Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Коняев, Об одном методе исследования устойчивости и оценки нормы решения, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 540–546

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:31:37

Об одном методе исследования устойчивости и оценки нормы решения

Ю. А. Коняев

Предлагается отличный от ранее известных метод (метод унитарных преобразований) исследования устойчивости и оценки нормы решения некоторых классов регулярных и сингулярно возмущенных начальных задач для неавтономных линейных и квазилинейных систем ОДУ с нормальной и “почти нормальной” матрицей, что является обобщением аналогичных теорем для соответствующих систем с постоянной матрицей (позволяя обходиться без традиционных достаточно громоздких методов, в том числе, без аппарата функций Ляпунова). Для специального класса сингулярно возмущенных задач указанный метод позволяет получить оценки нормы решения при наличии экспоненциального или степенного пограничного слоя, что дополняет известные ранее результаты.

Библиография: 12 названий.

Излагается отличный от ранее известного метод исследования устойчивости решения (и оценки его нормы) некоторых классов регулярных и сингулярно возмущенных задач для неавтономных линейных и квазилинейных систем ОДУ с нормальной или “почти нормальной” матрицей, что является обобщением известных теорем для аналогичных систем с постоянной матрицей [1]–[10] (нормальные матрицы определяются тождеством $A(t)A^*(t) \equiv A^*(t)A(t)$ [11], [12], где $A^*(t)$ – сопряженная матрица).

Для специального класса сингулярно возмущенных задач [9], [10] этот метод позволяет получить оценку нормы решения при наличии экспоненциального или неэкспоненциального пограничного слоя.

ТЕОРЕМА 1. *Тривиальное решение линейной системы*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(0) = x^0, \quad (1)$$

с непрерывной нормальной матрицей $A(t)$ в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, асимптотически устойчиво, если спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t) \leq \delta(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad t \geq 0, \quad a(t) = \int_0^t \delta(s) ds \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант № E00-10-158).

устойчиво при $a(t) \leq C, t \geq 0$, а в случае

$$\operatorname{Re} \lambda_j(t) \geq \delta(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad t \geq 0, \quad a(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом фиксированном $t \geq 0$ для любой нормальной матрицы $A(t)$ всегда существует [11], [12] унитарная матрица $U(t)$, $U^*(t)U(t) \equiv E$, $t \geq 0$, приводящая ее к диагональной матрице из ее собственных значений $\{\lambda_j(t)\}_1^n$, т.е. имеет место соотношение

$$U^*(t)A(t)U(t) = \Lambda(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)\}.$$

Как известно [7], квадрат нормы решения системы (1) удовлетворяет дифференциальному соотношению

$$\frac{1}{2} \frac{d|x|^2}{dt} = \operatorname{Re}(x^* A(t)x). \quad (3)$$

После унитарного преобразования правой части (3) $x = U(t)y$, $|x| = |y|$ (прямая замена здесь не проходит, так как матрица $U(t)$ может быть не дифференцируема!) с учетом (2) получим дифференциальное неравенство

$$\frac{1}{2} \frac{d|x|^2}{dt} = \operatorname{Re}(y^* U^*(t)A(t)U(t)y) = \operatorname{Re}(y^* \Lambda(t)y) = \operatorname{Re} \sum_1^n \lambda_j(t) |y_j|^2 \leq \delta(t) |y|^2 = \delta(t) |x|^2$$

и оценку $|x(t)| \leq |x(0)| \exp(a(t))$, откуда и следует асимптотическая устойчивость (или неустойчивость) тривиального решения. Для доказательства неустойчивости следует воспользоваться аналогичным неравенством обратного знака.

СЛЕДСТВИЕ 1. Аналог теоремы 1 имеет место и для квазилинейной системы $\dot{x} = A(x, t)x$ с непрерывной нормальной (при $|x| < R, t \geq 0$) матрицей $A(x, t)$. При этом ее тривиальное решение асимптотически устойчиво, если спектр $\{\lambda_j(x, t)\}_1^n$ матрицы $A(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j(x, t) &\leq \delta(t), \quad |x| < R, \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ a(t) &\equiv \int_0^t \delta(s) ds \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

устойчиво при $a(t) \leq C, t \geq 0$, и неустойчиво при

$$\operatorname{Re} \lambda_j(x, t) \geq \delta(t), \quad |x| < R, \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad a(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Тривиальное решение линейной $\dot{x} = A(t)x$ или квазилинейной системы $\dot{x} = A(x, t)x$ с непрерывной кососимметрической (или косоэрмитовой) матрицей всегда устойчиво, так как указанные матрицы, являясь нормальными, имеют чисто мнимый спектр (такие системы встречаются в теории гироскопов).

