Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Ласурия, О приближении функций, заданных на всей оси, операторами типа Фейера в обобщенной гёльдеровой метрике, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 547–552

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:06:48

О приближении функций, заданных на всей оси, операторами типа Фейера в обобщенной гёльдеровой метрике

Р. А. Ласурия

В работе рассматриваются порядки приближений функций, заданных на всей действительной оси, операторами типа Фейера в банаховом пространстве, определенном так называемой обобщенной гёльдеровой метрикой.

Библиография: 5 названий.

1. Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $C(\mathbb{R})$ – пространство равномерно непрерывных и ограниченных на всей действительной оси функций $f(\cdot)$ с нормой

$$\|f\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|.$$

Обозначим через $H_{\omega^*}(\mathbb{R})$ множество всех функций $f(\cdot) \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} h^{\omega^*}(f; x, y) < \infty,$$

где

$$h^{\omega^*}(f; x, y) = \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega^*(|x - y|)}, \quad h^{\circ}(f; x, y) = 0$$

и $\omega^*(t)$ – некоторая неубывающая при $t \geq 0$ функция. Можно показать, что $H_{\omega^*}(\mathbb{R})$ является банаховым пространством относительно обобщенной гёльдеровой нормы

$$\|f\|_{\omega^*(\mathbb{R})} = \|f\|_{C(\mathbb{R})} + \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} h^{\omega^*}(f; x, y). \quad (1)$$

Пусть $H_{\omega}(\mathbb{R})$ – множество функций $f(\cdot) \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} h^{\omega}(f; x, y) = \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\omega(|x - y|)} < \infty,$$

целиком лежащее в пространстве $H_{\omega^*}(\mathbb{R})$, $H_{\omega}(\mathbb{R}) \subset H_{\omega^*}(\mathbb{R})$, где $\omega(t)$ – некоторая неубывающая при $t \geq 0$ функция. В частности, полагая $\omega^*(t) = t^{\beta}$, $\omega(t) = t^{\alpha}$, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, в качестве $H_{\omega^*}(\mathbb{R})$ получаем пространство

$$H_{\beta}(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : |f(x) - f(y)| \leq \mathcal{K}(f)|x - y|^{\beta} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\}$$

с гёльдеровой нормой

$$\|f\|_{\beta(\mathbb{R})} = \|f\|_{C(\mathbb{R})} + \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\beta},$$

а в качестве множества $H_\omega(\mathbb{R})$ получаем

$$\begin{aligned} H_\alpha(\mathbb{R}) &= \{f \in C(\mathbb{R}) : |f(x) - f(y)| \leq \mathcal{K}(f)|x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\}, \\ H_\alpha(\mathbb{R}) &\subset H_\beta(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение семейство интегральных операторов

$$F_\lambda(f; x) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathcal{K}(\lambda(x - u)) du, \quad \lambda > 0, \quad (2)$$

с ядром $\mathcal{K}(x)$ типа Фейера [1; с. 126]:

- а) $\mathcal{K}(-x) = \mathcal{K}(x)$,
- б) $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x) dx = 1$,
- в) $\sup_{-1 \leq x \leq 1} |\mathcal{K}(x)| < \infty$,
- г) $\sup_{-\infty < x < \infty} x^2 |\mathcal{K}(x)| < \infty$.

При этих условиях интеграл (2) представляет линейный оператор, действующий из $C(\mathbb{R})$ в $C(\mathbb{R})$.

В настоящей работе рассматриваются порядки приближения функций $f(\cdot) \in H_\omega(\mathbb{R})$ операторами типа Фейера (2) в обобщенной гёльдеровой метрике, определяемой равенством (1). Аналогичные вопросы в случае линейных средних рядов Фурье ранее рассматривались в работах [2]–[4].

