Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Лебедева, Минимизация константы неопределенности семейства всплесков Мейера, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 553–560

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:42:23

Минимизация константы неопределенности семейства всплесков Мейера

Е. А. Лебедева

Получено упрощенное выражение для константы неопределенности всплеска Мейера. На его основе проведена оценка ее нижней границы и построена минимизирующая последовательность Ритца.

Библиография: 5 названий.

Семейство всплесков Мейера, впервые введенное в работе [1], определяется следующим образом. Пусть имеются нечетная непрерывно дифференцируемая функция $\theta(\omega)$, равная $\pi/4$ при $\omega \geq \pi/3$, и четная функция λ такая, что

$$\lambda(\omega)|_{[0,\infty]} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \theta(\omega - \pi), & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right], \\ \frac{\pi}{4} - \theta\left(\frac{\omega}{2} - \pi\right), & \omega \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right], \\ 0, & \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}, +\infty\right). \end{cases}$$

Тогда *всплеск Мейера* ψ и его Фурье-образ $\hat{\psi}$ задаются как

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \sin(\lambda(\omega)) d\omega, \\ \hat{\psi}(\omega) &= e^{-i\omega/2} \sin(\lambda(\omega)) \end{aligned}$$

соответственно.

Так как ψ – всплеск, то $\|\psi\|_{L^2(R)} = 1$, и тогда из равенства Парсеваля

$$\|\hat{\psi}\|_{L^2(R)}^2 = 2\pi.$$

По определению, *константа неопределенности* есть $J = \Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}}$, где

$$\begin{aligned} \Delta_\psi &= \frac{1}{\|\psi\|_{L^2(R)}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |\psi(t)|^2 dt, & \Delta_{\hat{\psi}} &= \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_{L^2(R)}^2} \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega, \\ t_0 &= \frac{1}{\|\psi\|_{L^2(R)}^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\psi(t)|^2 dt, & \omega_0 &= \frac{1}{\|\hat{\psi}\|_{L^2(R)}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Так как $|\hat{\psi}(t)|$ – четная функция и $|\psi(t)|$ симметрична относительно $t = 1/2$, то $\omega_0 = 0$, $t_0 = 1/2$.

Преобразуем выражение для J в более компактную форму. Используя нечетность θ и определение функции λ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \sin^2(\lambda(\omega)) d\omega \\ &= 2 \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \omega^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta(\omega - \pi)\right) d\omega \\ &\quad + 2 \int_{4\pi/3}^{8\pi/3} \omega^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\left(\frac{\omega}{2} - \pi\right)\right) d\omega \\ &= 2 \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \omega^2 \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta(\omega - \pi)\right) + 8 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta(\omega - \pi)\right) \right) d\omega \\ &= \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \omega^2 (9 - 7 \sin 2\theta(\omega - \pi)) d\omega \\ &= \frac{56\pi^3}{9} - 7 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (\omega + \pi)^2 \sin(2\theta(\omega)) d\omega. \end{aligned}$$

В результате имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega = \frac{56\pi^3}{9} - 28\pi \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega. \quad (1)$$

Преобразуем временную часть константы неопределенности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 |\psi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |t\xi(t)|^2 dt,$$

где $\xi(t) = \psi(t + 1/2)$. Пользуясь преобразованием Фурье для функции ψ , находим $\hat{\xi}(\omega) = \sin(\lambda(\omega))$. Так как ψ – всплеск, то $\psi, \xi \in L^2(\mathbb{R})$, следовательно, $\hat{\xi}(t) = \xi(t)$, что вместе с четностью λ приводит к $\hat{\eta}(t) = \xi(t)$, где $\eta(\omega) = (2\pi)^{-1} \sin(\lambda(\omega))$. По свойству преобразования Фурье производной из того, что η – непрерывно-дифференцируемая функция и $\eta' \in L^2(\mathbb{R})$, имеем

$$t\xi(t) = t\hat{\eta}(t) = -i\hat{\eta}'(t).$$

Так как $\eta' \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(R)$, то применима теорема Планшереля; получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t\xi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\eta}'(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\eta'(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin'(\lambda(\omega)))^2 d\omega.$$

На основании определения λ и нечетности θ аналогично (1) имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin'(\lambda(\omega)))^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi/3}^{8\pi/3} \cos^2(\lambda(\omega)) (\lambda'(\omega))^2 d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta(\omega) \right) + \frac{1}{2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta(\omega) \right) \right) (\theta'(\omega))^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(1 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta(\omega) \right) \right) (\theta'(\omega))^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left(2 + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \theta(\omega) \right) + \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta(\omega) \right) \right) (\theta'(\omega))^2 d\omega \\
&= \frac{3}{2\pi} \int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega.
\end{aligned}$$

Итак, функционал J , заданный на множестве функций θ , принимает вид

$$J(\theta) = \left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega \right) \int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega. \quad (2)$$

