Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов, О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 528–539

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3695>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:28:41

О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера

А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов

Мы исследуем различные новые свойства и примеры двумерного и одномерного соответствия Кричевера.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Целью этой статьи является показать различные новые свойства и примеры двумерного соответствия Кричевера. Эти примеры, с одной стороны, делают общую картину соответствия Кричевера более ясной, и с другой стороны, они должны показывать возможный путь обобщения одномерного соответствия Кричевера на случай размерности 2.

Также мы приводим явные примеры для одномерного соответствия Кричевера, которые объясняют некоторые неясности в статье [1], и приводим некоторые новые КП-уравнения, которые появляются как следствия из обобщенной КП-иерархии на двумерных локальных телах. Эти локальные тела были впервые рассмотрены в [2] и затем классифицированы в [3].

Во-первых, напомним, что соответствие Кричевера для алгебраических кривых – это следующая конструкция. Мы стартуем с данных $(C, p, \mathcal{F}, e_p, t)$, где C – неприводимая проективная алгебраическая кривая, p – гладкая k -точка на кривой C , t – формальный локальный параметр в точке p , $\mathcal{F}$ – когерентный пучок без кручения ранга r на кривой C , e_p – формальная локальная тривиализация пучка $\mathcal{F}$ в точке p . Рассмотрим вложение пространства $H^0(C \setminus p, \mathcal{F})$ в $K_p \otimes \mathcal{F}$. Это вложение дает нам отображение из наших данных во фредгольмовы подпространства пространства $k((t))^{\oplus r}$ посредством отождествления $K_p \otimes \mathcal{F} \simeq k((t))^{\oplus r}$ при фиксированных e_p и t . Это отображение называется *отображением Кричевера*, см. [4]–[6].

Мы теперь напомним соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей (см. [7], [8]). Мы стартуем с данных $(X, C, p, \mathcal{F}, e_p, t, u)$, где X – проективная неприводимая нормальная алгебраическая поверхность, C – обильный дивизор Картье на поверхности X , p – гладкая k -точка на поверхности X и кривой C , $\mathcal{F}$ – векторное расслоение ранга r на поверхности X , e_p – формальная локальная тривиализация расслоения $\mathcal{F}$ в точке p на поверхности X , u и t – локальные параметры в точке p такие, что $u = 0$ – локальное уравнение кривой C на поверхности X в точке p .

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00455), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-9969.2006.1), программы INTAS (грант № 05-100000-8118), а также DFG-проекта “Глобальные методы в комплексной геометрии”. Кроме того, работа второго автора поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 04-01-00702) и Фондом содействия отечественной науке.

По таким данным канонически строится k -подпространство W в сумме двумерных локальных полей $k((t))((u))^{\oplus r}$.

Если коротко, то эта конструкция состоит в следующем. По данным $p \in C \subset X$ мы можем канонически построить двумерное локальное поле $K_{p,C}$, которое изоморфно полю $k((t))((u))$ после фиксирования локальных параметров u и t (см. [9]–[12]). Рассмотрим подполе $K_C \subset K_{p,C}$, которое является пополнением поля рациональных функций на поверхности X по нормированию, определяемому кривой C , и подкольцо $B_p = \varinjlim_n \widehat{\mathcal{O}}_p / u^n$, где $\widehat{\mathcal{O}}_p$ – полное локальное кольцо точки p на поверхности X . (Кольцо B_p не зависит от выбора локального параметра u). Теперь мы имеем

$$W = \bigcap_{q \in C, q \neq p} (B_q \otimes \mathcal{F}) \cap (K_C \otimes \mathcal{F}).$$

Из вложения пространства $K_C \otimes \mathcal{F}$ в $K_{p,C} \otimes \mathcal{F}$ мы имеем вложение пространства W в $k((t))((u))^{\oplus r}$ при помощи выбранных e_p , t и u .

Отметим также, что соответствие Кричевера было обобщено на алгебраические многообразия высших размерностей в работе [13] при помощи многомерных локальных полей.

2. Некоторые явные примеры двумерного соответствия Кричевера.

В этом пункте мы вычислим некоторые примеры двумерного соответствия Кричевера на $\mathbb{P}^2$.

В [7] был приведен пример для поверхности $X = \mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(x : y : z)$, кривая C задается уравнением $z = 0$, точка p есть $(1 : 0 : 0)$, расслоение $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, локальные параметры $t = y/x$, $u = z/x$. Тогда подпространство $W = k[t^{-1}]((t^{-1}u))$.

Для наших примеров нам будет нужна следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Предположим, что имеется обильный эффективный дивизор D на поверхности X такой, что $D \cdot C = tr$ для некоторого натурального t , и аффинная кривая $C \setminus p$ задается уравнением $f = 0$ на аффинной поверхности $X \setminus D$ для некоторого элемента $f \in k[X \setminus D]$. Выберем любые элементы $y_1, \dots, y_l \in k[X \setminus D]$ такие, что их образы в $k[C \setminus p]$ порождают это кольцо (такие элементы y_i всегда существуют). Пусть канонически элементы $y_1, \dots, y_l, f \in K_{p,C}$. Тогда мы имеем*

$$W = k[y_1, \dots, y_l]((f)) \subset K_{p,C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует очень легко из определения подпространства W и тех фактов, что $K_C = k(C)((f))$ и $B_q = \varinjlim_n \widehat{\mathcal{O}}_q / f^n$ для любой точки $q \in C$, $q \neq p$.

