоконечная однородность, изолированность и сводимость

С. М. Дудаков

Ранее установлено (С. М. Дудаков, М. А. Тайцлин), что из сводимости некоторых моделей теории следует второе свойство псевдоконечной однородности для этой теории. Здесь мы доказываем обратное: из любого (первого или второго) свойства псевдоконечной однородности теории следует сводимость некоторых ее моделей и, следовательно, второе свойство изолированности. Это доказывает также эквивалентность вторых свойств изолированности и псевдоконечной однородности, что контрастирует с тем, что первое свойство псевдоконечной однородности является более общим, чем первое свойство изолированности (О. В. Беллеградек, А. П. Столбоушин, М. А. Тайцлин).

Библиография: 13 названий.

1. Введение. В настоящее время методы математической логики находят все большее применение для анализа языков запросов к базам данных. В данной работе мы рассматриваем одну из таких проблем, связанную с выразительной силой языков первого порядка для конечных алгебраических систем.

Типичной моделью базы данных со времен Кодда является реляционная модель, в которой база данных мыслится как собрание конечного числа конечных таблиц (см. [1], [2]). Таблицы можно считать конечными отношениями, названия которых образуют конечную предикатную сигнатуру Ω – сигнатуру базы данных, а элементы таблиц берутся из какого-либо фиксированного множества A . Хотя количество таблиц и количество элементов в каждой из них конечно, но эти количества могут быть сколь угодно большими, поэтому множество A следует считать бесконечным. Таким образом, базу данных можно считать алгебраической системой сигнатуры Ω , носителем которой – конечное подмножество A .

Для извлечения информации из базы данных, как правило, используются запросы, написанные на языках первого порядка. Эта традиция тоже восходит к Кодду, который в качестве языка запросов предложил использовать язык реляционных выражений, практически эквивалентный языку логики предикатов первого порядка. В простейшем случае запросы являются замкнутыми формулами первого порядка, а информация, которую можно извлечь с помощью таких запросов, – обладает база данных каким-то свойством или нет. Хорошо известно, что не всякое свойство алгебраических систем может быть выражено такими формулами, более того, нельзя записать многие простейшие вещи. Например, если сигнатура базы данных

содержит только один одноместный предикатный символ P , то невозможно записать в этой сигнатуре формулу первого порядка, выделяющую в точности те из конечных систем, в которых количество элементов P является четным (см. [3]). Другой пример – по двухместному предикату E , задающему граф, определить, является ли этот граф связным (см. [4]).

Один из путей, который помог бы преодолеть это ограничение, состоит в следующем (см. [5]). Обычно над множеством A , элементы которого используются для построения базы данных, определены какие-либо стандартные отношения, образующие сигнатуру Σ . Например, в качестве таких отношений можно использовать операции сложения и умножения над числовыми множествами. Таким образом, элементы множества A , являются элементами некой алгебраической системы $\mathfrak{A}$, называемой *универсумом*, сигнатуры Σ . Возможно, что если в языке запросов использовать не только отношения сигнатуры базы данных Ω , но и отношения универсума, то можно будет записать какие-то свойства, которые нельзя записать запросами в сигнатуре Ω (запросы в сигнатуре Ω называются *ограниченными*). Разумеется, речь должна идти не о связи отношений из Σ и Ω , а только о свойствах отношений из Ω .

Гуревич показал, что если среди отношений универсума есть отношение линейного порядка, то расширение выразительных возможностей языка действительно происходит. Поэтому имеет смысл искать дальнейшие обогащения. Добавляя к языку запросов новые отношения универсума, можно ли добиться того, что выразительная сила языка в сигнатуре (Ω, Σ) будет больше, чем языка сигнатуры $(\Omega, <)$ (запросы в сигнатуре $(\Omega, <)$ называются *<-ограниченными*)? Более точно, мы рассматриваем такие запросы, значение которых не меняется при произвольных порядковых изоморфизмах базы данных внутри универсума $\mathfrak{A}$. Такие запросы называются *локально <-генерическими* (или *<-инвариантными*). Если каждый локально <-генерический расширенный запрос эквивалентен для конечных состояний базы данных некоторому <-ограниченному запросу, то это называется *свойством коллапса к порядку* или *трансляционной теоремой* для рассматриваемого универсума.

Возникает вопрос: расширяет ли использование дополнительных отношений универсума выразительные возможности языка запросов? Иначе говоря, существуют ли локально <-генерические расширенные запросы, которые не эквивалентны никаким <-ограниченным?

Известны примеры универсумов, в которых выразительная сила запросов возрастает при переходе от <-ограниченных запросов к расширенным, например, элементарная арифметика или теория наследственно конечных множеств (см. [5]). Однако для многих других теорий, например, арифметики Пресбургера, некоторых ее обогащений, теории действительных чисел выполняется трансляционная теорема (см. [6], [7]). Как выяснить, обладает ли та или иная теория свойством коллапса к порядку или нет?

Два основных способа предложены в работах [6] и [8]. Первый из них связан с использованием свойств псевдоконечной однородности, а второй – со сводимостью. Ранее, в работах [9] и [10] установлено, что из свойства сводимости следует второе свойство изолированности и, следовательно, второе свойство псевдоконечной однородности. Таким образом, второй способ не является более общим, чем первый.

В данной работе мы показываем обратное: каждая теория, обладающая первым или вторым свойством псевдоконечной однородности, обладает и свойством своди-

мости. Таким образом, мы окончательно доказываем, что оба метода определения свойства коллапса к порядку являются эквивалентными.

Во втором пункте мы даем основные определения, в третьем – формулируем технические понятия, используемые для доказательства, а в четвертом – доказываем основные утверждения. В заключение мы формулируем два из остающихся открытыми вопросов.

2. Определения. Основные сведения о теории моделей можно найти в [11].