ТЕОРЕМА 2. Тривиальное решение системы $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ с “почти нормальной” матрицей в $\mathbb{C}^n$ (где $A(t)$ – нормальная и $B(t)$ – произвольная непрерывные матрицы) асимптотически устойчиво, если спектр $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ матрицы $A(t)$ и

норма матрицы $B(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j(t) &\leq \delta(t), \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ a(t) &= \int_0^t (\delta(s) + \|B(s)\|) ds \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

(в этом смысле матрица системы $(A(t) + B(t))$ является "почти нормальной"), и устойчиво при $a(t) \leq C, t \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом соотношения $x = U(t)y$ доказательство следует из дифференциального неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d|x|^2}{dt} &= \operatorname{Re}(x^* A(t)x) + \operatorname{Re}(x^* B(t)x) \leq \operatorname{Re}(y^* \Lambda(t)y) + \|B(t)\| |x|^2 \\ &\leq \delta(t) |y|^2 + \|B(t)\| |x|^2 \leq (\delta(t) + \|B(t)\|) |x|^2. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Тривиальное решение квазилинейной системы в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, $\dot{x} = (A(x, t) + B(t))x$ с нормальной матрицей $A(x, t)$ и непрерывной матрицей $B(t)$ асимптотически устойчиво, если спектр $\{\lambda_j(x, t)\}_1^n$ матрицы $A(x, t)$ и норма матрицы $B(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j(x, t) &\leq \delta(t), \quad |x| < R, \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ a(t) &= \int_0^t (\delta(s) + \|B(s)\|) ds \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

и устойчиво при $a(t) \leq C, t \geq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Тривиальное решение предыдущей системы асимптотически устойчиво, если спектр $\{\lambda_j(x, t)\}_1^n$ матрицы $A(x, t)$ и норма матрицы $B(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j(x, t) &\leq -\delta_0, \quad \delta_0 > 0, \quad |x| < R, \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \|B(t)\| &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3 (Обобщение теоремы Ляпунова о локальной асимптотической устойчивости по первому приближению). Тривиальное решение квазилинейной системы $\dot{x} = A(x, t)x + f(x, t)$ с непрерывной нормальной матрицей $A(x, t)$ и непрерывной функцией $f(x, t)$ в области $D = \{|x| < \delta < 1; t \geq 0\}$ асимптотически устойчиво, если спектр $\{\lambda_j(x, t)\}_1^n$ матрицы $A(x, t)$ и функция $f(x, t)$ удовлетворяют в области D условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j(x, t) &\leq -\delta_0, \quad \delta_0 > 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ |f(x, t)| &\leq C|x|^{1+\alpha}, \quad \alpha, C > 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично предыдущему и следует (с учетом соотношения $x = U(x, t)y$) из дифференциального неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d|x|^2}{dt} &= \operatorname{Re}(x^* A(x, t)x) + \operatorname{Re}(x^* f(x, t)) \leq \operatorname{Re}(y^* \Lambda(x, t)y) + C|x|^{2+\alpha} \\ &\leq (-\delta_0 + C|x|^\alpha) |x|^2 \leq (-\delta_1) |x|^2, \quad \delta_0 > \delta_1 > 0, \end{aligned}$$

и соответствующей оценки $|x(t)| \leq |x(0)| \exp(-\delta_1(t))$, что и требовалось.

Для линейной $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ и квазилинейной $\dot{x} = (A(x, t) + B(x, t))x$ систем с непрерывными нормальными матрицами имеет место некоторый аналог принципа суперпозиции (теорема 1 здесь неприменима, так как сумма нормальных матриц в общем случае не является нормальной!).