Теперь мы применим эту лемму к случаю $X = \mathbb{P}^2$. Мы рассмотрим случай квадратичной кривой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Рассмотрим поверхность $X = \mathbb{P}^2$ с однородными координатами $(x : y : z)$. Пусть кривая C задается уравнением $y^2 + z^2 - 2xz = 0$ и точка $p = (1 : 0 : 0)$. Пусть локальные параметры $t = y/x$, $u = (y/x)^2 + (z/x)^2 - 2z/x$. Тогда для пучка $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ мы имеем*

$$W = k[\alpha] \left(\left(\frac{\alpha^2}{t^2} u \right) \right), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{t(1 + (1 + u - t^2)^{1/2})}{t^2 - u}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы применить лемму 1, мы рассмотрим кривую D , которая является касательной прямой к кривой C в точке p . Тогда кривая D задается уравнением $z = 0$ и $D \cdot C = 2p$. Теперь в аффинной области $z \neq 0$ мы имеем уравнение $f = (y/z)^2 + 1 - 2x/z$. Отметим, что $f = ux^2/z^2$, и $k[C \setminus p] = k[y/z]$. Обозначим $\alpha = y/z$. Тогда из леммы 1 мы получим, что $W = k[\alpha]((u\alpha^2/t^2))$. Теперь мы вычислим α . Из выражения для u мы имеем, что $u = t^2 + (t/\alpha)^2 - 2t/\alpha$. Отсюда $t/\alpha = 1 + (1 + u - t^2)^{1/2}$ или $t/\alpha = 1 - (1 + u - t^2)^{1/2}$. Но $t/\alpha = z/x$ имеет нуль порядка 2 в точке p после ограничения на кривую C . Поэтому для t/α подходит второй вариант, и отсюда мы получаем формулу из условия предложения. Лемма доказана.

Заметим, что для любой квадрики на $\mathbb{P}^2$ мы можем взять касательную к точке и применить лемму 1.

Теперь мы рассмотрим случай произвольной кривой C степени m на $\mathbb{P}^2$. Предположим, что существует точка $p \in C$ такая, что касательная прямая D к кривой C в точке p имеет свойство $D \cdot C = mp$.

Например, если C – кубическая кривая, то такая точка p всегда существует. (Но для случая кривой четвертого порядка, этот факт уже не верен: для общей кривой четвертого порядка такая точка не существует.)

Выберем однородные координаты $(x : y : z)$ на $\mathbb{P}^2$ такие, что прямая D задается уравнением $z = 0$ и точка p есть $(1 : 0 : 0)$. Тогда мы получаем, что аффинная кривая $C \setminus p$ на аффинной поверхности $X \setminus D$ задается при помощи уравнения $f(x/z, y/z) = 0$. Поэтому мы можем выбрать локальные параметры $u = (z/x)^m f$ и ty/x . Также образы элементов x/z и y/z порождают кольцо $k[C \setminus p]$. Отсюда по лемме 1 для пучка $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ мы получаем

$$W = k[\beta, \beta t]((\beta^m u)), \quad (1)$$

где $\beta = x/z$ определяется из уравнения $f(\beta, \beta t) = 0$ и условия, что β после ограничения на кривую C имеет полюс порядка m .

Определим носитель k -подпространства W из $k((t))((u))$ как замкнутое k -подпространство в $k((t))((u))$, порожденное всеми мономами, которые являются младшими степенями элементов из W .

Отметим, что подобные подпространства играют важную роль в случае соответствия Кричевера для алгебраических кривых. Например, “пробелы” между мономами отрицательных степеней – это “лакуны Вейерштрасса”, и их количество равно роду кривой. Также, в этом случае из носителя подпространства, которое приходит из геометрических данных, можно восстановить группы когомологий изначального пучка на кривой.

Если мы интересуемся k -подпространствами из $k((t))((u))$, которые являются образами соответствия Кричевера для алгебраических поверхностей, то имеет смысл исследовать возможные носители таких подпространств. Но сразу же отметим, что не все свойства переносятся из случая алгебраических кривых. Так, из носителя подпространства мы не можем более восстановить группы когомологий изначального пучка на поверхности. (Например, мы ничего не можем узнать про группу когомологий H^1 из носителя подпространства.)

Теперь из явных вычислений, приведенных выше, мы имеем некоторые примеры подпространств-носителей, которые появляются из соответствия Кричевера для алгебраических поверхностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Рассмотрим те же самые условия, как в формуле (1). Тогда носитель такого подпространства W есть замкнутое подпространство, порожденное всеми мономами вида $t^i u^j$ с $i \leq -m^2 j$, за исключением мономов*

$$t^{-\alpha_1 - m^2 l} u^l, \quad \dots, \quad t^{-\alpha_g - m^2 l} u^l,$$

где i, j и l любые целые числа, а натуральные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ являются лагунами Вейерштрасса для кривой из наших данных.