2. Основной результат настоящей работы содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 \leq \beta < \eta \leq 1$. Тогда для любой $f \in H_\omega(\mathbb{R})$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} &\|F_\lambda(f; x) - f(x)\|_{\omega^*(\mathbb{R})} \\ &= O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{(\omega(|x - y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x - y|)} \left[\frac{1}{\lambda} \int_1^\lambda (\omega(1/\sigma))^{1-\beta/\eta} d\sigma \right], \quad \lambda > 1, \end{aligned} \quad (3)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по параметру λ и зависящая, вообще говоря, от $f(\cdot) \in H_\omega(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(x) &= \delta_\lambda(f; x) = F_\lambda(f; x) - f(x), \\ \delta_\lambda(x, y) &= \delta_\lambda(f; x, y) = \delta_\lambda(x) - \delta_\lambda(y), \\ \varphi_x(t) &= f(x + t) + f(x - t) - 2f(x). \end{aligned}$$

С учетом свойств а) и б) ядра $\mathcal{K}(x)$ можем записать представления

$$\delta_\lambda(x) = \lambda \int_0^\infty \varphi_x(t) \mathcal{K}(\lambda t) dt,$$

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda(x, y) &= \lambda \int_0^\infty [\varphi_x(t) - \varphi_y(t)] \mathcal{K}(\lambda t) dt \\
&= \lambda \left(\int_0^{1/\lambda} + \int_1^\infty \right) [\varphi_x(t) - \varphi_y(t)] \mathcal{K}(\lambda t) dt \\
&\quad + \lambda \int_{1/\lambda}^1 [\varphi_x(t) - \varphi_y(t)] \mathcal{K}(\lambda t) dt = J_\lambda^{(1)}(x, y) + J_\lambda^{(2)}(x, y). \tag{4}
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
i_\lambda(x, y) &= \lambda \int_0^{1/\lambda} [\varphi_x(t) - \varphi_y(t)] \mathcal{K}(\lambda t) dt, \\
j_\lambda(x, y) &= \lambda \int_1^\infty [\varphi_x(t) - \varphi_y(t)] \mathcal{K}(\lambda t) dt.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$J_\lambda^{(1)}(x, y) = i_\lambda(x, y) + j_\lambda(x, y). \tag{5}$$

Из определения множества $H_\omega(\mathbb{R})$ вытекает, что

$$\begin{aligned}
|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)| &\leq 4\mathcal{K}\omega(|x - y|), \\
|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)| &\leq 4\omega(f; t) \leq 4\mathcal{K}\omega(t), \\
\mathcal{K} &= \mathcal{K}(f),
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\omega(f; t) = \sup_{|x' - x''| \leq t} |f(x'') - f(x')|, \quad x', x'' \in \mathbb{R},$$

– модуль непрерывности функции $f(\cdot)$. Тогда на основании свойства с) ядра $\mathcal{K}(x)$ и неравенств (6), получаем

$$\begin{aligned}
|i_\lambda(x, y)| &\leq \lambda \int_0^{1/\lambda} |\varphi_x(t) - \varphi_y(t)|^{1-\beta/\eta} |\varphi_x(t) - \varphi_y(t)|^{\beta/\eta} |\mathcal{K}(\lambda t)| dt \\
&= O(1)(\omega(|x - y|))^{\beta/\eta} \lambda \int_0^{1/\lambda} (\omega(f; t))^{1-\beta/\eta} |\mathcal{K}(\lambda t)| dt \\
&= O(1)(\omega(|x - y|))^{\beta/\eta} (\omega(f; 1/\lambda))^{1-\beta/\eta} \\
&= O(1)(\omega(|x - y|))^{\beta/\eta} (\omega(1/\lambda))^{1-\beta/\eta}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Вследствие свойства d) ядра, принимая во внимание ограниченность $f(\cdot)$ и (6), находим

$$\begin{aligned}
|j_\lambda(x, y)| &\leq \lambda \int_1^\infty |\varphi_x(t) - \varphi_y(t)|^{1-\beta/\eta} |\varphi_x(t) - \varphi_y(t)|^{\beta/\eta} |\mathcal{K}(\lambda t)| dt \\
&= O(1)(\omega(|x - y|))^{\beta/\eta} \lambda \int_1^\infty (|\varphi_x(t)| + |\varphi_y(t)|)^{1-\beta/\eta} \frac{dt}{(t\lambda)^2} \\
&= O(1) \frac{1}{\lambda^{1-\beta/\eta} \lambda^{\beta/\eta}} (\omega(|x - y|))^{\beta/\eta} \\
&= O(1)(\omega(f; 1/\lambda))^{1-\beta/\eta} (\omega(|x - y|))^{\beta/\eta}
\end{aligned}$$

$$= O(1)(\omega(1/\lambda))^{1-\beta/\eta}(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}. \quad (8)$$

Сопоставляя соотношения (5), (7) и (8), получаем

$$|J_\lambda^{(1)}(x, y)| = O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}(\omega(1/\lambda))^{1-\beta/\eta}, \quad (9)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по λ .