Область определения функционала (2)

$$M = \left\{ \theta \mid \theta \in C^1 \left(\left[0, \frac{\pi}{3} \right] \right) \wedge \theta(0) = \theta' \left(\frac{\pi}{3} \right) = 0 \wedge \theta \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{4} \right\}.$$

ТЕОРЕМА. *Имеет место оценка*

$$J \geq \frac{21\pi^2}{32}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство Коши–Буняковского для $L^2([0, \pi/3])$, получаем

$$\left(\int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega \int_0^{\pi/3} d\omega \right)^{1/2} \geq \int_0^{\pi/3} |\theta'(\omega)| d\omega \geq \left| \int_0^{\pi/3} \theta'(\omega) d\omega \right| = \frac{\pi}{4},$$

откуда справедлива оценка

$$\int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega \geq \frac{3\pi}{16}.$$

Также имеет место оценка

$$\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega \geq \frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} d\omega \geq \frac{7\pi}{2}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Полученная оценка для константы неопределенности всплеска Мейера значительно лучше оценки $9/4$, принадлежащей Баттлу [4], найденной для константы неопределенности произвольного ортогонального всплеска с нулевым центром преобразования Фурье (всплеск Мейера относится к таким всплескам).

Для минимизации константы неопределенности используется следующая модификация метода Ритца. Рассмотрим функционал I , заданный на подмножестве E нормированного функционального пространства G . Пусть E_n , $n \in \mathbb{N}$, – подмножества E , элементы которых – функции, зависящие от $K(n)$ параметров $a_1, \dots, a_{K(n)}$, причем $K(n) < K(n+1)$ при $n \in \mathbb{N}$. Определим τ_n : $I(\tau_n) = \inf_{\tau \in E_n} I(\tau)$. Справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть

- 1) функционал I непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_G$;
- 2) функционал I ограничен снизу;
- 3) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \supset E$;
- 4) последовательность $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ существует, т.е. на каждом множестве E_n функционал I достигает своего наименьшего значения.

Тогда $(\tau_n)_{n=1}^\infty$ – минимизирующая последовательность, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\tau_n) = \inf_{\tau \in E} I(\tau).$$

Следует отметить, что случай, когда $E = G$, E_n – подпространства G , $K(n) = n$ и $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ плотно в E , рассмотрен в [3]. Однако доказательство утверждения не изменится при переходе и к более общему случаю, изложенному выше.

Определим E_n для функционала J : $E_n = S_{2,1}(\Delta_n) \cap M$, где $S_{2,1}(\Delta_n)$ – пространство квадратичных сплайнов дефекта 1, заданных на сетке

$$\Delta_n := (0, p_1, \dots, p_{2^n}, \pi/3),$$

где $p_k = 2^{-(n+1)}(2k-1)\pi/3$; $G = C^1([0, \pi/3])$, где норма вводится так:

$$\|f\|_{C^1} := \max_{[0, \pi/3]} |f| + \max_{[0, \pi/3]} |f'|.$$

В развернутой форме

$$E_n = \left\{ \theta \mid \theta(\omega) = \left(\sum_{k=1}^{2^n+1} (a_k \omega^2 + b_k \omega + c_k) \chi_{[\pi/3-p_k, \pi/3-p_{k-1}]}(\omega) \right) \chi_{[0, \pi/3]}(\omega) \wedge \theta \in M \right\}.$$

Для обеспечения требования $\theta \in M$ достаточно выполнения следующих условий:

$$b_1 = -\frac{2\pi}{3} a_1, \quad c_1 = \frac{\pi^2}{9} a_1 + \frac{\pi}{4}, \quad (5a)$$

$$b_k = 2(a_{k-1} - a_k)r_{k-1} + b_{k-1}, \quad c_k = -(a_{k-1} - a_k)r_{k-1}^2 + c_{k-1}, \quad (5b)$$

$$a_{2^n+1} = -\frac{c_{2^n}}{r_{2^n}^2} + a_{2^n}, \quad (5c)$$

где

$$r_k = (1 - 2^{-(n+1)}(2k-1))\frac{\pi}{3}, \quad r_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Здесь (5a) вытекает из требования $\theta(\pi/3) = \pi/4$, $\theta'(\pi/3) = 0$, (5b) следует из условия $\theta \in C^1[0, \pi/3]$, (5c) равносильно требованию $c_{2^n+1} = 0$, следующему из

условия $\theta(0) = 0$, и получается как решение уравнения $c_{2^n+1} = 0$, где $c_{2^n+1} = -(a_{2^n} - a_{2^n+1})r_{2^n}^2 + c_{2^n}$, относительно a_{2^n+1} .