Доказательство следует из прямого применения формулы (1). В этом случае $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ — это натуральные числа, которые не могут быть получены линейными комбинациями с целыми неотрицательными коэффициентами натуральных чисел m и $m - 1$ (g — это род кривой).

3. Кольцо стабилизаторов k -подпространства в двумерном локальном поле. Этот пункт является одним из первых шагов по направлению к явному описанию образов двумерного отображения Кричевера, т.е. определению k -подпространств в поле $k((t))(u)$, которые лежат в образе двумерного отображения Кричевера.

Напомним случай соответствия Кричевера для кривых (см. [4]). Для любого фредгольмового k -подпространства в $k((t))$, т.е. для k -подпространства W такого, что $\dim_k W \cap \mathcal{O} < \infty$ и $\dim_k k((t))/(W + \mathcal{O}) < \infty$, где $\mathcal{O} = k[[t]]$, рассматривается кольцо

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in k((t)) : a \cdot W \subset W\}.$$

Тогда кольцо A конечно порождено над полем k , и либо $A = k$, либо кольцо A имеет размерность 1 по Круллю.

Во втором случае подпространство W находится в образе отображения Кричевера, а именно: искомая кривая $C = \text{Proj}(\bigoplus_n A \cap t^{-n} \mathcal{O})$, искомый пучок $\mathcal{F} = \text{Proj}(\bigoplus_n A \cap t^n \mathcal{O})$, искомая точка p появляется из данной фильтрации $A \cap t^n \mathcal{O}$ кольца A , t есть искомый формальный локальный параметр в точке p и $1 \in k((t))$ есть искомая формальная тривиализация пучка $\mathcal{F}$. Более того, изначальные k -подпространства A и W появляются как образы отображения Кричевера построенных геометрических данных $(C, p, \mathcal{O}_C, 1, t)$ и $(C, p, \mathcal{F}, e_p, t)$ соответственно. Отметим, что это описание связано с описанием коммутативных подколец в кольце дифференциальных операторов одной переменной, т.е. с “парами Шура”, см. [4].

Напомним, что *эйлерова характеристика* фредгольмова подпространства $W \subset k((t))$ есть

$$\chi(W) = \dim_k W \cap \mathcal{O} - \dim_k k((t))/(W + \mathcal{O}).$$

Рассмотрим теперь случай двумерного локального поля. Напомним, что двумерное локальное поле имеет по определению два нормирования ν и $\bar{\nu}$, где ν — дискретное нормирование ранга 1 на двумерном локальном поле и $\bar{\nu}$ — дискретное нормирование ранга 1 на поле вычетов двумерного локального поля. Пусть пространство $V = k((t))(u)$, и определим подпространства $\mathcal{O}_1 = k((t))[[u]]$, $\mathcal{O}_2 = k[[t]]((u))$. Для любого целого n , для любого k -подпространства $W \subset V$ положим

$$W(n) = (t^n \mathcal{O}_1 \cap W)/(t^{n+1} \mathcal{O}_1 \cap W).$$

Для любого коммутативного кольца $B \supset k$ мы скажем $\text{trdeg}_k B = m$, если m — это максимальное число алгебраически независимых элементов кольца B над полем k .

ТЕОРЕМА 1. Пусть W – k -подпространство в пространстве V такое, что для любого целого числа n пространство $W(n)$ является фредгольмовым подпространством в одномерном локальном поле, и $\chi(W(n)) = a + bn$, где $b < 0$. Пусть кольцо A – это k -подпространство пространства V такое, что $A \supset k$, $A \cdot W \subset W$. Тогда

а) для любого элемента $a \in A$ мы имеем $\bar{\nu}(a) \leq b\nu(a)$;

б) $\text{trdeg}_k \text{Frac}(A \cap \mathcal{O}_2) \leq 2$, и поле $\text{Frac}(A \cap \mathcal{O}_2)$ конечно порождено над основным полем k .

(Для любого коммутативного кольца B без делителей нуля через $\text{Frac } B$ мы обозначаем его поле частных.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Предположим обратное. Тогда существует элемент $x \in A$ такой, что $\bar{\nu}(x) > b\nu(x)$. Мы имеем $x \cdot W \subset W$ и $x \cdot W(0) \subset W(m)$. Легко увидеть, что $\chi(x \cdot W(0)) = \chi(W(0)) + \bar{\nu}(x)$. Теперь мы имеем

$$\chi(W(m)) = a + bm < a + \bar{\nu}(x) = \chi(W(0)) + \bar{\nu}(x) = \chi(x \cdot W(0)) \leq \chi(W(m)),$$

т.е. противоречие.

б) Вместо этого случая мы докажем более общий результат.

ЛЕММА 2. Пусть B – подкольцо в двумерном локальном поле $V = k((t))((u))$ такое, что $k \subset B$ и выполняется следующее условие: для каждого элемента $a \in B$ мы имеем $0 \leq \bar{\nu}(a) \leq -\pi\nu(a)$, $\pi > 0$. Тогда $\text{trdeg}_k \text{Frac } B \leq 2$ и поле $\text{Frac } B$ конечно порождено над основным полем k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подпространство

$$\Delta(N) = \{a \in B \mid \nu(a) > -N\},$$

где целое число $N > 0$. Отметим, что это подпространство имеет конечную размерность над полем k и эта размерность не больше, чем πN^2 .

