Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Лейбина, О комплексных подмногообразиях с максимальной голоморфной кривизной грассманаова образа, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 561–568

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 16:51:54

О комплексных подмногообразиях с максимальной голоморфной кривизной грассманова образа

О. В. Лейбина

В работе показано, что если голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана по площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу неособой комплексной поверхности, принимает максимально возможное значение по всем направлениям, то поверхность является комплексной гиперповерхностью.

Библиография: 6 названий.

1. Согласно Вонгу [1] секционная кривизна $\bar{k}$ многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ при $l, p \neq 1$ изменяется в пределах $[0, 2]$. В работе Борисенко и Николаевского [2] доказано следующее утверждение: секционная кривизна многообразия Грассмана $G(l, l+p)$ по всем площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу регулярной поверхности $F^l \subset E^{l+p}$, принимает максимальное значение ($\bar{k} = 2$) тогда и только тогда, когда поверхность двумерна ($l = 2$), минимальна и ее эллипс нормальной кривизны в каждой точке есть окружность с центром на поверхности; в частности, при $p = 2$ поверхность – комплексная кривая в $\mathbb{C}^2 = E^4$. В статье Муто [3] показано, что случай, когда невырожденный грассманов образ касается только тех площадок, вдоль которых секционная кривизна многообразия Грассмана принимает минимальное значение ($\bar{k} = 0$), возможен тогда и только тогда, когда поверхность имеет плоскую нормальную связность и индуцированная метрика плоская.

Комплексным многообразием Грассмана $CG(l, l+p)$ называется множество всех l -мерных комплексных плоскостей $(l+p)$ -мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^{l+p}$, проходящих через начало координат $O \in \mathbb{C}^{l+p}$. Построим в каждой точке неособой комплексной поверхности $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ касательное пространство и перенесем все эти пространства параллельно в начало координат. Полученное подмножество в $CG(l, l+p)$ называется *грассмановым образом* $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности F^l .

Для комплексной поверхности F^l определяется *комплексный внешний нуль-индекс* $\mu_{\mathbb{C}}(q)$ в точке q . Он равен максимальной размерности подпространства $L(q)$ касательного пространства $T_q F^l$ такого, что $A_{\nu} y = 0$ для любого вектора $y \in T_q F^l$, где A_{ν} – комплексная вторая квадратичная форма комплексной поверхности F^l в точке q относительно произвольной нормали ν в нормальном пространстве $N_q F^l$. Если рассматривать комплексную поверхность $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ как $2l$ -мерную поверхность F^{2l} в евклидовом пространстве $E^{2(l+p)}$, наделенном комплексной структурой J , то

подпространство вещественного касательного пространства $T_q F^{2l}$, аннулирующее вещественные вторые квадратичные формы, будет инвариантным относительно J . Следовательно, вещественный нуль-индекс $\mu_{\mathbb{R}}(q) = 2\mu_{\mathbb{C}}(q)$. Почти комплексная структура на комплексной поверхности $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ индуцирует почти комплексную структуру на $\Gamma(F^l) \subset \mathbb{C}G(l, l+p)$. Если на всей комплексной поверхности $\mu_{\mathbb{C}} = 0$, то грассманов образ $\Gamma(F^l)$ будет регулярным l -мерным комплексным подмногообразием в $\mathbb{C}G(l, l+p)$ [4].

Голоморфной кривизной $K_{\text{hol}}(X)$ комплексного многообразия называется секционная кривизна вдоль площадок (X, JX) , инвариантных относительно комплексной структуры J .

Согласно Вонгу [1] голоморфная кривизна K_{hol} комплексного многообразия Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ изменяется в пределах

$$K_{\text{hol}} \in \left[\frac{2}{r}, 2 \right], \quad \text{где } r = \min(l, p).$$

Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана вдоль грассманова образа комплексных подмногообразий играет существенную роль при их изучении. Например, в [5] получена классификация точек двумерных и трехмерных комплексных поверхностей по грассманову образу: классы эквивалентных точек характеризуются количеством направлений, касательных к грассманову образу комплексной поверхности, вдоль которых голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана принимает максимальное значение ($K_{\text{hol}} = 2$).