ТЕОРЕМА 4. *Тривиальное решение квазилинейной системы в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, $\dot{x} = (A(x, t) + B(x, t))x$ с непрерывными в области $D = \{|x| < R; t \geq 0\}$ нормальными матрицами $A(x, t)$ и $B(x, t)$ асимптотически устойчиво, если их спектр $\{\lambda_{Aj}(x, t)\}_1^n$ и $\{\lambda_{Bj}(x, t)\}_1^n$ удовлетворяет в области D условиям*

$$\operatorname{Re} \lambda_{Aj}(x, t) \leq \alpha(t), \quad \operatorname{Re} \lambda_{Bj}(x, t) \leq \beta(t), \quad j = \overline{1, n},$$

$$a(t) \equiv \int_0^t (\alpha(s) + \beta(s)) ds \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

устойчиво при $a(t) \leq C$, $t \geq 0$, а в случае

$$\operatorname{Re} \lambda_{Aj}(x, t) \geq \alpha(t), \quad \operatorname{Re} \lambda_{Bj}(x, t) \geq \beta(t), \quad j = \overline{1, n}, \quad a(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty,$$

неустойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы в области D всегда существуют унитарные матрицы $U(x, t)$ и $S(x, t)$ такие, что

$$U^*(x, t)A(x, t)U(x, t) \equiv \Lambda_A(x, t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{A1}(x, t), \dots, \lambda_{An}(x, t)\},$$

$$S^*(x, t)B(x, t)S(x, t) \equiv \Lambda_B(x, t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{B1}(x, t), \dots, \lambda_{Bn}(x, t)\}.$$

Далее, с учетом соотношений $x = U(x, t)p$, $x = S(x, t)q$ ($|x(t)| \equiv |p(t)| = |q(t)|$) асимптотическая устойчивость и устойчивость тривиального решения следует из дифференциального неравенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d|x|^2}{dt} &= \operatorname{Re}(x^*A(x, t)x) + \operatorname{Re}(x^*B(x, t)x) = \operatorname{Re}(p^*\Lambda_A(x, t)p) + \operatorname{Re}(q^*\Lambda_B(x, t)q) \\ &\leq \alpha(t)|p|^2 + \beta(t)|q|^2 = (\alpha(t) + \beta(t))|x|^2. \end{aligned}$$

Неустойчивость тривиального решения следует из аналогичного неравенства обратного знака.

ПРИМЕР 1. Устойчивость тривиального решения системы $\dot{x} = (A(t) + B(t))x$ с диагональной $A(t) = \operatorname{diag}\{a_1(t), \dots, a_n(t)\}$, $a_j(t) \leq 0$, $j = \overline{1, n}$, $t \geq 0$, и кососимметрической матрицей $B(t)$ доказана в работе [3; с. 23] с помощью функции Ляпунова (следует отметить, что общего алгоритма построения функции Ляпунова не существует). Применив теорему 4, получим этот же результат и при менее жестких ограничениях

$$\int_0^t a_j(s) ds \leq C, \quad j = \overline{1, n}, \quad t \geq 0.$$

ПРИМЕР 2. Для линейной системы [3; с. 156] $\dot{x} = A(t)x$, $A(t) = \{a_{jk}(t)\}_1^2$,

$$a_{11}(t) = -b + a \cos^2 bt, \quad a_{12}(t) = b - a \sin bt \cos bt,$$

$$a_{21}(t) = -b - a \sin bt \cos bt, \quad a_{22}(t) = -b + a \sin^2 bt$$

на двух страницах доказана неустойчивость тривиального решения при $b < a < 2b$, хотя спектр $\lambda_{1,2} = 0,5(a - 2b \pm \sqrt{a^2 - 4b^2})$ матрицы $A(t)$ является постоянным и лежит в левой полуплоскости.

Если матрицу системы $A(t)$ представить (после обозначения $\tau = bt$) в виде суммы двух нормальных матриц: $A = A_0 + B(\tau)$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_\tau = \begin{pmatrix} (-1 + C_0 \cos^2 \tau) & (C_0 \sin \tau \cos \tau) \\ (-C_0 \sin \tau \cos \tau) & (-1 + C_0 \sin^2 \tau) \end{pmatrix}, \quad C_0 = \frac{a}{b},$$

то можно воспользоваться теоремой 4 (так как кососимметрическая матрица A_0 имеет чисто мнимый спектр, а спектр матрицы $B(\tau)$ равен $\lambda_{B1} = -1$; $\lambda_{B2} = (C_0 - 1)$) и сразу сделать вывод, что тривиальное решение исходной системы асимптотически устойчиво при $a < b$, устойчиво при $a = b$ и неустойчиво в случае $b < a < 2a$.