В самом деле, если эта размерность больше, чем πN^2 , то кольцо B должно содержать элемент x такой, что $\bar{\nu}(x) > -\pi\nu(x)$, получаем противоречие.

Заметим, что $\text{trdeg}_k B < 2$, если и только если $\bar{\nu}(a) = l\nu(a)$ для некоторой константы l и всех элементов $a \in B$. В самом деле, если имеются два элемента a, b такие, что последнее условие не выполняется, то они должны быть алгебраически независимы, так как младшие мономы этих элементов алгебраически независимы. Обратно, если $\bar{\nu}(a) = l\nu(a)$ для всех $a \in B$, то носители (мономы младших степеней) всех элементов из B лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, и поэтому можно применить аргументы из, например, [4; предложение 3.2.], чтобы получить $\text{trdeg}_k B < 2$.

Предположим теперь, что $\text{trdeg}_k B \geq 2$. Выберем два элемента $a, b \in B$ такие, что $\bar{\nu}(a)/\nu(a) \neq \bar{\nu}(b)/\nu(b)$. Это означает, что их носители не лежат на одной прямой, которая проходит через начало координат. Эти элементы существуют, так как $\text{trdeg}_k B \geq 2$ и вследствие аргументов из предыдущего абзаца. Они алгебраически независимы. Мы можем оценить размерность подпространства, порожденного над полем k степенями элементов a, b , которые лежат в подпространстве $\Delta(N)$ для некоторого N . Ясно, что эта размерность больше, чем

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{N}{\nu(a)} - 1 \right) \left(-\frac{N}{\nu(b)} - 1 \right) = eN^2 + lN + r$$

для некоторых действительных чисел e , l , r и для каждого достаточно большого числа N . (Для получения этой оценки мы рассматриваем параллелограмм, построенный по векторам, выходящими из начала координат и заканчивающимися в точках $a^{[-N/\nu(a)]}$ и $b^{[-N/\nu(a)]}$ соответственно.)

Теперь предположим, что поле $\text{Frac } B$ имеет бесконечную размерность над полем $\text{Frac } k[a, b]$. Тогда возьмем M линейно независимых над кольцом $k[a, b]$ элементов $a_1, \dots, a_M$, где число M удовлетворяет условию $Me > \pi$. Без потери общности мы можем предположить, что $\nu(a_1) \leq \nu(a_i)$ для всех i . Так как размерность подпространства, порожденного над полем k степенями элементов a, b , которые лежат в подпространстве $\Delta(N + M\nu(a_1))$, больше, чем $e(N + M\nu(a_1))^2 + l(N + M\nu(a_1)) + r$ для каждого достаточно большого числа N , то мы получим, что размерность подпространства, порожденного над полем k элементами $a_1, \dots, a_M$, умноженными на степени элементов a, b , лежащих в подпространстве $\Delta(N + M\nu(a_1))$, больше, чем

$$M(e(N + M\nu(a_1))^2 + l(N + M\nu(a_1)) + r)$$

для каждого достаточно большого числа N . Последнее подпространство находится внутри пространства $\Delta(N)$. С другой стороны, так как $Me > \pi$, то для каждого достаточно большого числа N мы имеем

$$M(e(N + M\nu(a_1))^2 + l(N + M\nu(a_1)) + r) > \pi N^2 > \dim_k \Delta(N).$$

Мы получили противоречие. Следовательно, в этом случае, поле $\text{Frac } B$ имеет конечную размерность над полем $\text{Frac } k[a, b]$, поэтому $\text{trdeg}_k \text{Frac } B = 2$ и поле $\text{Frac } B$ конечно порождено над полем k .

Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Как мы видели в доказательстве леммы, $\text{trdeg}_k B = 1$, если и только если носители всех элементов из кольца B лежат на одной прямой, которая проходит через начало координат. (Более того, рассуждая как в [4; предложение 3.2], можно показать, что кольцо B конечно порождено над полем k и имеет размерность 1 по Круллю.)

Если $\text{trdeg}_k B = 0$, то $B = k$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существенно, что в теореме 1 мы рассматриваем пересечение $A \cap \mathcal{O}_2$. Для самого кольца A пункт б) теоремы 1 может быть не верен, как показывает следующий пример.

Рассмотрим подпространство $W = \{a \in V \mid \bar{\nu}(a) \leq -\nu(a)\}$. Можно проверить, что подпространство W удовлетворяет условиям теоремы 1, и что $A = W$. Но так как кольцо A содержит подполе $k((ut^{-1}))$, то поле $\text{Frac } A$ имеет бесконечную степень трансцендентности над полем k .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Мы рассматриваем кольцо $A \cap \mathcal{O}_2$ в теореме 1, так как это кольцо является образом аффинного кольца $H^0(X \setminus C, \mathcal{O}_X)$, когда пара (A, W) есть образ геометрических данных $(X, C, p, \mathcal{O}_X, 1, t, u)$, $(X, C, p, \mathcal{F}, e_p, t, u)$ при отображении Кричевера. Нам нужно в точности это кольцо для теоремы восстановления геометрических данных; именно, искомая поверхность $X = \text{Proj}(\oplus_n (A \cap \mathcal{O}_2) \cap t^n \mathcal{O}_2)$, искомая кривая C возникает из фильтрации, индуцированной фильтрацией $t^n \mathcal{O}_2$ на $A \cap \mathcal{O}_2$, и искомая точка p возникает из одномерного соответствия Кричевера на кривой C , которое задается пространством $W(0)$ (см. [7]).