В таком представлении E_n является множеством функций, зависящих от параметров $a_1, \dots, a_{2^n-1}$. Для J и выбранной последовательности $(E_n)_{n=1}^\infty$ выполнены все условия утверждения. Действительно, 2) выполняется в силу принципа неопределенности Гейзенберга; 3) следует из [5; с. 61–62].

Проверим выполнение условий 1) и 4).

ЛЕММА 1. *Функционал J непрерывен относительно нормы $\|\cdot\|_{C^1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ и θ_0 – произвольная фиксированная функция из области определения. Тогда

$$\begin{aligned} & |J(\theta) - J(\theta_0)| \\ &= \left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega \right) \left| \int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega - \int_0^{\pi/3} (\theta'_0(\omega))^2 d\omega \right| \\ &+ \int_0^{\pi/3} (\theta'_0(\omega))^2 d\omega \left| \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta_0(\omega)) d\omega \right|. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega \sin(2\theta(\omega)) d\omega = K_1, \quad \int_0^{\pi/3} (\theta'_0(\omega))^2 d\omega = K_2(\theta_0).$$

В силу ограниченности функции $\sin$ имеет место оценка

$$K_1 \leq \frac{14\pi}{3} + \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega d\omega \leq \frac{14\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} = \frac{35\pi}{6},$$

K_2 – константа, определяемая выбором функции θ_0 . Далее, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\pi/3} (\theta'(\omega))^2 d\omega - \int_0^{\pi/3} (\theta'_0(\omega))^2 d\omega \right| \leq \int_0^{\pi/3} |(\theta'(\omega))^2 - (\theta'_0(\omega))^2| d\omega \\ & \leq K_3 \max_{[0, \pi/3]} |\theta' - \theta'_0| \leq K_3 \|\theta - \theta_0\|_{C^1}, \end{aligned}$$

где

$$K_3 = \int_0^{\pi/3} |\theta'(\omega) + \theta'_0(\omega)| d\omega.$$

Пусть δ – число, подлежащее определению, и $\|\theta - \theta_0\|_{C^1} < \delta$. Так как

$$\|\theta - \theta_0\|_{C^1} = \max_{[0, \pi/3]} |\theta - \theta_0| + \max_{[0, \pi/3]} |\theta' - \theta'_0|,$$

то

$$\max_{[0, \pi/3]} |\theta' - \theta'_0| < \delta.$$

Так как $\theta_0 \in C^1$, то производная данной функции непрерывна и, следовательно, ограничена, т.е. существует $M(\theta_0) = \max_{[0, \pi/3]} |\theta'_0|$. Поэтому

$$\delta > \max_{[0, \pi/3]} |\theta' - \theta'_0| \geq \max_{[0, \pi/3]} ||\theta'| - |\theta'_0|| \geq \left| \max_{[0, \pi/3]} |\theta'| - \max_{[0, \pi/3]} |\theta'_0| \right|.$$

Следовательно,

$$\max_{[0, \pi/3]} |\theta'| < \delta + \max_{[0, \pi/3]} |\theta'_0| = \delta + M(\theta_0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K_3 &= \int_0^{\pi/3} |\theta'(\omega) + \theta'_0(\omega)| d\omega \leq \int_0^{\pi/3} |\theta'(\omega)| + |\theta'_0(\omega)| d\omega \\ &\leq \frac{\pi}{3} \left(\max_{[0, \pi/3]} |\theta'| + \max_{[0, \pi/3]} |\theta'_0| \right) \leq \frac{\pi}{3} (2M(\theta_0) + \delta), \\ \frac{21}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega |\sin(2\theta(\omega)) - \sin(2\theta_0(\omega))| d\omega \\ &\leq \frac{42}{\pi} \int_0^{\pi/3} \omega |\sin(\theta_0(\omega) - \theta(\omega)) \cos(\theta_0(\omega) + \theta(\omega))| d\omega \leq \frac{7}{3} \pi \|\theta_0 - \theta\|_{C^1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|J(\theta) - J(\theta_0)| \leq \frac{35\pi^2}{18} \delta (2M(\theta_0) + \delta) + 49K_2(\theta_0)\delta.$$

Неравенство

$$\frac{35\pi^2}{18} \delta (2M(\theta_0) + \delta) + 49K_2(\theta_0)\delta < \varepsilon$$

выполняется, в частности, при

$$0 < \delta < \frac{9}{35\pi^2} \left(-\left(\frac{35\pi^2}{9} M(\theta_0) + 49K_2(\theta_0) \right) + \sqrt{\left(\frac{35\pi^2}{9} M(\theta_0) + 49K_2(\theta_0) \right)^2 + \frac{70\pi^2\varepsilon}{9}} \right).$$

Таким образом, для каждого ε существует

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon, \theta_0) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{35\pi^2} \left(-\left(\frac{35\pi^2}{9} M(\theta_0) + 49K_2(\theta_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{35\pi^2}{9} M(\theta_0) + 49K_2(\theta_0) \right)^2 + \frac{70\pi^2\varepsilon}{9}} \right) \end{aligned}$$

такая, что $\|\theta_0 - \theta\|_{C^1} < \delta(\varepsilon, \theta_0)$, что приводит к $|J(\theta_0) - J(\theta)| < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказанная непрерывность не является равномерной, однако результат леммы 1 достаточно для доказательства утверждения.