Мы рассматриваем конечную предикатную сигнатуру Ω , которая кроме предикатных символов, возможно, содержит константы. Пусть Σ – произвольная сигнатура, не имеющая с Ω общих символов. Бесконечные алгебраические системы сигнатуры Σ будем называть *универсумами*. В дальнейшем также считаем, что P – одноместный предикатный символ, который не встречается ни в Σ , ни в Ω . Для удобства записи мы будем использовать строчные буквы прямого начертания (например, a, b, x) для обозначения и элементов универсума, и констант, именуемых эти элементы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Формулы сигнатуры (Ω, Σ) мы называем *расширенными*. Если $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ – обеднение сигнатуры Σ , то формулы сигнатуры (Ω, Σ_0) мы называем *Σ_0 -ограниченными*. В частности, если Σ_0 состоит только из отношения порядка: $\Sigma_0 = \{<\}$, то формулы сигнатуры $(\Omega, <)$ называются *$<$ -ограниченными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конечная алгебраическая система $\mathfrak{D}$ сигнатуры Ω называется *состоянием* в универсуме $\mathfrak{A}$, если $|\mathfrak{D}| \subseteq |\mathfrak{A}|$. С помощью $|\mathfrak{D}|$, $|\mathfrak{A}|$ мы обозначаем здесь и далее носитель соответствующей системы.

Пару $(\mathfrak{D}, \mathfrak{A})$ можно рассматривать как единую алгебраическую систему объединенной сигнатуры (Ω, Σ) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть дан универсум $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ и $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ – обеднение Σ . Расширенная формула φ сигнатуры (Ω, Σ) называется *Σ_0 -инвариантной* или *локально Σ_0 -генерической*, если для любых двух состояний $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ в $\mathfrak{A}$, между которыми можно установить изоморфизм, сохраняющий все отношения Σ_0 , выполнено

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_1) \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A}, \mathfrak{D}_2) \models \varphi.$$

Система $\mathfrak{A}$ обладает свойством *коллапса к сигнатуре Σ_0* , если для любой сигнатуры Ω и для любой Σ_0 -инвариантной формулы φ в сигнатуре (Ω, Σ) существует формула ψ в сигнатуре (Ω, Σ_0) , которая эквивалентна φ на всех состояниях.

В частности, если Σ_0 состоит только из отношения порядка, то мы говорим о *коллапсе к порядку*.

Так как свойство коллапса к сигнатуре Σ_0 можно выразить с помощью счетного множества формул сигнатуры Σ , то коллапс к Σ_0 является свойством не только алгебраических систем, но и их теорий.

Основные методы установления коллапса к порядку используют свойства псевдоконечной однородности и сводимости.

Свойства псевдоконечной однородности и изолированности определены в [6] и уточнены в [9], [12].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть дана алгебраическая система $\mathfrak{A}$ и отношение $R \subseteq |\mathfrak{A}|^n$. Множество R называется *псевдоконечным* в $\mathfrak{A}$, если в системе $(\mathfrak{A}, R)$ истинны все формулы, которые истинны во всех системах вида $(\mathfrak{A}, R)$ с конечным R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Система $(\mathfrak{A}, I)$ обладает *первым свойством псевдоконечной однородности*, если I – неразличимая в $\mathfrak{A}$ последовательность и для любой системы $(\mathfrak{B}, J) \equiv (\mathfrak{A}, I)$, любых псевдоконечных в $\mathfrak{B}$ множеств $D_1, D_2 \subseteq J$, любых конечных множеств $E_1, E_2 \subseteq |\mathfrak{B}|$ выполнено следующее свойство: если существует элементарное в $\mathfrak{B}$ отображение $h: D_1 \cup E_1 \rightarrow D_2 \cup E_2$, то оно может быть продолжено на любой элемент $x \in |\mathfrak{B}|$, если система $(\mathfrak{B}, D_1, D_2, h)$ является ω -насыщенной.

Система $(\mathfrak{A}, I)$ обладает *вторым свойством псевдоконечной однородности*, если I – неразличимая в $(\mathfrak{A}, I)$ последовательность и для любой системы $(\mathfrak{B}, J) \equiv (\mathfrak{A}, I)$, любых псевдоконечных в $(\mathfrak{B}, J)$ множеств $D_1, D_2 \subseteq J$, любых конечных множеств $E_1, E_2 \subseteq |\mathfrak{B}|$ выполнено следующее свойство: если существует элементарное в $(\mathfrak{B}, J)$ отображение $h: D_1 \cup E_1 \rightarrow D_2 \cup E_2$, то оно может быть продолжено на любой элемент $x \in |\mathfrak{B}|$, если система $(\mathfrak{B}, J, D_1, D_2, h)$ является ω -насыщенной.

Теория T обладает *первым (вторым) свойством псевдоконечной однородности*, если она имеет модель $\mathfrak{A}$, в которой есть множество I такое, что $(\mathfrak{A}, I)$ обладает первым (вторым) свойством псевдоконечной однородности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть дана алгебраическая система $\mathfrak{A}$ и два подмножества ее носителя, вложенных одно в другое: $D_0 \subseteq D \subseteq |\mathfrak{A}|$. Тип K над множеством D *изолируется* в системе $\mathfrak{A}$ типом K_0 над множеством D_0 , если K – единственный тип над D в системе $\mathfrak{A}$, который содержит K_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Система $(\mathfrak{A}, I)$ обладает *первым свойством изолированности* (или, говорят, *изоляционным свойством*), если I – неразличимая в $\mathfrak{A}$ последовательность и для любой системы $(\mathfrak{B}, J) \equiv (\mathfrak{A}, I)$, любого псевдоконечного в $\mathfrak{B}$ множества $D \subseteq J$, любого конечного множества $E \subseteq |\mathfrak{B}|$ и любого элемента $x \in |\mathfrak{B}|$ тип $\text{tp}(x/D \cup E)$ изолируется в $\mathfrak{B}$ типом $\text{tp}(x/D_0 \cup E)$ для некоторого счетного множества $D_0 \subseteq D$. Здесь и далее $\text{tp}(a/G)$ означает тип элемента a над множеством G .