Также пространство $W(n)$ есть образ пучка $\mathcal{F}|_C \otimes N_{C/X}^{\otimes -n}$ при соответствии Кричевера на кривой C . По теореме Римана–Роха, примененной к кривой C , мы получаем эйлерову характеристику

$$\chi(N_{C/X}^{\otimes -n}) = 1 - g(C) + \deg(\mathcal{F}) - n \deg N_{C/X}.$$

Кроме того, $N_{C/X} = \mathcal{O}(C \cdot C)$. Из обильности дивизора C мы имеем $\deg N_{C/X} > 0$. Это объясняет условие $\chi(W(n)) = a + bn$, $b < 0$, из теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если k -подпространство W является образом геометрических данных $(X, C, p, \mathcal{F}, e_p, t, u)$ при отображении Кричевера, то из комплекса, вычисляющего группы когомологий, см. [7], [8], мы имеем

$$\begin{aligned} W \cap \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 &= H^0(X, \mathcal{F}), \\ \frac{W \cap (\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2)}{W \cap \mathcal{O}_1 + W \cap \mathcal{O}_2} &= H^1(X, \mathcal{F}), \\ \frac{V}{W + \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2} &= H^2(X, \mathcal{F}). \end{aligned}$$

Мы знаем, что размерности этих пространств над полем k конечны как размерности групп когомологий. Было бы интересно добавить эти условия конечномерности к условиям теоремы 1 и получить новые следствия для ответа на вопрос: находится ли k -подпространство $W \subset V$ в образе геометрических данных при отображении Кричевера?

4. К вопросу о вложении проективной прямой в бесконечномерное аффинное пространство. В работе [1; с. 13] был отмечен следующий любопытный факт: существует вложение универсального грассманиана Сато в бесконечномерное аффинное пространство. В этом пункте мы проясняем, является ли это вложение алгебраическим. Для этого мы исследуем пример, в котором указанное вложение ограничивается на проективную прямую в универсальном грассманиане Сато.

Напомним сначала некоторые хорошо известные факты о грассманиане Сато, а также конструкцию отображения вложения из работы [1].

Пусть $V = k((z))$ – поле лорановских степенных рядов с фильтрацией $V(n) = z^n k[[z]]$. Положим $V_1 = V(1)$.

Через $\text{Gr}(V)$ обозначим множество таких подпространств W в V , что комплекс

$$W \oplus V_1 \rightarrow V$$

является фредгольмовым. Указанное множество обладает структурой бесконечномерного проективного многообразия, компоненты связности которого занумерованы значениями эйлеровой характеристики комплекса. Мы будем работать лишь с “нулевой” компонентой связности $\text{Gr}_0(V)$.

Рассмотрим теперь тело $P = k((x))((\partial^{-1}))$ формальных псевдо-дифференциальных операторов с коэффициентами в поле $k((x))$. Это тело является левым $k((x))$ -модулем всех сумм вида

$$L = \sum_{i > \infty}^n a_i \partial^i, \quad a_i \in k((x)),$$

с умножением, определяемым согласно правилу Лейбница.

Аналогичным образом определяется кольцо

$$E = k[[x]]((\partial^{-1})), \quad E \subset P.$$

Легко проверяется, что P и E – ассоциативные кольца (см. подробности в работе [2]).

Существует разложение

$$E = E_+ + E_-,$$

где $E_- = \{L \in E : L = \sum_{n < 0} a_n \partial^n\}$ и E_+ состоит из операторов, содержащих только неотрицательные степени ∂ . Элементы из $E_+ =: D$ – это обыкновенные дифференциальные операторы, элементы из E_- называются *операторами Вольтерра*.

Отображение $E \rightarrow E/Ex = V$ (мы отождествляем образ ∂^{-1} с z) определяет линейное действие кольца E на V и на $\text{Gr}(V)$. Отображение $E \rightarrow V$ называется *отображением Сато*.

Введем понятие стандартного подпространства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть S – подмножество в $\mathbb{Z}$, $S := \{\sigma(0), \sigma(-1), \sigma(-2), \dots\}$, где $\sigma(-i) \in \mathbb{Z}$, $\sigma(-i) = -i$ при $i \gg 0$.

Подпространства

$$V^S := \bigoplus_{l \in \mathbb{N} \cup 0} k \cdot z^{\sigma(-l)} \subset V, \quad V^S \in \text{Gr}_0(V),$$

называются *стандартными* подпространствами. Обозначим подпространство V^{S_0} , где $S_0 = \{0, -1, -2, \dots\}$, через W_0 .