Если $F^l \subset \mathbb{C}^{l+1}$ – неособая комплексная гиперповерхность, то ее грассманов образ является подмногообразием комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^l = \mathbb{C}G(l, l+1)$, имеющего постоянную голоморфную кривизну $K_{\text{hol}} \equiv 2$.

Борисенко сформулировал обратное утверждение в качестве гипотезы и предложил идею доказательства.

Верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ – неособая комплексная поверхность, $l \geq 2$, и для любой точки $q \in F^l$ комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q) = 0$. Если голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ по площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности, принимает максимальное значение ($K_{\text{hol}} = 2$) по всем направлениям, то F^l является комплексной гиперповерхностью в $\mathbb{C}^{l+1} \subset \mathbb{C}^{l+p}$.

2. Пусть $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ – неособая комплексная поверхность, точка $q \in F^l$. В пространстве $\mathbb{C}^{l+p}$ выберем систему координат так, чтобы точка q совпала с началом координат O , а касательное пространство $T_q F^l$ – с подпространством $z^1, \dots, z^l$. Комплексную поверхность F^l в окрестности точки q можно задать явно, в виде $z^{l+\alpha} = f^\alpha(z^1, \dots, z^l)$, $\alpha = 1, \dots, p$, где f^α – голоморфные функции многих комплексных переменных $z^j = x^j + iy^j$ и

$$f^\alpha(0) = \frac{\partial f^\alpha}{\partial z^i} \Big|_0 = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Элементы матриц комплексных вторых квадратичных форм A^α комплексной поверхности F^l в точке q будут иметь вид

$$a_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial z^i \partial z^j} \Big|_0, \quad \alpha = 1, \dots, p.$$

Касательным пространством к грассманову образу $\Gamma(F^l)$ в точке $\Gamma(q) = O$ является l -мерное комплексное линейное пространство, натянутое на векторы [5]

$$X_j = \begin{pmatrix} a_{1j}^1 & a_{2j}^1 & \dots & a_{lj}^1 \\ a_{1j}^2 & a_{2j}^2 & \dots & a_{lj}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j}^p & a_{2j}^p & \dots & a_{lj}^p \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, l. \quad (1)$$

В [5] показано, что голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ в точке O в направлении вектора $X = (b_{ik})_{i=1, k=1}^p, l$ имеет вид

$$K_{\text{hol}}(X) = 2 - \frac{4 \sum_{i < j} \sum_{k < m} |b_{ik} b_{jm} - b_{im} b_{jk}|^2}{(\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^l |b_{ik}|^2)^2}.$$

Очевидно, что из полученной формулы следует

ЛЕММА 1. *Голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ в точке O в направлении вектора $X = (b_{ik})_{i=1, k=1}^p, l$ максимальна ($K_{\text{hol}}(X) = 2$) тогда и только тогда, когда $\text{rg } X = 1$.*

Рассмотрим комплексную поверхность $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ как $2l$ -мерную поверхность F^{2l} в евклидовом пространстве $E^{2(l+p)}$, наделенном комплексной структурой J . Каждой комплексной нормали ν_α , $\alpha = 1, \dots, p$, комплексной поверхности соответствуют две вещественные нормали n_α и $Jn_\alpha = n_{\bar{\alpha}}$, комплексным матрицам вторых квадратичных форм A^α – вещественные матрицы Ω^α и $\Omega^{\bar{\alpha}}$.

Первым нормальным пространством $N_1(q)$ поверхности F^{2l} в точке q называется ортогональное дополнение к подпространству $\{n \in N_q F^{2l} \mid \Omega_n = 0\}$ в вещественном нормальном пространстве $N_q F^{2l}$, где Ω_n – вторая квадратичная форма относительно вещественной нормали $n \in N_q F^{2l}$. Очевидно, что комплексная размерность $\dim_{\mathbb{C}} N_1(q)$ первого нормального пространства равна размерности пространства комплексных вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^l в точке q , а вещественная размерность $\dim_{\mathbb{R}} N_1(q) = 2 \dim_{\mathbb{C}} N_1(q)$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\Gamma(F^l) \subset \mathbb{C}G(l, l+p)$ – грассманов образ неособой комплексной поверхности $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$, точка $q \in F^l$. Если для всех $X \in T_{\Gamma(q)} \mathbb{C}G(l, l+p)$ голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ по площадкам, касательным к грассманову образу $\Gamma(F^l)$ комплексной поверхности F^l , принимает максимальное значение ($K_{\text{hol}}(X) = 2$), то комплексная размерность первого нормального пространства $N_1(q)$ комплексной поверхности F^l в точке q*