Далее, вследствие свойства d) ядра $\mathcal{K}(x)$ согласно (6) имеем

$$\begin{aligned} |J_\lambda^{(2)}(x, y)| &= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \lambda \int_{1/\lambda}^1 \frac{(\omega(f; t))^{1-\beta/\eta}}{(t\lambda)^2} dt \\ &= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \frac{1}{\lambda} \int_1^\lambda (\omega(f; 1/\sigma))^{1-\beta/\eta} d\sigma \\ &= O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \frac{1}{\lambda} \int_1^\lambda (\omega(1/\sigma))^{1-\beta/\eta} d\sigma. \end{aligned} \quad (10)$$

Вследствие соотношений (4), (9) и (10) имеем

$$|\delta_\lambda(x, y)| = O(1)(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta} \left[(\omega(1/\lambda))^{1-\beta/\eta} + \frac{1}{\lambda} \int_1^\lambda (\omega(1/\sigma))^{1-\beta/\eta} d\sigma \right].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{|\delta_\lambda(x, y)|}{\omega^*(|x-y|)} &= O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \\ &\quad \times \left[(\omega(1/\lambda))^{1-\beta/\eta} + \frac{1}{\lambda} \int_1^\lambda (\omega(1/\sigma))^{1-\beta/\eta} d\sigma \right] \\ &= O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left[\frac{1}{\lambda} \int_1^\lambda (\omega(1/\sigma))^{1-\beta/\eta} d\sigma \right], \end{aligned} \quad (11)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по λ .

Легко видеть, что

$$\|\delta_\lambda(x)\|_{C(\mathbb{R})} = O(1) \frac{1}{\lambda} \int_1^\lambda \omega(1/\sigma) d\sigma. \quad (12)$$

Вследствие (11) и (12) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \|\delta_\lambda(x)\|_{\omega^*(\mathbb{R})} &= \|\delta_\lambda(x)\|_{C(\mathbb{R})} + \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{|\delta_\lambda(x, y)|}{\omega^*(|x-y|)} \\ &= O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x-y|)} \left[\frac{1}{\lambda} \int_1^\lambda (\omega(1/\sigma))^{1-\beta/\eta} d\sigma \right], \end{aligned}$$

$$0 \leq \beta < \eta \leq 1.$$

Полагая в условиях теоремы 1 $\omega(t) = t^\alpha$, $\omega^*(t) = t^\beta$, $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, $\eta = \alpha$, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. Тогда для любой $f \in H_\alpha(\mathbb{R})$ справедливы соотношения

$$\|F_\lambda(f; x) - f(x)\|_{\beta(\mathbb{R})} = \begin{cases} O(1)\lambda^{\beta-\alpha}, & \alpha - \beta < 1, \\ O(1)\frac{\ln \lambda}{\lambda}, & \alpha - \beta = 1 \quad (\text{т.е. } \alpha = 1, \beta = 0). \end{cases}$$

Предположим теперь, что ядро типа Фейера $\mathcal{K}(x)$ удовлетворяет условию ограниченности вариации на всей оси. Тогда, как хорошо известно [1; с. 132], если рассматривать 2π -периодические непрерывные функции $f \in C(\mathbb{R})$ с рядом Фурье

$$S[f] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx},$$

семейство операторов типа Фейера (2) преобразуется в последовательность линейных средних рядов функции $f(\cdot)$:

$$F_n(f; x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(k/n) c_k(f) e^{ikx}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

где значения $\varphi(k/n)$ совпадают при $t = k/n$ со значениями функции $\varphi(t)$, которая является преобразованием Фурье ядра $\mathcal{K}(x)$.