В работе [14] доказана следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Существует единственный оператор R со свойством $RV^S = W_0$, а именно:*

$$R = \partial^{-m-1}(x\partial - \sigma(0))(x\partial - (\sigma(-1) + 1))(x\partial - (\sigma(-2) + 2)) \cdots (x\partial - (\sigma(-m) + m)),$$

где m – максимальное число со свойством $\sigma(-m) - m \neq 0$.

В работе [15] было введено понятие квазирегулярного оператора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{E}_K^{(0)}$, $K = k((x))$, – группа приведенных (т.е. со старшим коэффициентом равным 1) операторов степени ноль из кольца P .

Оператор $W \in \mathcal{E}_K^{(0)}$ называется *квазирегулярным*, если существуют такие числа $m, n \in \mathbb{N}$, что $x^m W$ и $W^{-1}x^n$ принадлежат E . Обозначим множество всех квазирегулярных операторов через $\mathcal{R}$.

Теперь мы можем определить отображение $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \text{Gr}_0(V)$. Положим

$$\gamma(W) = (W^{-1}x^n)W_0, \quad W \in \mathcal{R}.$$

Поскольку $x \cdot W_0 = W_0$, то это определение корректно, т.е. не зависит от выбора n . Ясно, что $\gamma(W) \in \text{Gr}_0(V)$.

В работе [14] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. *Отображение $\gamma: \mathcal{R} \rightarrow \text{Gr}_0(V)$ является биекцией.*

В работе [1; с. 13] было отмечено, что $\mathcal{E}_K^{(0)}$ – бесконечномерное аффинное пространство и $\mathcal{R}$ вложено в него. (Более правильно говорить, что $\mathcal{E}_K^{(0)}$ является индуктивным пределом бесконечномерных аффинных пространств.) Было также отмечено, что в силу теоремы существует вложение универсального грассманиана Сато в это аффинное пространство. Чтобы проверить это утверждение мы приводим ниже явное вычисление этого отображения для проективной прямой, лежащей на грассманиане Сато.

Рассмотрим множество фредгольмовых подпространств

$$R = \left\{ W(\alpha, \beta) \subset V, \quad W(\alpha, \beta) = \bigoplus_{l=1}^{\infty} k \cdot z^{-l} \oplus k \cdot (\alpha + \beta z) \right\},$$

где $\alpha, \beta \in k$. Очевидно, что R – проективная прямая в $Gr_0(V)$ с координатами $(\alpha : \beta)$.

Рассмотрим операторы $\tilde{S}(\alpha, \beta) = \alpha + \beta x + \beta \partial^{-1}$. Имеем $\tilde{S}(\alpha, \beta) \in E$. Заметим, что $\tilde{S}(\alpha, \beta)W_0 = W(\alpha, \beta)$ для любой пары (α, β) . В случае $\alpha \neq 0$ определим оператор $S(\alpha, \beta) = \alpha^{-1}\tilde{S}(\alpha, \beta)(1 + \beta/\alpha x)^{-1}$. Так как $(1 + \beta/\alpha x)W_0 = W_0$, имеем $S(\alpha, \beta)W_0 = W(\alpha, \beta)$. Заметим, что $S \in \mathcal{E}_K^{(0)} \cap E$. В случае $\alpha = 0$ оператор $\beta^{-1}\tilde{S}(\alpha, \beta)$ можно записать в форме $H(\alpha, \beta)^{-1}x$, где $H(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}_K^{(0)}$, $H(\alpha, \beta) = (1 + \partial^{-1}x^{-1})^{-1} = 1 - x^{-1}\partial^{-1} + \dots$. Таким образом, мы получаем

$$\gamma^{-1}(W(\alpha, \beta)) = \begin{cases} S(\alpha, \beta)^{-1} = 1 - \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\beta^2}{\alpha^2}x^2 + \dots \right) \partial^{-1} + \dots, & \text{если } \alpha \neq 0, \\ H(\alpha, \beta) = 1 - x^{-1}\partial^{-1} + \dots, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь две координатные функции: аффинное пространство $\mathcal{E}_K^{(0)}$ имеет координаты a_{ij} , где a_{ij} – коэффициенты ряда $1 + \sum_{i,j} a_{ij}u^i\partial^{-j}$ (произвольного элемента из $\mathcal{E}_K^{(0)}$). Для нашей проективной прямой мы получаем следующие координаты при вложении:

$$a_{-1,1} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \neq 0, \\ -1, & \text{если } \alpha = 0, \end{cases}$$

$$a_{0,1} = \begin{cases} -\beta/\alpha, & \text{если } \alpha \neq 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Эти функции не непрерывны! Отсюда следует, что вложение универсального грассманиана Сато в аффинное пространство является лишь теоретико-множественным отображением.

5. Новые уравнения типа КП в телах. В этом пункте мы даем ответ на вопрос, поставленный в работе [2]. Напомним, что классическая иерархия КП строится в кольце псевдо-дифференциальных операторов $P = k((x))((\partial^{-1}))$. Это кольцо является телом. Идея теперь состоит в том, чтобы рассмотреть другие тела вместо этого. Ниже мы исследуем, можно ли получить на этом пути какие-либо новые нетривиальные обобщения иерархии КП, используя для этого список из известной классификации двумерных локальных тел. В частности, мы приводим ряд новых уравнений типа КП.

