Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Боровков, Об асимптотике распределений времен первого прохождения II, *Матем. заметки*, 2004, том 75, выпуск 3, 350–359

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm37>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:39:19

УДК 519.214

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВРЕМЕН ПЕРВОГО ПРОХОЖДЕНИЯ II

А. А. Боровков

В работе найдена асимптотика и получены оценки для распределения времен первого прохождения нулевого уровня (в обоих направлениях) случайным блужданием с ненулевым сносом.

Библиография: 22 названия.

1. Введение

Настоящая работа является продолжением [1]. Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $S_n = \sum_{j=1}^n \xi_j$,

$$\eta_+(x) = \min\{k: S_k > x\}, \quad \eta_-(x) = \min\{k \geq 1: S_k \leq -x\},$$

$x \geq 0, \eta_{\pm}(0) = \eta_{\pm}$.

В [1] в § 1 была изучена асимптотика $\mathbf{P}(\eta_-(x) > n)$ и $\mathbf{P}(\eta_+(x) = n)$ в случае $x = 0$ и отрицательного сноса, когда выполнено условие

$$A_- = \left\{ D_+ = \sum \frac{\mathbf{P}(S_k > 0)}{k} < \infty, \quad D_- = \sum \frac{\mathbf{P}(S_k \leq 0)}{k} = \infty \right\}.$$

При этом были рассмотрены следующие три класса распределений ξ :

$\mathcal{R}$ – класс регулярных распределений, когда $\mathbf{P}(\xi > x) = V(x)$, где

$$V(x) = x^{-\alpha} L(x), \quad \alpha > 1, \tag{1}$$

$L(x)$ – медленно меняющаяся функция (ММФ);

$\mathcal{S}$ – класс семиэкспоненциальных распределений

$$\mathbf{P}(\xi > x) = V(x) = e^{-l(x)}, \quad l(x) = x^{\alpha} L(x), \quad \alpha \in (0, 1), \tag{2}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №№ 02-01-00902, 00-15-96178, и INTAS, проект № 00-265.

где L – ММФ такая, что при $\Delta = o(x)$, $x \rightarrow \infty$ и любом $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} l(x + \Delta) - l(x) &\sim \frac{\alpha \Delta l(x)}{x}, & \text{если } \frac{\alpha \Delta l(x)}{x} > \varepsilon, \\ l(x + \Delta) - l(x) &\rightarrow 0, & \text{если } \frac{\alpha \Delta l(x)}{x} \rightarrow 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$\mathcal{C}$ – альтернативный к $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ класс распределений, убывающих экспоненциально быстро, т.е. распределений, для которых выполнено условие Крамера:

$$\mu =: \sup\{\lambda: \varphi(\lambda) < \infty\} > 0, \quad \text{где } \varphi(\lambda) =: \mathbf{E}e^{\lambda\xi}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению случаев, когда $x \geq 0$ фиксировано и когда $x \rightarrow \infty$.

2. Случай, когда $x \geq 0$ фиксировано

2.1. Случай $A_0 = \{D_+ = \infty, D_- = \infty\}$. Отметим прежде всего, что здесь имеет место следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 7. При выполнении A_0

$$\frac{1 - \mathbf{E}z^{\eta_-}}{1 - z} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \mathbf{P}(S_k > 0)\right\} = \frac{1}{1 - \mathbf{E}z^{\eta_+}},$$

$\mathbf{E}\eta_{\pm} = \infty$, распределение η_- однозначно определяется распределением η_+ и наоборот.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы очевидным образом следует из (18), (19) в [1] и того, что $\mathbf{P}(\eta_+ < \infty) = 1$.

Далее имеет место следующее утверждение. Обозначим

$$\Delta_n = \mathbf{P}(S_n \leq 0) - \gamma, \quad G(z) = \exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k \Delta_n}{n}\right\}.$$

ТЕОРЕМА 8. В случае A_0

1)

$$\mathbf{P}(\eta_- > n) \sim \frac{n^{-\gamma} L(n)}{\Gamma(1 - \gamma)}, \quad \gamma \in (0, 1), \quad (4)$$

при $n \rightarrow \infty$, где L – ММФ, тогда и только тогда, когда

$$n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(S_k \leq 0) \rightarrow \gamma; \quad (5)$$

2) при выполнении (4) или (5) с необходимостью $L(n) \sim G(1 - 1/n)$,

$$\frac{\mathbf{P}(\eta_-(x) > n)}{\mathbf{P}(\eta_- > n)} \rightarrow r_-(x)$$

при $n \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $x \geq 0$, где функция $r_-(x)$ найдена в явном виде;