Система $(\mathfrak{A}, I)$ обладает *вторым свойством изолированности*, если I – неразличимая в $(\mathfrak{A}, I)$ последовательность и для любой системы $(\mathfrak{B}, J) \equiv (\mathfrak{A}, I)$, любого псевдоконечного в $(\mathfrak{B}, J)$ множества $D \subseteq J$, любого конечного множества $E \subseteq |\mathfrak{B}|$ и любого элемента $x \in |\mathfrak{B}|$ тип $\text{tp}(x/D \cup E)$ изолируется в $(\mathfrak{B}, J)$ типом $\text{tp}(x/D_0 \cup E)$ для некоторого счетного множества $D_0 \subseteq D$.

Теория T обладает *первым (вторым) свойством изолированности*, если она имеет модель $\mathfrak{A}$, в которой есть множество I такое, что $(\mathfrak{A}, I)$ обладает первым (вторым) свойством изолированности.

В [6], [12] показано, что если система $(\mathfrak{A}, I)$ обладает первым (вторым) свойством изолированности, то она обладает первым (вторым) свойством псевдоконечной однородности, а из любого из свойств псевдоконечной однородности следует свойство коллапса к порядку для теории системы. Этот метод использовался в работе [6] для доказательства коллапса к порядку для арифметики Пресбургера и теории действительных чисел, в [7] – для доказательства коллапса для обогащений арифметики Пресбургера согласованными со сложением функциями.

Другой метод установления свойства коллапса к порядку использует свойство сводимости, впервые введенное в [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. В системе $(\mathfrak{A}, I)$ сигнатуры (Σ, P) , где I – неразличимая в $\mathfrak{A}$ последовательность, формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры (Σ, P) называется *I -сводимой*, если существует бескванторная порядковая формула $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ и для каждого набора $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$

длины $|\bar{y}|$ существует набор $\bar{c}_{\bar{a}} \in I$ длины $|\bar{z}|$ такой, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall x \in P)(\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{c}_{\bar{a}})),$$

т.е. истинность $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ определяется исключительно положением $\bar{x}$ относительно $\bar{c}_{\bar{a}}$. Переменные $\bar{x}$ в данном случае мы будем называть *I-ограниченными*.

Система $(\mathfrak{A}, I)$ называется *I-сводимой*, если в ней сводима каждая формула сигнатуры Σ . Теория T называется *I-сводимой*, если существует *I-сводимая* система $(\mathfrak{A}, I)$, и $\mathfrak{A} \models T$.

Этот метод доказательства имеет то преимущество, что при некоторых дополнительных условиях позволяет получать алгоритм трансляции расширенных запросов в эквивалентные $<$ -ограниченные (см. [13]).

В [9], [10] показано, что каждая сводимая теория обладает вторым свойством изолированности, следовательно, вторым свойством псевдоконечной однородности. Таким образом, для теорий, для которых возможно доказательство коллапса к порядку с использованием сводимости, возможно доказательство и с использованием второго свойства псевдоконечной однородности. Мы доказываем обратное: каждая теория с первым или вторым свойством псевдоконечной однородности имеет сводимые модели.

3. Конструкция. Рассматриваем систему $(\mathfrak{A}, I)$ сигнатуры (Σ, P) , где I – неразличимая в $\mathfrak{A}$ последовательность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ – формула сигнатуры (Σ, P) . Пусть $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$ – произвольный набор длины $|\bar{y}|$. Пусть $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ – наборы элементов I длины $|\bar{x}|$. Будем пару $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$ называть *различающей* для формулы φ и набора $\bar{a}$, если элементы наборов $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ одинаково упорядочены и существует номер i_0 такой, что $d_1^{(i)} = d_2^{(i)}$ для всех $i \neq i_0$ и

$$\varphi(\bar{d}_1, \bar{a}) \neq \varphi(\bar{d}_2, \bar{a}).$$

Без ограничения общности считаем, что $d_1^{(i_0)} < d_2^{(i_0)}$. Тогда отрезок $[d_1^{(i_0)}; d_2^{(i_0)}]$ будем называть *различающим отрезком* и обозначать $\text{diff}[\bar{d}_1, \bar{d}_2]$.

Две различающих пары $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$ и $(\bar{d}'_1, \bar{d}'_2)$ назовем *непересекающимися*, если не пересекаются их различающие отрезки $\text{diff}[\bar{d}_1, \bar{d}_2]$ и $\text{diff}[\bar{d}'_1, \bar{d}'_2]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Элемент $e \in I$ будем называть *определяющим* для набора $\bar{a}$ и формулы φ , если для любой окрестности $O(e)$ в I существует различающая пара $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$ для φ и $\bar{a}$, для которой $\text{diff}[\bar{d}_1, \bar{d}_2] \subseteq O(e)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в системе $(\mathfrak{A}, I)$ сигнатуры (Σ, P) множество I является неразличимым в $\mathfrak{A}$ и плотно линейно упорядоченным без концевых элементов. Для того, чтобы формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ сигнатуры (Σ, P) была *I-сводимой*, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $M \in \omega$ и для любого набора $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$ количество определяющих элементов для φ и $\bar{a}$ было ограничено константой M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна: если формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ *I-сводима* при помощи бескванторной порядковой формулы $\psi(\bar{x}, \bar{z})$, т.е. для каждого $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$ существует $\bar{c}_{\bar{a}} \in I$ такой, что

$$(\mathfrak{A}, I) \models (\forall x \in P)(\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}, \bar{c}_{\bar{a}})),$$

то все определяющие для $\bar{a}$ и φ элементы могут находиться только среди элементов набора $\bar{c}_a$, а их количество ограничено длиной набора $\bar{z}$.

Докажем достаточность. Для этого продемонстрируем, что если $\bar{c} \in I$ – набор из всех определяющих элементов для $\bar{a}$ и формулы $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, то для любых двух наборов $\bar{d}_1, \bar{d}_2 \in I$, которые имеют одинаковый порядковый тип над $\bar{c}$, формулы $\varphi(\bar{d}_1, \bar{a})$ и $\varphi(\bar{d}_2, \bar{a})$ имеют одно и то же значение.

Используем индукцию по количеству неравных компонент наборов $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$.