Напомним, что в работе [2] Паршин выделил класс некоммутативных локальных полей и показал, что эти объекты обладают многими свойствами коммутативных полей. Он определил тело формальных псевдо-дифференциальных операторов от n переменных и изучил некоторые их свойства. При этом была поставлена проблема классификации всех локальных тел. В работе [3] эта проблема была решена для $n = 2$. Жегловым был получен явный список тел с точностью до изоморфизма, содержащий в том числе классическое тело псевдо-дифференциальных операторов P , упоминавшееся в предыдущем пункте этой статьи. Следующая теорема была доказана в [3].

ТЕОРЕМА 3. (I) Пусть K – двумерное локальное тело с коммутативным телом вычетов. Оно расщепляется¹, если канонический автоморфизм² α удовлетворяет условию $\alpha^n \neq \text{Id}$ для всех n . Если это условие не выполняется, то можно привести примеры нерасщепимых тел.

(II) Пусть K, K' – тела из пункта (I). Предположим, что $\alpha'^n \neq \text{Id}$ для всех n . Тогда

- (a) K изоморфно двумерному локальному телу $\overline{K}((z))$, где $za = a^\alpha z$, $a \in \overline{K}$, и $\overline{K}$ – одномерное локальное поле с полем вычетов k ;
- (b) K и K' изоморфны, если и только если $k \cong k'$ и существует изоморфизм $f: \overline{K} \rightarrow \overline{K}'$ такой, что $\alpha = f^{-1}\alpha'f$;
- (c) если $\text{char } K = \text{char } k$, $\text{char } K' = \text{char } k'$ и k, k' – алгебраически замкнутые поля характеристики 0, то K изоморфно K' , если и только если $k \cong k'$ и $(a_1, i_\alpha, y(\alpha)) = (a'_1, i_{\alpha'}, y(\alpha'))$.

(III) Пусть K, K' – расщепимые двумерные локальные тела характеристики 0, $k \subset Z(K)$, $k' \subset Z(K')$ и $\alpha^n = \text{Id}$, $\alpha'^{n'} = \text{Id}$ для некоторых натуральных $n, n' \geq 1$. Тогда

- (a) Тело K изоморфно двумерному локальному телу $k((u))((z))$, где

$$zuz^{-1} = \xi u + \delta'_{i_n}(u)z^{i_n} + \delta'_{2i_n}(u)z^{2i_n},$$

$$\text{где } \xi^n = 1, i_n = i_n(0, \dots, 0),$$

$$\delta'_{i_n}(u) = cu^{r_n}, \quad c \in k^*/(k^*)^e, \quad e = (r_n - 1, i_n),$$

$$\delta'_{2i_n}(u) = \left(a_n(0, \dots, 0) + r_n \frac{i_n + 1}{2} \right) u^{-1} (\delta'_{i_n}(u))^2$$

(i_n, r_n, a_n были определены в [3]). Если $n = 1$, $i_n = \infty$, то K коммутативно.

- (b) Тело K изоморфно K' , если и только если $k \cong k'$ и множества $(n, \xi, i_n, r_n, c, a_n)$, $(n', \xi', i'_n, r'_n, c', a'_n)$ совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 1. Всякое двумерное локальное тело K с множеством

$$(n, \xi, i_n, r_n, c, a_n)$$

является конечномерным расширением тела с множеством $(1, 1, 1, 0, 1, a)$.

¹Локальное тело называется расщепимым, если существует сечение гомоморфизма вычета.

²Канонический автоморфизм локального тела определяется как автоморфизм тела вычетов, индуцированный внутренним автоморфизмом $\text{Ad}(z)$ тела, где z – произвольный параметр.

Для каждого тела из списка классификации можно определить разложение $K = K_+ + K_-$, где $K_- = \{L \in K : \text{ord}(L) < 0\}$ ³ и K_+ состоит из операторов, содержащих только неположительные (≤ 0) степени z и “КП-иерархию” в форме Лакса:

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [(L^n)_+, L],$$

где $L \in z^{-1} + K_- \otimes k[[\dots, t_m, \dots]]$. Пусть $L = z^{-1} + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$, где $u_m = u_m(u, t_1, t_2, \dots)$. Ниже мы будем писать $\partial/\partial t_n$ как ∂_n .

В случае, когда канонический автоморфизм α из классификационной теоремы 3 нетривиален, можно легко проверить, что наша “КП-иерархия” становится тривиальной в том смысле, что она может быть легко линеаризована и решена. Мы не будем приводить здесь вычисления этого.

Таким образом, можно предположить, что $\alpha = \text{id}$. В этом случае, если $i > 1$, мы имеем: $[(L^n)_+, L] = -[(L^n)_-, L] = 0 \pmod{\wp^i}$, где $\wp$ – идеал первого нормирования в K . Тогда, как и выше, “КП-иерархия” линейна и легко разрешима.