$$\dim_{\mathbb{C}} N_1(q) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A^α – это матрицы комплексных вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^l относительно комплексных нормалей ν_α , $\alpha = 1, \dots, p$, в точке q .

Согласно (1) произвольный вектор X , касательный к грассманову образу $\Gamma(F^l)$ в точке $O = \Gamma(q)$, будет иметь вид

$$X = \sum_{j=1}^l \alpha_j X_j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C},$$

и элементы матрицы $X = (b_{ik})_{i=1, k=1}^p$ будут следующими:

$$b_{ik} = \sum_{j=1}^l \alpha_j a_{kj}^i.$$

Из леммы 1 следует, что $K_{\text{hol}}(X) = 2$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\text{rg } X = 1$.

Пусть $b_1, b_2, \dots, b_p$ – строки матрицы X . Тогда, поскольку $\text{rg } X = 1$, существуют константы $\lambda_m \in \mathbb{C}$ такие, что $b_m = \lambda_m b_1$, $m = 2, \dots, p$. Для соответствующих элементов строк получаем $b_{mk} = \lambda_m b_{1k}$, т.е.

$$\sum_{j=1}^l \alpha_j a_{kj}^m = \lambda_m \sum_{j=1}^l \alpha_j a_{kj}^1.$$

Так как это условие должно выполняться для произвольного касательного вектора X , то получаем, что для всех $\alpha_j \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j=1}^l \alpha_j (a_{kj}^m - \lambda_m a_{kj}^1) = 0.$$

Следовательно, элементы матриц комплексных вторых квадратичных форм $a_{kj}^m = \lambda_m a_{kj}^1$, а значит, $A^m = \lambda_m A^1$, $m = 2, \dots, p$.

Таким образом, комплексные вторые квадратичные формы $A^1, A^2, \dots, A^p$ в точке q имеют вид $A^1, \lambda_2 A^1, \dots, \lambda_p A^1$.

Следовательно, комплексная размерность первого нормального пространства $\dim_{\mathbb{C}} N_1(q) = 1$.

Ковариантная производная нормального векторного поля n_α в нормальной связности имеет вид

$$\nabla_i^\perp n_\alpha = \sum_{\tau} \mu_{\tau\alpha|i} n_\tau + \sum_{\tau} \mu_{\bar{\tau}\alpha|i} n_{\bar{\tau}}, \quad (2)$$

где $\mu_{\tau\alpha|i}$ – коэффициенты кручения.

ЛЕММА 3. Для комплексной поверхности $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ коэффициенты кручения нормальной связности удовлетворяют следующим условиям:

$$\mu_{\tau\bar{\alpha}|i} = -\mu_{\bar{\tau}\alpha|i}, \quad \mu_{\bar{\tau}\bar{\alpha}|i} = \mu_{\tau\alpha|i}, \quad \alpha = 1, \dots, p. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно (2)

$$\nabla_i^\perp n_{\bar{\alpha}} = \sum_{\tau} \mu_{\tau\bar{\alpha}|i} n_\tau + \sum_{\tau} \mu_{\bar{\tau}\bar{\alpha}|i} n_{\bar{\tau}}.$$

С другой стороны, в силу параллельности комплексной структуры

$$\nabla_i^\perp n_{\bar{\alpha}} = \nabla_i^\perp J n_\alpha = J \nabla_i^\perp n_\alpha = \sum_\tau \mu_{\tau\alpha|i} n_{\bar{\tau}} - \sum_\tau \mu_{\bar{\tau}\alpha|i} n_\tau,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Пусть

$$NF^{2l} = \bigcup_{q \in F^{2l}} N_q F^{2l}$$

– вещественное нормальное расслоение комплексной поверхности $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ как подмногообразия F^{2l} в евклидовом пространстве $E^{2(l+p)}$.