Базис. Пусть $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ различаются только одной компонентой: $d_1^{(i_0)} \neq d_2^{(i_0)}$ для некоторого i_0 . Предположим, что на $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ значение формулы различно. Будем рассматривать множество

$$C = I \cap [d_1^{(i_0)}; d_2^{(i_0)}].$$

Пусть для любого $f \in C$ запись $\bar{d}_f$ обозначает набор, полученный из $\bar{d}_1$ заменой элемента $d_1^{(i_0)}$ на f . Пусть C_1 – множество элементов $f \in C$, для которых

$$\varphi(\bar{d}_f, \bar{a}) \equiv \varphi(\bar{d}_1, \bar{a}),$$

а C_2 – множество элементов $f \in C$, для которых

$$\varphi(\bar{d}_f, \bar{a}) \equiv \varphi(\bar{d}_2, \bar{a}).$$

Так как (C_1, C_2) – разбиение C , в котором оба множества непусты, а порядок на C полный и плотный, то, очевидно, хотя бы одно из множеств C_1 или C_2 содержит хотя бы одну граничную точку e . Но тогда точка e будет определяющей для $\bar{a}$ и формулы φ , следовательно, она лежит в наборе $\bar{c}$ и наборы $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ имеют разный порядковый тип над $\bar{c}$. Противоречие.

Шаг индукции. Пусть теперь наборы различаются более, чем одной компонентой. Пусть, например, $d_1^{(i_0)}$ – наименьшая из неравных компонент обоих наборов. Пусть набор $\bar{d}'_2$ получен из $\bar{d}_2$ заменой $d_2^{(i_0)}$ на $d_1^{(i_0)}$. Тогда наборы $\bar{d}_2$ и $\bar{d}'_2$ различаются одной компонентой. Так как $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ имеют одинаковый порядковый тип над $\bar{c}$, то согласно базису индукции,

$$\varphi(\bar{d}_2, \bar{a}) \equiv \varphi(\bar{d}'_2, \bar{a}).$$

Но наборы $\bar{d}_1$ и $\bar{d}'_2$ различаются меньшим числом компонент и тоже имеют одинаковый порядковый тип над $\bar{c}$. Согласно индукционному предположению, мы можем считать, что

$$\varphi(\bar{d}_1, \bar{a}) \equiv \varphi(\bar{d}'_2, \bar{a}),$$

и, следовательно,

$$\varphi(\bar{d}_1, \bar{a}) \equiv \varphi(\bar{d}_2, \bar{a}).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть в системе $(\mathfrak{A}, I)$ сигнатуры (Σ, P) множество I является неразличимым в $\mathfrak{A}$. Пусть для любой формулы φ сигнатуры Σ существует константа $M_\varphi \in \omega$ и для любого набора $\bar{a} \in \mathfrak{A}$ количество непересекающихся различающихся пар для φ и $\bar{a}$ ограничено M_φ . Тогда существует J -сводимая система $(\mathfrak{B}, J)$, где $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система $(\mathfrak{B}, J') \equiv (\mathfrak{A}, I)$ является $(2^\omega)^+$ -насыщенной. Тогда существует множество $J \subseteq J'$, порядок на котором изоморфен обычному порядку на действительных числах. Если допустить, что какая-нибудь формула φ не J -сводима в $(\mathfrak{B}, J)$, то согласно теореме 1 количество определяющих элементов для нее не ограничено, и, следовательно, можно построить сколь угодно много непересекающихся различающих пар. Но тогда то же самое можно сделать в $(\mathfrak{B}, J')$, потому что $J \subseteq J'$, и в $(\mathfrak{A}, I)$, поскольку $(\mathfrak{B}, J') \equiv (\mathfrak{A}, I)$. Противоречие.

4. Основной результат.

ЛЕММА 1. Пусть $(\mathfrak{A}, I)$ – алгебраическая система сигнатуры (Σ, P) , I – неразличимая в $\mathfrak{A}$ (соответственно в $(\mathfrak{A}, I)$) последовательность, которая плотно полно упорядочена. Пусть в системе $(\mathfrak{A}, I)$ существует формула сигнатуры Σ (соответственно сигнатуры (Σ, P)), которая не является I -сводимой.

Тогда существует формула $\varphi(\bar{w}, \bar{y}, z)$ сигнатуры Σ (соответственно сигнатуры (Σ, P)) такая, что для любого кардинала $\aleph \geq |\mathfrak{A}|^\omega$, для которого

$$\aleph = \bigcup_{\alpha < \aleph} 2^\alpha,$$

и для любой специальной системы $(\mathfrak{B}, J) \succeq (\mathfrak{A}, I)$ мощности $\aleph$ выполнено следующее:

существует набор $\bar{a} \in |\mathfrak{B}|$ длины $|\bar{y}|$, существует множество $\bar{D}$ наборов $\bar{d}$ длины $|\bar{w}|$, мощность $\bar{D}$ равна $\aleph$, и при этом для любого отображения $\varepsilon: \bar{D} \rightarrow \{0; 1\}$ множество

$$X_\varepsilon = \{\varphi^{\varepsilon(\bar{d})}(\bar{d}, \bar{a}, z) : \bar{d} \in \bar{D}\} \quad (1)$$

конечно совместно в $\mathfrak{B}$ (соответственно в $(\mathfrak{B}, J)$).

Здесь φ^1 – сама формула φ , а φ^0 – ее отрицание.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y}')$ не является сводимой, если $\bar{x}$ – I -ограниченные переменные. Считаем, что количество не I -ограниченных переменных, т.е. $\bar{y}'$, в формуле φ является минимально возможным. Если бы длина набора $\bar{y}'$ была равна нулю, то в силу неразличимости I ее значение определялось бы исключительно порядковым типом набора $\bar{x}$, т.е. она была бы сводимой. Значит, длина набора $\bar{y}'$ больше нуля и мы можем представить его в виде $\bar{y}' = (\bar{y}, z)$.

Пусть $\Psi_m(\bar{u}_m, \bar{y})$ – нумерация всех формул сигнатуры Σ (соответственно сигнатуры (Σ, P)). Если $\bar{u}_m$ – I -ограниченные переменные, то все формулы $\Psi_m(\bar{u}_m, \bar{y})$ содержат меньше не I -ограниченных переменных, чем φ , поэтому все они являются I -сводимыми.