ПРИМЕР 3. Квазилинейная система $\dot{x} = (E \sin t + A(x, t))x$ с кососимметрической матрицей $A(x, t)$ имеет устойчивое тривиальное решение, что доказано в работе [3; с. 68] с помощью достаточно громоздкого метода сравнения, этот результат сразу следует из теоремы 4 с учетом мнимости спектра матрицы $A(x, t)$ и соотношения $\int_0^t \sin \tau d\tau \leq 2$, $t \geq 0$.

При изучении сингулярно возмущенных начальных задач различных типов с малым параметром ε , например,

$$\varepsilon \dot{x} = A(t)x, \quad x(0, \varepsilon) = x^0, \quad t \in [0, 1], \quad (4)$$

$$(t + \varepsilon)^m \dot{y} = B(t)y, \quad y(0, \varepsilon) = y^0, \quad t \in [0, 1], \quad m = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$x, y \in \mathbb{C}^n, \quad n \geq 2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

возникают проблемы с доказательством существования единственного и ограниченного при $\varepsilon \rightarrow +\infty$ решения и с описанием структуры пограничного слоя в окрестности $t = 0$ (если он существует). Решение этих проблем существенно упрощается при наличии нормальных матриц $A(t)$ и $B(t)$.

Следует отметить, что термин сингулярность в данном случае означает, что решение предельной (при $\varepsilon = 0$) задачи может не удовлетворять начальному условию, при этом решение возмущенной задачи ($0 < \varepsilon < 1$) будет содержать особенность в окрестности $t = 0$, отражающую в общем случае наличие пограничного слоя, структура которого может быть описана в замкнутой аналитической форме методами работ [8]–[10]. Например, при наличии простого стабильного спектра $\{\lambda_{Aj}(t)\}_1^n$, $\{\lambda_{Bj}(t)\}_1^n$ матриц $A(t)$ и $B(t)$, удовлетворяющего условиям

$$\lambda_{Aj}(t) \neq \lambda_{Ak}(t), \quad \lambda_{Bj}(t) \neq \lambda_{Bk}(t), \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{1, n}, \quad t \in [0, 1],$$

$$\operatorname{Re} \lambda_{Aj}(t) \leq 0, \quad \lambda_{Bj}(t) \leq 0, \quad t \in [0, 1], \quad j = \overline{1, n},$$

решение указанных задач может быть записано в виде

$$x(t, \varepsilon) = S_0(t) \left(\sum_0^N H_k(t) \varepsilon^k \right) \exp \left(\varepsilon^{-1} \int_0^t \Lambda_A(s) ds \right) x^0 + O(\varepsilon^{N+1}),$$

$$S_0^{-1}(t) A(t) S_0(t) = \Lambda_A(t) = \operatorname{diag} \{ \lambda_{A1}(t), \dots, \lambda_{An}(t) \},$$

$$\begin{aligned}
y(t, \varepsilon) &= Q(\varepsilon)P(t + \varepsilon, \varepsilon) \left(1 + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_B(\varepsilon)} P^{-1}(\varepsilon, \varepsilon) Q^{-1}(\varepsilon) y^0, \\
Q^{-1}(\varepsilon) B(-\varepsilon) Q(\varepsilon) &= \Lambda_B(\varepsilon) = \text{diag}\{\lambda_{B1}(\varepsilon), \dots, \lambda_{Bn}(\varepsilon)\}, \\
A(t) &= \sum_0^\infty A_k t^n, \quad P(t + \varepsilon, \varepsilon) = \sum_0^\infty P_k(\varepsilon)(t + \varepsilon)^k, \quad |t| < 1 + 2\delta, \quad \delta > 0.
\end{aligned}$$

При исследовании на полуоси $\mathbb{R}^+$ более сложных квазилинейных сингулярно возмущенных задач вида (4), (5) с произвольной непрерывной нормальной в области $D = \{|x| < R; t \geq 0\}$ матрицей $A(x, t)$ и $B(x, t)$ (в частности, и для матриц с нестабильным спектром) возникают принципиальные трудности, которые все же могут быть преодолены с помощью изложенного алгоритма, позволяя получить оценку норм решения (с описанием структуры “усредненного” погранслоя).