Векторное подрасслоение $E \subset NF^{2l}$ называется *параллельным относительно нормальной связности* $\nabla^\perp$, если

$$\forall \xi \in E(q) \quad \forall X \in T_q F^{2l} \quad \nabla_X^\perp \xi \in E(q).$$

ЛЕММА 4. Пусть $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ – неособая комплексная поверхность, $l \geq 2$. Если для любой точки $q \in F^l$ комплексная размерность первого нормального пространства $\dim_{\mathbb{C}} N_1(q) = 1$ и комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q) \leq l - 2$, то вещественное подрасслоение

$$\bigcup_{q \in F^{2l}} N_1(q)$$

параллельно относительно нормальной связности в вещественном нормальном расслоении NF^{2l} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точка $q \in F^l$ и комплексная размерность первого нормального пространства $\dim_{\mathbb{C}} N_1(q) = 1$. Тогда вещественная размерность первого нормального пространства $\dim_{\mathbb{R}} N_1(q) = 2$.

Выберем в качестве базиса первого нормального пространства в точке q вещественные нормали n_1 и $n_{\bar{1}}$, соответствующие комплексной нормали ν_1 .

Тогда вторые квадратичные формы комплексной поверхности F^l относительно нормалей n_α и $n_{\bar{\alpha}}$, $\alpha = 2, \dots, p$, будут нулевыми:

$$\Omega_{ij}^\alpha = 0, \quad \Omega_{ij}^{\bar{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 2, \dots, p. \quad (4)$$

Запишем для них уравнения Кодацци:

$$\begin{aligned} \Omega_{ij,k}^\alpha - \Omega_{ik,j}^\alpha &= \sum_\tau (\mu_{\tau\alpha|k} \Omega_{ij}^\tau - \mu_{\tau\alpha|j} \Omega_{ik}^\tau) + \sum_\tau (\mu_{\bar{\tau}\alpha|k} \Omega_{ij}^{\bar{\tau}} - \mu_{\bar{\tau}\alpha|j} \Omega_{ik}^{\bar{\tau}}), \\ \Omega_{ij,k}^{\bar{\alpha}} - \Omega_{ik,j}^{\bar{\alpha}} &= \sum_\tau (\mu_{\tau\bar{\alpha}|k} \Omega_{ij}^\tau - \mu_{\tau\bar{\alpha}|j} \Omega_{ik}^\tau) + \sum_\tau (\mu_{\bar{\tau}\bar{\alpha}|k} \Omega_{ij}^{\bar{\tau}} - \mu_{\bar{\tau}\bar{\alpha}|j} \Omega_{ik}^{\bar{\tau}}). \end{aligned}$$

Согласно (4) получаем

$$\begin{aligned} \mu_{1\alpha|k} \Omega_{ij}^1 - \mu_{1\alpha|j} \Omega_{ik}^1 + \mu_{\bar{1}\alpha|k} \Omega_{ij}^{\bar{1}} - \mu_{\bar{1}\alpha|j} \Omega_{ik}^{\bar{1}} &= 0, \\ \mu_{1\bar{\alpha}|k} \Omega_{ij}^1 - \mu_{1\bar{\alpha}|j} \Omega_{ik}^1 + \mu_{\bar{1}\bar{\alpha}|k} \Omega_{ij}^{\bar{1}} - \mu_{\bar{1}\bar{\alpha}|j} \Omega_{ik}^{\bar{1}} &= 0. \end{aligned}$$

Унитарным преобразованием комплексную вторую квадратичную форму A^1 , соответствующую комплексной нормали ν_1 , можно привести к диагональному виду. Ей будут соответствовать две вещественные вторые квадратичные формы

$$\Omega^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & -\lambda_1 & & & & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & & & -\lambda_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_l \\ & & & & & & -\lambda_l \end{pmatrix},$$

$$\Omega^{\bar{1}} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_2 & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & \lambda_l \\ & & & & & \lambda_l & 0 \end{pmatrix},$$

где остальные элементы матриц равны нулю.