Стало быть, сопоставляя сказанное с теоремой 1, получаем такое утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 \leq \beta < \eta \leq 1$ и $\varphi(t)$ – преобразование Фурье ядра типа Фейера $\mathcal{K}(\cdot)$ ограниченной вариации на всей оси. Тогда для любой 2π -периодической функции $f \in H_\omega(\mathbb{R})$

$$\|F_n(f; x) - f\|_{\omega^*(\mathbb{R})} = O(1) \sup_{-\infty < x, y < \infty} \frac{(\omega(|x - y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x - y|)} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\omega(1/k))^{1-\beta/\eta} \right],$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n и зависящая, вообще говоря, от $f(\cdot)$.

Полагая, в частности,

$$\mathcal{K}(t) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(t/2)}{t} \right)^2$$

– ядро Фейера,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

получаем последовательность

$$\sigma_n(f; x) = \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) c_k(f) e^{ikx}$$

линейных средних Фейера ряда Фурье $S[f]$. Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 \leq \beta < \eta \leq 1$. Тогда для любой 2π -периодической функции $f \in H_\omega(\mathbb{R})$

$$\|\sigma_n(f; x) - f\|_{\omega^*(\mathbb{R})} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{(\omega(|x - y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x - y|)} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\omega(1/k))^{1-\beta/\eta} \right]. \quad (14)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$. Тогда для любой 2π -периодической функции $f \in H_\alpha(\mathbb{R})$

$$\|\sigma_n(f; x) - f(x)\|_{\beta(\mathbb{R})} = \begin{cases} O(1)n^{\beta-\alpha}, & \alpha - \beta < 1, \\ O(1)\frac{\ln n}{n}, & \alpha - \beta = 1 \quad (\text{т.е. } \alpha = 1, \beta = 0). \end{cases} \quad (15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. При рассмотрении случая 2π -периодических функций авторами работ [3], [4] установлены, в частности, следующие соотношения:

$$\|\sigma_n(f; x) - f\|_{\omega^*(\mathbb{R})} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x, y < \infty \\ x \neq y}} \frac{(\omega(|x - y|))^{\beta/\eta}}{\omega^*(|x - y|)} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega(1/k) \right]^{1-\beta/\eta}, \quad (16)$$

$$0 \leq \beta < \eta \leq 1, \quad f \in H_\omega(\mathbb{R}),$$

$$\|\sigma_n(f; x) - f\|_{\beta(\mathbb{R})} = \begin{cases} O(1)n^{\beta-\alpha}, & 0 < \alpha < 1, \\ O(1)\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{1-\beta}, & \alpha = 1, \end{cases} \quad (17)$$

$$0 \leq \beta < \alpha \leq 1, \quad f \in H_\alpha(\mathbb{R}).$$

Однако принимая во внимание выпуклость вверх функции $g(u) = u^r$, $0 < r \leq 1$, в силу неравенства Йенсена [5; с. 96], получаем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\omega(1/k))^{1-\beta/\eta} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega(1/k) \right)^{1-\beta/\eta}, \quad (18)$$

$$r = 1 - \frac{\beta}{\eta}, \quad 0 \leq \beta < \eta \leq 1.$$

Пример $\omega^*(t) = t^\beta$, $0 < \beta < 1$, $\omega(t) = t$ показывает, что в общем случае левая и правая части неравенства (18) не являются величинами одного порядка. Таким образом, соотношения (14), (15) в общем случае уточняют соотношения (16) и (17) соответственно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Гостехиздат, М., 1947.
- [2] S. Prösdorf, "Zur Konvergenz der Fourierreihen Hölderstiger Funktionen", *Math. Nachr.*, **69** (1975), 7–14.
- [3] Tikam Singh, "The approximation of continuous functions in the Hölder metric", *Математични Весник*, **43**:3–4 (1991), 111–118.
- [4] P. N. Mohapatra, P. Chandra, "Degree of approximation of functions in the Hölder metric", *Acta Math. Hung.*, **41**:1–2 (1983), 67–76.
- [5] Г. Харди, Д. Литтлвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

Р. А. Ласурия

Абхазский государственный университет

Поступило

15.11.1999