Пусть формула $\varphi(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{y}, z)$ говорит, что $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$ – различающая пара для формулы φ и набора $(\bar{y}, z)$.

Так как формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, z)$ не I -сводима, то согласно теореме 1 существует последовательность наборов $(\bar{a}_i, \mathbf{b}_i)_{i \in \omega}$ из $\mathfrak{A}$ таких, что количество различных определяющих элементов I для формулы φ и набора $(\bar{a}_i, \mathbf{b}_i)$ не меньше i . Обозначим эти определяющие элементы через $\mathbf{e}_{i1}, \dots, \mathbf{e}_{ii}$. Для удобства, всегда считаем, что определяющие элементы $\mathbf{e}_{i1}, \dots, \mathbf{e}_{ii}$ упорядочены по возрастанию. По определению, мы можем для каждого $\mathbf{e}_{ij}$ выбрать различающую пару $(\bar{d}_{ij1}, \bar{d}_{ij2})$, для которой $\text{diff}[\bar{d}_{ij1}, \bar{d}_{ij2}] \subseteq O(\mathbf{e}_{ij})$, так, чтобы отрезки $\text{diff}[\bar{d}_{ij1}, \bar{d}_{ij2}]$ не пересекались друг с другом для одного i и различных j .

Для каждого i суммарное количество определяющих элементов для любого фиксированного набора $\bar{c}$ длины $|\bar{y}|$ и всех формул Ψ_k при $k = 0, \dots, i - 1$ ограничено некоторой константой M_i :

$$f_{i1}^{\bar{c}}, \quad \dots, \quad f_{iM_i}^{\bar{c}}.$$

Количество порядковых типов четверок $(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3, \bar{d}_4)$ из I , общее количество элементов в которых равно $4|\bar{x}|$, над любыми элементами $f_{i1}^{\bar{c}}, \dots, f_{iM_i}^{\bar{c}}$ из I в силу плотности I ограничено, поэтому согласно теореме Рамсея для каждого i существует i' такое, что из любой последовательности пар $(\bar{d}_{j1}, \bar{d}_{j2})_{j=1}^{i'}$ можно выбрать подпоследовательность $(\bar{d}'_{j'1}, \bar{d}'_{j'2})_{j'=1}^{i'}$, в которой все наборы $(\bar{d}'_{j'1}, \bar{d}'_{j'2}, \bar{d}'_{j''1}, \bar{d}'_{j''2})$ имеют один и тот же порядковый тип над $f_{i1}^{\bar{c}}, \dots, f_{iM_i}^{\bar{c}}$ при $j' < j''$. В последовательности $(\bar{a}_i, b_i)_{i \in \omega}$ выберем подпоследовательность $(\bar{a}'_i, b'_i)_{i \in \omega}$ так: $(\bar{a}'_i, b'_i) = (\bar{a}_{i'}, b_{i'})$. Будем рассматривать для $(\bar{a}'_i, b'_i)$ только такие различные определяющие элементы $e_{i1}, \dots, e_{ii}$, что при $j' < j''$ все наборы $(\bar{d}_{ij'1}, \bar{d}_{ij'2}, \bar{d}_{ij''1}, \bar{d}_{ij''2})$ имеют один и тот же порядковый тип над $f_{i1}^{\bar{a}'}, \dots, f_{iM_i}^{\bar{a}'}$.

Подведем итог этих построений. Для любого $(\bar{a}'_i, b'_i)$ существует не менее i определяющих элементов $e_{i1}, \dots, e_{ii}$, для каждого из которых существует различающая пара $(\bar{d}_{ij1}, \bar{d}_{ij2})$, и при этом

- для одного i для разных j отрезки $\text{diff}[\bar{d}_{ij1}, \bar{d}_{ij2}]$ не пересекаются;
- все наборы $(\bar{d}_{ij1}, \bar{d}_{ij2}, \bar{d}_{ij'1}, \bar{d}_{ij'2})$ при

$$\text{diff}[\bar{d}_{ij1}, \bar{d}_{ij2}] < \text{diff}[\bar{d}_{ij'1}, \bar{d}_{ij'2}]$$

имеют одинаковый порядковый тип над всеми определяющими элементами для набора $\bar{a}'_i$ и всех формул Ψ_k при $k = 0, \dots, i - 1$.

Здесь и далее с помощью

$$\text{diff}[\bar{d}_1, \bar{d}_2] < \text{diff}[\bar{d}'_1, \bar{d}'_2] \quad (2)$$

будем записывать формулу, означающую, что все элементы первого отрезка меньше всех элементов второго.

Пусть $\bar{D}_i$ – множество указанных различающих пар для $(\bar{a}'_i, b'_i)$. Рассмотрим $(\mathfrak{A}^*, I^*, \bar{D}^*, \bar{a}^*, b^*)$ – ультрапроизведение систем $(\mathfrak{A}, I, \bar{D}_i, \bar{a}'_i, b'_i)$ по какому-нибудь неглавному ультрафильтру над ω . Его мощность равна $|\mathfrak{A}|^\omega$. Тогда $(\mathfrak{A}^*, I^*) \succeq (\mathfrak{A}, I)$ и, кроме того,

- 1) $\bar{D}^*$ – бесконечное псевдоконечное множество различающих пар для φ и $(\bar{a}^*, b^*)$ такое, что для разных пар $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$ и $(\bar{d}'_1, \bar{d}'_2)$ из $\bar{D}$ отрезки $\text{diff}[\bar{d}_1, \bar{d}_2]$ и $\text{diff}[\bar{d}'_1, \bar{d}'_2]$ не пересекаются;
- 2) для разных пар $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$ и $(\bar{d}'_1, \bar{d}'_2)$ из $\bar{D}^*$, для которых $\text{diff}[\bar{d}_1, \bar{d}_2] < \text{diff}[\bar{d}'_1, \bar{d}'_2]$, порядковый тип набора $(\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}'_1, \bar{d}'_2)$ фиксирован над всеми определяющими элементами для набора $\bar{a}^*$ и всех формул Ψ_m ;
- 3) для всех пар $(\bar{d}_1, \bar{d}_2)$ из $\bar{D}^*$ отрезок $\text{diff}[\bar{d}_1, \bar{d}_2]$ не содержит определяющих элементов для набора $\bar{a}^*$ и всех формул Ψ_m . В самом деле, если бы какой-нибудь определяющий элемент f попал бы в $\text{diff}[\bar{d}_1, \bar{d}_2]$, то в силу пункта 2) он попал бы во все такие отрезки, что противоречит пункту 1).