ЛЕММА 2. Последовательность Ритца для функционала J существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что существует $\theta_n \in E_n$ такая, что

$$J(\theta_n) = \min_{\theta \in E_n} J(\theta), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим $a = (a_1, \dots, a_{2^n-1})$. Докажем, что

$$\exists \rho \in M \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists A > 0$$

$$a \in \mathbb{R}^{2^n-1} \setminus \{a \mid |a_i| \leq A, i = 1, \dots, 2^n - 1\} \rightarrow J|_{E_n}(a) \geq J(\rho).$$

В качестве ρ возьмем функцию

$$\rho(\omega) = \frac{\pi}{2} \left(\nu \left(\frac{3}{2\pi} \omega + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \right), \quad \nu(\omega) = \omega(35 - 84\omega + 70\omega^2 - 20\omega^3)|_{[0,1]},$$

$$J(\rho) = 10.749.$$

Пусть $a_k > A$, где A – число, подлежащее определению, $\tilde{\theta}_n \in E_n$ и $\tilde{\theta}_n$ определяется параметром a . Выражая коэффициенты b_k через $a_1, \dots, a_k$ из (5a)–(5c), имеем

$$\begin{aligned} b_k &= 2(a_{k-1} - a_k)r_{k-1} + b_{k-1} \\ &= 2(a_{k-1} - a_k)r_{k-1} + 2(a_{k-2} - a_{k-1})r_{k-2} + \dots + 2(a_1 - a_2)r_1 + b_1 \\ &= -4r_{2^n} \sum_{i=1}^{k-1} a_i - 2a_k r_{k-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{r_k}^{r_{k-1}} (\tilde{\theta}'_n(\omega))^2 d\omega &= \int_{r_k}^{r_{k-1}} (2a_k\omega + b_k)^2 d\omega = \int_{r_k}^{r_{k-1}} \left(2a_k(\omega - r_{k-1}) - 4r_{2^n} \sum_{i=1}^{k-1} a_i \right)^2 d\omega \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)^3 \left(a_k^2 + 3a_k \sum_{i=1}^{k-1} a_i + 3 \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \right)^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \right)^3 a_k^2 \geq \frac{\pi^3}{81 \cdot 2^{3n}} A^2. \end{aligned}$$

Если выбрать $A > (\pi^3/(81 \cdot 2^{3n}))^{-1/2}$, то

$$\int_0^{\pi/3} (\tilde{\theta}'_n(\omega))^2 d\omega = \sum_{k=0}^{2^n} \int_{r_{k+1}}^{r_k} (\tilde{\theta}'_n(\omega))^2 d\omega > 1,$$

что вместе с оценкой (4) дает $J(\tilde{\theta}_n) \geq 3.5\pi > J(\rho)$.

Полученная оценка означает, что точка глобального минимума $J|_{E_n}$, если она существует, содержится в кубе

$$D_n = \{a \mid a \in \mathbb{R}^{2^n-1}, |a_i| \leq A, i = 1, \dots, 2^n - 1\}$$

– компакте в $\mathbb{R}^{2^n-1}$. Кроме того, $J|_{E_n}$ непрерывна на D_n , следовательно, по теореме Вейерштрасса функция $J|_{E_n}$ имеет на D_n глобальный минимум.

Численное моделирование при помощи пакета MathCAD2001, основанное на изложенном выше методе Ритца, для первых приближений ($2^n - 1 = 1, 3, 7$) дает значения: 7.874, 7.349, 7.100 соответственно, что достаточно близко к минимальной

оценке (3) и значительно ниже значения 10.749 к которому приводит использование стандартного выбора функции θ [2], принятого в современных вычислительных схемах.

Автор выражает благодарность профессору И. Я. Новикову за постановку данной задачи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Meyer, “Principe d’incertitude, bases Hilbertiennes et algèbres d’opérateurs”, *Seminaire Bourbaki*, Astérisque, **145–146**, Paris, 1987, 209–223.
- [2] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [3] В. С. Буслаев, *Вариационное исчисление*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980.
- [4] G. Battle, “Heisenberg inequalities for wavelets states”, *Appl. Comp. Harm. Analysis.*, **4** (1997), 119–146.
- [5] С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин, *Сплайны в вычислительной математике*, Наука, М., 1976.

Е. А. Лебедева

Курский государственный университет

E-mail: ea.lebedeva2004@mail.ru

Поступило

23.09.2005

Исправленный вариант

28.04.2006