ТЕОРЕМА 5. Для нормы решения сингулярно возмущенной квазилинейной задачи Коши вида (4) в случае, если спектр $\{\lambda_j(x, t)\}_1^n$ нормальной матрицы $A(x, t)$ удовлетворяет в области D неравенствам $\text{Re } \lambda_j(x, t) \leq \delta(t)$, $j = \overline{1, n}$, $t \geq 0$, справедлива оценка

$$|x(t, \varepsilon)| \leq |x^0| \exp(\varepsilon^{-1} a(t)), \quad a(t) = \int_0^t \delta(s) ds, \quad (6)$$

отражающая наличие экспоненциального погранслоя в окрестности $t = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом соотношения $x = U(x, t)y$, где

$$\begin{aligned}
U^*(x, t) A(x, t) U(x, t) &= \Lambda(x, t) = \text{diag}\{\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_n(x, t)\}, \\
U^*(x, t) &\equiv U^{-1}(x, t), \quad |x(t)| \equiv |y(t)|, \quad |x| < R, \quad t \geq 0,
\end{aligned}$$

имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2} \frac{d|x|^2}{dt} = \text{Re}(x^* A(x, t)x) = \text{Re}(y^* \Lambda(x, t)y) = \text{Re} \sum_1^n \lambda_j(x, t) |y_j|^2 \leq \delta(t) |y|^2 = \delta(t) |x|^2$$

и оценку (6), что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 5. Тривиальное решение исходной задачи асимптотически устойчиво при $a(t) = \int_0^t \delta(s) ds \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$, и устойчиво в случае $a(t) \leq C$, $t \geq 0$.

ТЕОРЕМА 6. Для нормы решения сингулярно возмущенной квазилинейной задачи Коши вида (5) в случае, если спектр $\{\lambda_j(y, t)\}$ нормальной матрицы $B(y, t)$ удовлетворяет в области D неравенствам $\text{Re } \lambda_j(y, t) \leq \delta(t)$, $j = \overline{1, n}$, $t \geq 0$, справедлива оценка

$$|y(t, \varepsilon)| \leq |y^0| \exp(b(t, \varepsilon)), \quad b(t, \varepsilon) = \int_0^t \frac{\delta(s) ds}{(s + \varepsilon)^m}, \quad (7)$$

отражающая наличие неэкспоненциального погранслоя в окрестности $t = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично предыдущему, соотношение $y = U(y, t)q$ позволяет записать дифференциальное неравенство

$$\frac{(t + \varepsilon)^m}{2} \frac{d|y|^2}{dt} = \text{Re}(y^* B(y, t)y) = \text{Re}(q^* \Lambda_B(y, t)q) \leq \delta(t) |y|^2$$

и оценку (7), что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Тривиальное решение исходной задачи асимптотически устойчиво при $b(t, \varepsilon) \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$, и устойчиво в случае $b(t, \varepsilon) \leq C$, $t \geq 0$, $0 < \varepsilon < 1$.*

СЛЕДСТВИЕ 7. *Аналог теорем 5 и 6 имеет место и при анализе указанных сингулярно возмущенных систем с “почти нормальной” матрицей.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967.
- [2] М. Розо, *Нелинейные колебания и теория устойчивости*, Наука, М., 1971.
- [3] Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, М., 1980.
- [4] Е. А. Барбашин, *Функции Ляпунова*, Наука, М., 1970.
- [5] Д. Р. Меркин, *Введение в теорию устойчивости движения*, Наука, М., 1987.
- [6] Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966.
- [7] Ю. А. Коняев, “Достаточные условия устойчивости решений некоторых классов ОДУ в критических случаях”, *Дифференц. уравнения*, **26**:4 (1990), 709–712.
- [8] Ю. А. Коняев, “Начальные и краевые задачи с особенностями”, *Дифференц. уравнения*, **32**:3 (1996), 419–421.
- [9] Ю. А. Коняев, Ю. С. Федоров, “Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных задач на полуоси”, *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 111–117.
- [10] Ю. А. Коняев, “Метод расщепления в теории регулярных и сингулярных возмущений”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 2000, № 6, 10–15.
- [11] В. В. Воеводин, *Вычислительные основы линейной алгебры*, Наука, М., 1977.
- [12] П. Ланкастер, *Теория матриц*, Наука, М., 1978.

Ю. А. Коняев

Российский университет дружбы народов

Поступило

15.01.2001

Исправленный вариант

03.02.2006