Рассмотрим любую специальную систему $(\mathfrak{B}, J) \succeq (\mathfrak{A}, I)$ мощности $\aleph$, удовлетворяющей условию леммы. Построим специальную систему $(\mathfrak{B}', J', \bar{D}, \bar{a}, b) \succeq (\mathfrak{A}^*, I^*, \bar{D}^*, \bar{a}^*, b^*)$ мощности $\aleph$. Мощность множества $\bar{D}$ равна в этом случае $\aleph$. Очевидно, $(\mathfrak{B}', J') \equiv (\mathfrak{B}, J)$, обе эти системы специальные, следовательно, эти системы изоморфны, и мы можем считать, что множество $\bar{D}$, элементы $\bar{a}$ и b выбраны в $\mathfrak{B}$.

Покажем, что для всякого ε из условия леммы множество формул X_ε конечно совместно в $\mathfrak{B}$ (соответственно в $(\mathfrak{B}, J)$).

Пусть

$$X' = \{\varphi(\bar{d}_{i_1 1}, \bar{d}_{i_1 2}, \bar{a}, z), \dots, \varphi(\bar{d}_{i_n 1}, \bar{d}_{i_n 2}, \bar{a}, z), \\ \neg\varphi(\bar{d}_{i_{n+1} 1}, \bar{d}_{i_{n+1} 2}, \bar{a}, z), \dots, \neg\varphi(\bar{d}_{i_m 1}, \bar{d}_{i_m 2}, \bar{a}, z)\}$$

– произвольное конечное подмножество X_ε . Для краткости обозначим

$$\bar{d} = (\bar{d}_{i_1 1}, \bar{d}_{i_1 2}, \dots, \bar{d}_{i_n 1}, \bar{d}_{i_n 2}, \bar{d}_{i_{n+1} 1}, \bar{d}_{i_{n+1} 2}, \dots, \bar{d}_{i_m 1}, \bar{d}_{i_m 2}).$$

Нужно доказать, что формула

$$\Psi(\bar{d}, \bar{a}, z) = \varphi(\bar{d}_{i_1 1}, \bar{d}_{i_1 2}, \bar{a}, z) \wedge \dots \wedge \varphi(\bar{d}_{i_n 1}, \bar{d}_{i_n 2}, \bar{a}, z) \\ \wedge \neg\varphi(\bar{d}_{i_{n+1} 1}, \bar{d}_{i_{n+1} 2}, \bar{a}, z) \wedge \dots \wedge \neg\varphi(\bar{d}_{i_m 1}, \bar{d}_{i_m 2}, \bar{a}, z)$$

истинна в $\mathfrak{B}$ (соответственно в $(\mathfrak{B}, J)$) на каком-нибудь элементе. Заметим, что формула $(\exists z)\Psi(\bar{d}, \bar{y}, z)$ является одной из формул Ψ_m .

Для каждой различающей пары $(\bar{d}_{i_k 1}, \bar{d}_{i_k 2})$ при $k = n + 1, \dots, m$ построим набор $\bar{d}_{i_k 3}$, переместив неравный компонент наборов $\bar{d}_{i_k 1}$ и $\bar{d}_{i_k 2}$ внутрь отрезка $\text{diff}[\bar{d}_{i_k 1}, \bar{d}_{i_k 2}]$. Ясно, что одна из пар $(\bar{d}_{i_k 1}, \bar{d}_{i_k 3})$ или $(\bar{d}_{i_k 3}, \bar{d}_{i_k 2})$ различающей для $(\bar{a}, b)$ и φ не является. Будем обозначать эту неразличающую пару с помощью $(\bar{d}'_{i_k 1}, \bar{d}'_{i_k 2})$. Так как все отрезки $\text{diff}[\bar{d}_{i_k 1}, \bar{d}_{i_k 2}]$ не содержат никаких определяющих элементов для $\bar{a}$ и всех формул Ψ_m , то порядковый тип над этими элементами набора $\bar{d}$ такой же, как и набора

$$\bar{d}' = (\bar{d}_{i_1 1}, \bar{d}_{i_1 2}, \dots, \bar{d}_{i_n 1}, \bar{d}_{i_n 2}, \bar{d}'_{i_{n+1} 1}, \bar{d}'_{i_{n+1} 2}, \dots, \bar{d}'_{i_m 1}, \bar{d}'_{i_m 2}).$$

Но формула $\Psi(\bar{d}', \bar{a}, b)$ истинна, следовательно, формула $(\exists z)\Psi(\bar{d}', \bar{a}, z)$ истинна, значит, и формула $(\exists z)\Psi(\bar{d}, \bar{a}, z)$ истинна, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть f – сохраняющее порядок (2) взаимно однозначное отображение, переводящее множество $\bar{D}$ в себя, сохраняющее неподвижными все элементы набора $\bar{a}$ и не определенное для всех остальных аргументов. Тогда f – элементарное в $\mathfrak{B}$ (соответственно в $(\mathfrak{B}, J)$) отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D – множество всех элементов всех наборов из $\bar{D}$. Пусть для какой-нибудь формулы $\Psi_m(\bar{u}_m, \bar{y})$ выполнено $\Psi_m(\bar{c}, \bar{a})$ и $\neg\Psi_m(f(\bar{c}), \bar{a})$, где $\bar{c}, f(\bar{c}) \in D$. Это означает, что наборы $\bar{c}$ и $f(\bar{c})$ имеют разный порядковый тип над определяющими элементами для Ψ_m и $\bar{a}$. Покажем, что это невозможно.