3) если $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, то $\gamma = 1/2$ и

$$\sum \frac{|\Delta_n|}{n} < \infty. \quad (6)$$

Это означает, что $L(n)$ в (4) можно заменить на $G(1)$, $0 < G(1) < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 8 см. в [2, с. 381, 382] (там же см. подробную библиографию). Очевидно, что симметричное к (4) утверждение справедливо для η_+ , $\eta_+(x)$ (с заменой γ и Δ_n соответственно на $1 - \gamma$ и $-\Delta_n$):

$$\mathbf{P}(\eta_+ > n) \sim \frac{n^{\gamma-1} L^{-1}(n)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Если $\mathbf{E}\xi^2 = \infty$ (если $\mathbf{E}\xi$ существует, то $\mathbf{E}\xi = 0$), то при выполнении известных условий на регулярность хвостов распределения ξ выполняется

$$\mathbf{P}(S_n \leq 0) \rightarrow F_{\alpha, \theta}(0) \equiv \gamma,$$

где $F_{\alpha, \theta}$ — функция распределения устойчивого закона с параметрами $\alpha \in (0, 2]$, $\theta \in [-1, 1]$.

Для симметричных ξ выполняется $\gamma = 1/2$,

$$\mathbf{P}(S_n \leq 0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \mathbf{P}(S_n = 0) < \frac{c}{\sqrt{n}},$$

так что ряд (6) сходится, $G(z) = \exp\{-\frac{1}{2} \sum z^n \mathbf{P}(S_n = 0)/n\}$.

Из сказанного видно, что в отличие от случая A_- , здесь влияние хвостов распределения ξ на асимптотику (2) в [1] менее значимо.

Существует обширная литература о скорости сходимости $F^{(n)}(t) = \mathbf{P}(S_n/\sigma_n \leq t)$ при соответствующей нормировке σ_n к $F_{\alpha, \theta}(t)$. В ней можно найти, в частности, условия, достаточные для сходимости ряда (6) в случае $\mathbf{E}\xi^2 = \infty$. Мы укажем здесь в качестве иллюстрации лишь один из известных нам результатов.

Пусть $\nu_r = \int |x|^r (P(dx) - dF_{\alpha, \theta}(x)) < \infty$ при $r > \alpha$ и $\int x(P(dx) - dF_{\alpha, \theta}(x)) = 0$ в случае $\alpha \geq 1$. Тогда

$$\sup_t |F^{(n)}(t) - F_{\alpha, \theta}(t)| \leq c\nu_r n^{1-r/\alpha}$$

(см. [3], [4]).

Очевидно, что в этом случае сходимость (6) будет иметь место.

Получим теперь одно уточнение теоремы 8, касающееся *локальных* теорем для η_- . В дальнейшем соотношение $g_n \sim cf_n$ при $c = 0$ мы будем понимать как $g_n = o(f_n)$.

ТЕОРЕМА 9. 1) Пусть выполнено A_0 и

$$\Delta_n \sim cn^{-\gamma}, \quad 0 \leq c < \infty, \quad \gamma > 0, \quad (7)$$

при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_- = n) \sim \frac{\gamma n^{-\gamma-1}}{\Gamma(1-\gamma)} G(1), \quad 0 < G(1) < \infty. \quad (8)$$

2) Если $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}|\xi|^3 < \infty$ и распределение ξ либо решетчатое, либо

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |\varphi(it)| < 1,$$

то $\gamma = 1/2$ и выполнено (7), (8).

Аналогичные соотношения справедливы для $\mathbf{P}(\eta_+ = n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (18) в [1]

$$\mathbb{E} z^{\eta_-} = 1 - \exp \left\{ -\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - \sum \frac{z^k \Delta_k}{k} \right\} = 1 - (1-z)^\gamma G(z). \quad (9)$$

Асимптотика коэффициентов a_k разложения функции

$$a(z) = -(1-z)^\gamma = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

хорошо известна:

$$a_n \sim \frac{\gamma n^{-1-\gamma}}{\Gamma(1-\gamma)}. \quad (10)$$

Для выяснения асимптотики коэффициентов g_k разложения

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$$

нам понадобится вспомогательное утверждение.

Пусть $d_n \sim cn^{-\alpha}$, $\alpha > 1$, $0 \leq c < \infty$,

$$d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad \hat{d}_n = |d_n|, \quad \hat{d}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}_k z^k.$$

Пусть далее $\mathcal{A}(\lambda)$ аналитическая функция в области $|\lambda| \leq \hat{d}(1)$, так что

$$\mathcal{A}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \lambda^k, \quad |A_k| \leq c_1 (\hat{d}(1)(1+\varepsilon))^{-k} \quad (11)$$

при некоторых $\varepsilon > 0$, $c_1 < \infty$. Так как ряд $d(z)$ абсолютно сходится, по теореме Винера–Леви функция $\mathcal{A}(d(z))$ также представима в виде абсолютно сходящегося ряда:

$$\mathcal{A}(d(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k.$$

ЛЕММА 1. При выполнении названных выше условий

$$g_n \sim \mathcal{A}'(d(1)) d_n.$$

Это утверждение переносит известные результаты об асимптотике субэкспоненциальных хвостов (см. [5]) на локальные асимптотические свойства регулярных знакопеременных последовательностей. Доказательство леммы см. в [6].