Итак, осталось рассмотреть случай $i = 1$. В этом случае имеем: $r = 0$ и $s = 1$ (см. [3]) и, следовательно, остается только один нетривиальный параметр a . Если $a = 0$, K изоморфно телу P обычных псевдо-дифференциальных операторов при $x = -u$, $\partial = z^{-1}$. Обозначим через $u', u'', \dots$ последовательные производные по x .

Для $n = 1$ получаем уравнение

$$\partial_1 u_1 = u'_1,$$

т.е. мы можем положить $t_1 = x$ для u_1 .

Выпишем теперь первые два уравнения для $n = 2$ и первое уравнение для $n = 3$:

$$\partial_2 u_1 = u''_1 + 2u'_2, \quad (2)$$

$$\partial_2 u_2 = 2u'_3 + 2u_1 u'_1 + u''_2 - a(2x^{-1}u'_2 + 2x^{-1}u''_1 - x^{-2}u'_1), \quad (3)$$

$$\partial_3 u_1 = u'''_1 + 3u'_2 + 3u'_3 + 6u_1 u'_1 + 3a(x^{-1}u''_1 - x^{-2}u'_1). \quad (4)$$

Введем следующее обозначение: $u = u_1(x, y, t)$, где $y = t_2$, $t = t_3$. Мы будем пользоваться также стандартными обозначениями $u_t, u_y, u_{yy}, \dots$ для частных производных.

Исключим u'_3 из уравнений (3) и (4). Получим

$$3u_{2y} - 2u_t = -6uu' - 3u''_2 - 2u''' - 3a(2x^{-1}u'_2 + x^{-2}u'). \quad (5)$$

Из уравнения (2) находим

$$u'''_2 = \frac{1}{2}(u''_y - u''''), \quad u'_{2y} = \frac{1}{2}(u_{yy} - u''_y).$$

Дифференцируя уравнение (5) по x и используя эти выражения получаем, наконец, новое нетривиальное уравнение КП:

$$(4u_t - u''' - 12uu')' = 3u_{yy} + 6a(2x^{-2}u'' - x^{-2}u_y - x^{-1}u''' + x^{-1}u'_y - 2x^{-3}u').$$

Легко видеть, что в случае $a = 0$ получается классическое уравнение КП (ср. также явные вычисления в работе [8]).

³У нас $\text{ord}(\sum_k a_k z^k) = \min\{k : a_k \neq 0\}$

Другие интересные обобщения иерархий КП, связанные с развитием соответствия Кричевера в высшие размерности (пп. 1–3), описаны в [16].

Мы благодарны А. Н. Паршину за стимулирующие замечания и обсуждения. Мы признательны Г. Курке, а также университету Гумбольда г. Берлина, где часть этой работы была сделана, за приятную атмосферу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Mulase, “Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition”, *Invent. Math.*, **92**:1 (1988), 1–46.
- [2] А. Н. Паршин, “О кольце формальных псевдодифференциальных операторов”, *Тр. МИАН*, **224**:1 (1999), 266–280; [arXiv:math.AG/9911098](#).
- [3] А. Б. Жеглов, “О структуре двумерных локальных тел”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:1 (2001), 25–60.
- [4] M. Mulase, “Category of vector bundles on algebraic curves and infinite dimensional Grassmannians”, *Int. J. Math.*, **1**:3 (1990), 293–342.
- [5] Г. Сигал, Дж. Вильсон, “Группы петель и уравнения типа КдФ”, дополнение к книге Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., 1990, 379–442.
- [6] Д. В. Осипов, “Бесконечномерный грассманиан Сато и когерентные пучки ранга 2 на кривых”, *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 81–94.
- [7] А. Н. Паршин, “Соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **35**:1 (2001), 88–90; [arXiv:math.AG/9911097](#).
- [8] A. N. Parshin, “Integrable systems and local fields”, *Comm. Algebra*, **29**:9 (2001), 4157–4181.
- [9] А. Н. Паршин, “К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты”, *Изв. АН СССР. Сер. Матем.*, **40**:4 (1976), 736–773.
- [10] T. Fimmel, A. N. Parshin, *An Introduction to the Higher Adelic Theory*, preprint.
- [11] A. Huber, “On the Parshin–Beilinson adeles for schemes”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **61** (1991), 249–273.
- [12] D. V. Osipov, “ n -dimensional local fields and adeles on n -dimensional schemes”, Lecture Notes Series of London Math. Soc. (to appear); [arXiv:math.AG/0508205](#).
- [13] Д. В. Осипов, “Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:2 (2001), 91–128; [arXiv:math.AG/0003188](#).
- [14] M. Noumi, Notes to the book by M. Sato, *Soliton equations and universal Grassmann manifold*, Sophia Kokyuroku in Mathematics, **18**, Sophia University, Tokyo, 1984, 74–75.
- [15] M. Sato, Y. Sato, “Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold”, *Nonlinear partial differential equations in applied science* (Tokyo, 1982), North-Holland Math. Stud., **81**, North-Holland, Amsterdam, 1983, 259–271.
- [16] A. B. Zhiglov, *Two dimensional KP systems and their solvability*, [arXiv:math-ph/0503067](#).

А. Б. Жеглов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: azheglov@mathematik.hu-berlin.de

Поступило

06.06.2006

Д. В. Осипов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: d_osipov@mi.ras.ru