Пусть, например, выполнено $c^{(i)} < e$, где e – какой-то определяющий элемент для Ψ_m и $\bar{a}$. Пусть $c^{(i)} = d^{(i')}$ для некоторого $\bar{d} \in \bar{D}$. Но тогда $f(\bar{d}) \in \bar{D}$, и типы наборов $\bar{d}$ и $f(\bar{d})$ над e должны быть одинаковы, и поэтому

$$f(d^{(i')}) = f(c^{(i)}) < e.$$

Аналогично для случаев $c^{(i)} = e$ и $c^{(i)} > e$. Таким образом, положение элементов $\bar{c}$ относительно определяющих элементов для Ψ_m и $\bar{a}$ не меняется.

Покажем теперь, что их положение относительно друг друга тоже не меняется. Пусть выполнено $c^{(i)} < c^{(j)}$.

Пусть $c^{(i)} = d^{(i')}$ и $c^{(j)} = d^{(j')}$ для некоторого $\bar{d} \in \bar{D}$. Но образом $\bar{d} \in \bar{D}$ является некоторый $\bar{d}_* \in \bar{D}$, а порядковый тип всех наборов из $\bar{D}$ одинаков. Поэтому

$$f(c^{(i)}) < f(c^{(j)}).$$

Пусть теперь $c^{(i)} = d_*^{(i')}$ и $c^{(j)} = d_{**}^{(j')}$ для некоторых $\bar{d}_*, \bar{d}_{**} \in \bar{D}$. Пусть, для определенности,

$$\text{diff}[\bar{d}_*] < \text{diff}[\bar{d}_{**}].$$

Тогда

$$\text{diff}[f(\bar{d}_*)] < \text{diff}[f(\bar{d}_{**})].$$

Но порядковые типы наборов $(\bar{d}_*, \bar{d}_{**})$ и $(f(\bar{d}_*), f(\bar{d}_{**}))$ одинаковы, поэтому если выполнено $d_*^{(i')} \circ d_{**}^{(j')}$, то выполнено и

$$f(d_*^{(i')}) < f(d_{**}^{(j')}),$$

т.е.

$$f(c^{(i)}) < f(c^{(j)}),$$

что и требовалось.

ТЕОРЕМА 3. Пусть теория не имеет сводимых моделей, тогда она не обладает ни первым, ни вторым свойством псевдоконечной однородности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что это не так и теория обладает первым или вторым свойством псевдоконечной однородности. Пусть $(\mathfrak{A}, I)$ – некоторая модель теории, которая обладает этим свойством. Так как теория системы $\mathfrak{A}$ не имеет сводимых моделей, то для системы $(\mathfrak{A}, I)$ должна существовать формула $\varphi(\bar{x}, \bar{y}, z)$ сигнатуры Σ (а следовательно, и сигнатуры (Σ, P)) и последовательность наборов $(\bar{a}_i, b_i)_{i \in \omega}$, для каждого из которых должно существовать не менее i непересекающихся различающих пар. В противном случае согласно теореме 2 существовала бы сводимая модель.

Согласно лемме 1 мы можем найти формулу $\varphi(\bar{w}, \bar{y}, z)$, и в любой специальной системе $(\mathfrak{B}, J) \equiv (\mathfrak{A}, I)$ подходящей мощности $\aleph$ имеются множество $\bar{D}$ и набор $\bar{a}$, обладающие указанными в лемме 1 свойствами.

Напомним, что $\bar{D}$ – псевдоконечно, следовательно, порядок (2) на нем дискретный с первым и последним элементами.

Определим отображение $\varepsilon_0: \bar{D} \rightarrow \{0; 1\}$ так, чтобы $\varepsilon_0(\bar{d}_1) \neq \varepsilon_0(\bar{d}_2)$ для любых двух соседних элементов $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ множества $\bar{D}$. Без ограничения общности можно считать, что множество X_{ε_0} , определенное согласно (1), совместно в $\mathfrak{B}$ или соответственно в $(\mathfrak{B}, J)$ и реализуется на некотором элементе x . Если это не так, то можно просто рассмотреть подходящее специальное элементарное расширение той же мощности.

Введем на элементах $\bar{D}$ отношение $\approx$: $\bar{d}_1 \approx \bar{d}_2$, если между $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ находится конечное число элементов $\bar{D}$ в смысле порядка (2). Отношение $\approx$, очевидно, является отношением эквивалентности, поэтому множество $\bar{D}$ распадается на классы эквивалентности. Наименьший из классов порядково изоморфен множеству натуральных чисел, наибольший – множеству целых отрицательных чисел, а все остальные – множеству целых чисел. Так как каждый класс эквивалентности счетен, а множество $\bar{D}$ имеет мощность $\aleph > \omega$, то множество классов эквивалентности имеет мощность $\aleph$.

Пусть $\bar{D}/\approx$ – множество классов эквивалентности $\bar{D}$ по отношению $\approx$, за исключением наименьшего и наибольшего классов. Существует $2^{\aleph}$ различных отображений h множества $\bar{D}/\approx$ в множество $\{0; 1\}$. Для каждого отображения h мы можем построить отображение $g_h: \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ следующим образом: если $\bar{d}$ принадлежит наименьшему классу эквивалентности, наибольшему классу эквивалентности или такому классу $\mathcal{D}$, что $h(\mathcal{D}) = 1$, то $g_h(\bar{d}) = \bar{d}$. В противном случае $g_h(\bar{d})$ равно следующему по порядку за $\bar{d}$ элементом $\bar{D}$. Таким образом, если $h(\mathcal{D}) = 1$, то элементы класса $\mathcal{D}$ остаются неподвижными, а если $h(\mathcal{D}) = 0$, то они сдвигаются на один элемент в большую сторону. Следовательно, каждый класс переходит сам в себя, а g_h взаимно-однозначно отображает $\bar{D}$ на себя же.

Для набора $\bar{a}$ полагаем всегда $g_h(\bar{a}) = \bar{a}$. Построим отображение $\varepsilon_h: \bar{D} \rightarrow \{0; 1\}$ следующим образом: $\varepsilon_h(\bar{d}) = \varepsilon_0(g_h(\bar{d}))$. Тогда, очевидно, $\varepsilon_{h_1} \neq \varepsilon_{h_2}$ для различных h_1 и h_2 .