Рассмотрим элементы $\Omega_{ij}^1, \Omega_{ij}^{\bar{1}}$ при $j = i \neq k$. Имеем $\Omega_{ik}^1 = \Omega_{ii}^{\bar{1}} = 0$. Следовательно, уравнения Кодацци примут вид

$$\mu_{1\alpha|k}\Omega_{ii}^1 - \mu_{\bar{1}\alpha|i}\Omega_{ik}^{\bar{1}} = 0, \quad (5)$$

$$\mu_{1\bar{\alpha}|k}\Omega_{ii}^1 - \mu_{\bar{1}\bar{\alpha}|i}\Omega_{ik}^{\bar{1}} = 0. \quad (6)$$

Так как $l \geq 2$ и $\mu_{\mathbb{C}}(q) \leq l - 2$, то мы можем считать, что $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$.

Пусть $i = 1$. Тогда уравнение (5) примет вид

$$\mu_{1\alpha|k}\lambda_1 - \mu_{\bar{1}\alpha|1}\Omega_{1k}^{\bar{1}} = 0.$$

Так как $k \neq i$, возьмем $k = \bar{1}$ и получим, что

$$\mu_{1\alpha|\bar{1}}\lambda_1 - \mu_{\bar{1}\alpha|1}\lambda_1 = 0.$$

Тогда, поскольку $\lambda_1 \neq 0$, получаем

$$\mu_{1\alpha|\bar{1}} = \mu_{\bar{1}\alpha|1}. \quad (7)$$

При $k = 2, \bar{2}, \dots, l, \bar{l}$ элементы $\Omega_{1k}^{\bar{1}} = 0$, следовательно, $\mu_{1\alpha|k}\lambda_1 = 0$. Так как $\lambda_1 \neq 0$, получаем, что

$$\mu_{1\alpha|k} = 0 \quad \text{для всех } k = 2, \bar{2}, \dots, l, \bar{l}.$$

Пусть теперь $k = 1$, тогда уравнение (5) примет вид

$$\mu_{1\alpha|1}\Omega_{ii}^1 - \mu_{\bar{1}\alpha|i}\Omega_{i1}^{\bar{1}} = 0,$$

причем $i \neq 1$. Если $i = \bar{1}$, то

$$\mu_{1\alpha|1}(-\lambda_1) - \mu_{\bar{1}\alpha|\bar{1}}\lambda_1 = 0.$$

Следовательно, так как $\lambda_1 \neq 0$, получаем

$$\mu_{1\alpha|1} = -\mu_{\bar{1}\alpha|\bar{1}}. \quad (8)$$

Если $i = 2$, то, так как $\Omega_{21}^{\bar{1}} = 0$, получим $\mu_{1\alpha|1}\lambda_2 = 0$, а поскольку $\lambda_2 \neq 0$, то

$$\mu_{1\alpha|1} = 0. \quad (9)$$

Аналогично из уравнений (6) получаем, что

$$\mu_{1\bar{\alpha}|k} = 0 \quad \forall k = 2, \bar{2}, \dots, l, \bar{l}, \quad \mu_{1\bar{\alpha}|1} = 0. \quad (10)$$

Согласно лемме 3 из (8) и (9) следует, что

$$\mu_{1\bar{\alpha}|\bar{1}} = 0,$$

а из (7) и (10) следует, что

$$\mu_{1\alpha|\bar{1}} = 0.$$

Значит, воспользовавшись леммой 3, получаем, что для всех $k = 1, \bar{1}, 2, \bar{2}, \dots, l, \bar{l}$ коэффициенты кручения

$$\mu_{\alpha 1|k} = 0, \quad \mu_{\alpha \bar{1}|k} = 0, \quad \mu_{\bar{\alpha} 1|k} = 0, \quad \mu_{\bar{\alpha} \bar{1}|k} = 0, \quad \alpha = 2, \dots, p.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \nabla_i^\perp n_1 &= \sum_{\tau} \mu_{\tau 1|i} n_\tau + \sum_{\tau} \mu_{\bar{\tau} 1|i} n_{\bar{\tau}} = \mu_{\bar{1} 1|i} n_{\bar{1}} \in N_1(q), \\ \nabla_i^\perp n_{\bar{1}} &= \sum_{\tau} \mu_{\tau \bar{1}|i} n_\tau + \sum_{\tau} \mu_{\bar{\tau} \bar{1}|i} n_{\bar{\tau}} = \mu_{1 \bar{1}|i} n_1 \in N_1(q). \end{aligned}$$