Каждое построенное таким образом отображение g_h согласно следствию 1 является элементарным в $\mathfrak{B}$ (соответственно в $(\mathfrak{B}, J)$) отображением $\bar{D}$ в себя, сохраняющим $\bar{a}$. Предположим, каждое такое отображение g_h может быть продолжено на элемент x , и z_h будет образом x . Тогда на z_h будет реализовываться множество X_{ε_h} . Но различные множества X_{ε_h} не совместны друг с другом, следовательно, на каждом z_h может реализовываться только одно из них. А так как различных отображений h имеется $2^{\aleph}$, то должно существовать $2^{\aleph}$ различных z_h , чего быть не может в силу того, что мощность всей системы равна $\aleph$. Следовательно, существует h_0 , для которого g_{h_0} не имеет продолжения на x .

Рассмотрим систему $(\mathfrak{B}, J, \bar{D}, g_{h_0}, \bar{a}, x)$ сигнатуры $(\Sigma, P, \bar{Q}, g, \bar{a}, \bar{x})$. В ней выполнена следующая формула:

$$\neg(\exists z)(\forall \bar{d} \in \bar{Q})(\varphi(\bar{d}, \bar{a}, x) \leftrightarrow \varphi(g(\bar{d}), \bar{a}, z)).$$

Поэтому, если мы рассмотрим любую ω -насыщенную элементарно эквивалентную этой системе систему $(\mathfrak{B}', J', \bar{D}', g'_{h_0}, \bar{a}, x)$, то в ней такая формула продолжает выполняться. Поэтому в системе $\mathfrak{B}'$ (соответственно $(\mathfrak{B}', J')$) отображение $g'_{h_0}: \bar{D}' \cup \bar{a} \rightarrow \bar{D}' \cup \bar{a}$ также не продолжается на x . Значит, теория системы $\mathfrak{A}$ не обладает первым (соответственно вторым) свойством псевдоконечной однородности.

Из предыдущей теоремы и результатов работ [9], [10] сразу следуют два утверждения.

ТЕОРЕМА 4. *Если теория обладает первым (вторым) свойством псевдоконечной однородности, то она обладает вторым свойством изолированности.*

ТЕОРЕМА 5. *Для любой теории T следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *T обладает вторым свойством псевдоконечной однородности;*
- 2) *T обладает вторым свойством изолированности;*
- 3) *T является сводимой.*

Этот результат интересен, поскольку свойства сводимости и псевдоконечной однородности изначально были предложены разными людьми независимо, и велась дискуссия о том, какое из свойств является более общим. Еще одно следствие – это

СЛЕДСТВИЕ 2. *Теория обладает вторым свойством изолированности тогда и только тогда, когда она обладает вторым свойством псевдоконечной однородности.*

Это также интересный результат, потому что для первых свойств изолированности и псевдоконечной однородности такое утверждение неверно (см. [6]): существуют теории, например, теория системы $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, <, +)$, обладающие первым свойством псевдоконечной однородности, но не имеющие первого свойства изолированности.

5. Заключение. Подводя итог, мы можем изобразить следующую схему зависимости различных свойств теорий, связанных с коллапсом к порядку:

Как показано в [6], первое свойство изолированности является на самом деле более узким, чем первое свойство псевдоконечной однородности. Интересующий нас главный нерешенный

ВОПРОС 1. *Существуют ли теории, обладающие свойством коллапса к порядку, но не сводимые? Иными словами, является ли критерий сводимости необходимым?*

Более частный вопрос:

ВОПРОС 2. *Существуют ли теории, обладающие свойством сводимости, но не имеющие первого свойства псевдоконечной однородности? Или эти два свойства являются эквивалентными?*

Автор выражает благодарность профессору М. А. Тайцлину за ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. F. Codd, "A relational model for large shared data banks", *Comm. of ACM*, **13** (1970), 377–387.
- [2] E. F. Codd, "Relational completeness of database sublanguages", *Database Systems*, ed. R. Rustin, Prentice-Hall, 1972, 33–64.
- [3] A. V. Aho, J. D. Ullman, "Universality of data retrieval languages", *Proc. of 6th Symp. on Principles of Programming Languages* (San Antonio, Tex., 1979), 1979, 110–120.
- [4] A. Chandra, D. Harel, "Computable queries for relational databases", *J. Computer System Sci.*, **21**:2 (1980), 156–178.
- [5] P. Kanellakis, G. Kuper, P. Revesz, "Constraint query languages", *J. Computer System Sci.*, **51**:1 (1995), 26–52.
- [6] O. V. Belegradek, A. P. Stolboushkin, M. A. Taitlin, "Extended order-generic queries", *Ann. Pure Appl. Logic*, **97**:1–3 (1999), 85–125.

- [7] С. М. Дудаков, “Трансляционный результат для расширений арифметики Пресбургера одноместной функцией, согласованной со сложением”, *Матем. заметки*, **76**:3 (2004), 362–371.
- [8] J. Baldwin, M. Benedikt, “Stability theory, permutations of indiscernibles, and embedded finite models”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:11 (2000), 4937–4969.
- [9] M. A. Taitlin, “A general condition for collapse results”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **113**:1–3 (2001), 323–330.
- [10] С. М. Дудаков, “Трансляционная теорема для теорий I -сводимых алгебраических систем”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **68**:5 (2004), 67–90.
- [11] Г. Кейслер, Ч. Ч. Чен, *Теория моделей*, Мир, М., 1997.
- [12] М. А. Тайцлин, “Ограниченные псевдоконечная однородность и изолированность”, *Вестн. Тверского гос. ун-та, сер. Прикладная матем.*, **2**:1 (2003), 5–15.
- [13] С. М. Дудаков, М. А. Тайцлин, “Трансляционные результаты для языков запросов в теории баз данных”, *УМН*, **61**:2(368) (2006), 3–66.

С. М. Дудаков

Тверской государственный университет

E-mail: Sergey.Dudakov@tversu.ru

Поступило

26.04.2006