Значит,

$$\forall \xi \in N_1(q) \quad \nabla_i^\perp \xi \in N_1(q), \quad i = 1, \bar{1}, \dots, l, \bar{l}.$$

3. Доказательство теоремы. Пусть $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ – неособая комплексная поверхность, $l \geq 2$, и для любой точки $q \in F^l$ комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q) = 0$.

Пусть для всех $X \in T_{\Gamma(q)} \mathbb{C}G(l, l+p)$ голоморфная кривизна комплексного многообразия Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ по площадкам, касательным к невырожденному грассманову образу $\Gamma(F^l) \subset \mathbb{C}G(l, l+p)$ комплексной поверхности F^l , принимает максимальное значение ($K_{\text{hol}}(X) = 2$). Тогда из леммы 2 следует, что комплексная размерность первого нормального пространства $N_1(q)$ комплексной поверхности F^l в точке q

$$\dim_{\mathbb{C}} N_1(q) = 1.$$

Так как $l \geq 2$ и комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q) = 0$, то можем применить лемму 4. Рассматривая комплексную поверхность $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ как $2l$ -мерную поверхность F^{2l} в евклидовом пространстве $E^{2(l+p)}$, наделенном комплексной структурой J , получаем, что

$$\bigcup_{q \in F^{2l}} N_1(q)$$

– параллельное вещественное подрасслоение вещественного нормального расслоения NF^{2l} .

Теорема Эрбахера [6] утверждает, что если первое нормальное пространство $N_1(q)$ связного n -мерного подмногообразия M^n в $(n+m)$ -мерном римановом многообразии $M_{\tilde{c}}^{n+m}$ постоянной секционной кривизны $\tilde{c}$ параллельно относительно нормальной связности и постоянная размерность N_1 равна k , то существует вполне геодезическое подмногообразие N^{n+k} в $M_{\tilde{c}}^{n+m}$ размерности $n+k$ такое, что $M^n \subset N^{n+k}$. Это означает, что коразмерность вложения может быть редуцирована к k .

Поскольку в рассматриваемом случае вещественная размерность первого нормального пространства комплексной поверхности F^l в произвольной точке q

$$\dim_{\mathbb{R}} N_1(q) = 2,$$

то из теоремы Эрбахера следует, что вещественная коразмерность вложения может быть редуцирована к 2. Так как F^l – комплексное подмногообразие, получаем, что F^l – комплексная гиперповерхность в $\mathbb{C}^{l+1} \subset \mathbb{C}^{l+p}$.

Выражаю искреннюю благодарность А. А. Борисенко за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. C. Wong, “Sectional curvatures of Grassmann manifolds”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **60**:1 (1968), 75–79.
- [2] А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский, “О поверхностях с максимальной кривизной грассманаова образа”, *Матем. заметки*, **48**:3 (1990), 12–19.
- [3] Y. Muto, “The Gauss map of a submanifold in a Euclidean space”, *J. Math. Soc. Japan.*, **30**:1 (1978), 85–100.
- [4] А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский, “Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий”, *УМН*, **46**:2 (1991), 41–83.
- [5] А. А. Борисенко, О. В. Лейбина, “Классификация точек двумерных и трехмерных комплексных поверхностей по грассманову образу”, *Матем. физика, анализ, геометрия*, **9**:4 (2002), 572–594.
- [6] J. Erbacher, “Reduction of the codimension of an isometric immersion”, *J. Diff. Geom.*, **5** (1971), 333–340.

О. В. Лейбина

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

E-mail: leybina@univer.kharkov.ua

Поступило

20.10.2003