Воспользуемся леммой 1 при $d_n = -\Delta_n/n$, $\mathcal{A}(\lambda) = e^\lambda$. Тогда $G(z) = \mathcal{A}(d(z))$ и (7) будет означать выполнение условий леммы при $\alpha = 1 + \gamma$. Из (9), (10) получаем

$$\mathbf{P}(\eta_- = n) = \sum_{k=0}^n a_k g_{n-k} = \sum_{k \leq n/2} + \sum_{k > n/2},$$

где

$$\sum_{k \leq n/2} = g_n a(1) + o(g_n) = o(g_n), \quad \sum_{k > n/2} = a_n G(1) + o(a_n).$$

Это доказывает (8).

Второе утверждение теоремы следует из того, что в условиях п. 2 теоремы

$$\Delta_n = \mathbf{P}(S_n \leq 0) - \frac{1}{2} = \frac{cE\xi^3}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

(см., например, [7]) и, стало быть, выполнено (7) при $\gamma = 1/2$.

Теорема доказана.

2.2. Фиксированный уровень $x > 0$. Асимптотика распределений $\eta_\pm(x)$ при $x > 0$ отличается от соответствующей асимптотики для $\eta_\pm$ множителем, зависящим лишь от x . Именно, в [2] и [8]–[11] установлено, что в условиях теорем 2 (для класса $\mathcal{R}$), 5, 6 в [1] и теоремы 8 справедлива

ТЕОРЕМА 10. В случаях A_- , A_0 при $n \rightarrow \infty$ и любом фиксированном $x \geq 0$

$$\frac{\mathbf{P}(\eta_-(x) > n)}{\mathbf{P}(\eta_- > n)} \rightarrow r_-(x), \quad \frac{\mathbf{P}(n < \eta_+(x) < \infty)}{\mathbf{P}(n < \eta_+ < \infty)} \rightarrow r_+(x),$$

где функции $r_\pm(x)$ найдены в явном виде.

Вид функций $r_\pm(x)$ оказывается весьма сложным. В следующем разделе будет найдена асимптотика этих функций при $x \rightarrow \infty$.

Для ограниченных решетчатых ξ в [12] получены асимптотические разложения для $\mathbf{P}(\eta_\pm(x) = n)$.

3. Растущий уровень x

В этом разделе нам будет удобнее изменить направление сноса в том случае, когда он не нуль, так что теперь основным случаем будет $A_+ = \{a = E\xi > 0\}$, а основным объектом изучения – время $\eta_+(x)$ первого прохождения уровня $x \rightarrow \infty$. В связи с этим класс $\mathcal{R}$ будет описываться теперь с помощью регулярных *левых* хвостов

$$\{W(t) = \mathbf{P}(\xi < -t) = t^{-\beta} L_W(t)\}, \quad (12)$$

где $\beta > 1$, L_W – ММФ при $t \rightarrow \infty$.

Мы будем рассматривать в этом разделе лишь классы хвостов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{C}$, а также распределения из класса $\mathcal{M}_s$, для которых $E|\xi|^s < \infty$. Ясно, что пересечение классов $\mathcal{M}_s$ и $\mathcal{R}$ не пусто. Так как $\{\eta_+(x) > n\} = \{\bar{S}_n \leq x\}$, нашу задачу можно рассматривать так же, как задачу о “малых отклонениях” максимума $\bar{S}_n$.

3.1. Класс хвостов $\mathcal{C}$. В этом случае асимптотика $P(\eta_+(x) > n) = P(\bar{S}_n \leq x)$ изучена достаточно полно в [13], [14] при любом значении $a = E\xi$. Метод исследования, использованный в [13], [14], состоит в отыскании двойных преобразований над $P(\eta_+(x) > n)$ (по x и по n) в терминах решений уравнений типа Винера–Хопфа (или, что то же – в терминах компонент факторизации; в [13] эти компоненты находятся в явном виде) и в последующем асимптотическом обращении этих преобразований. Сравнительно недавно выяснилось, что такой подход не является единственно возможным в рассматриваемых задачах. В [15], [16] прямыми вероятностными методами было установлено, что асимптотики вероятностей больших (и малых) отклонений $\bar{S}_n$ в ряде случаев могут быть явным образом найдены через соответствующую асимптотику для S_n . В частности, если $x/n < a = E\xi$, $x/n \in (\alpha_1, \alpha_2)$, где α_i определяются аналитическими свойствами $\varphi(\lambda)$, то

$$P(\eta_+(x) > n) \sim c \left(\frac{x}{n} \right) P(S_n \leq x), \quad (13)$$

где $c(v)$ найдена в явном виде. Более подробно на случае $\mathcal{C}$ мы здесь останавливаться не будем.

3.2. Класс распределений $\mathcal{M}_s$. Для распределений из класса $\mathcal{M}_s$ без привлечения свойств регулярности (12) удастся изучить асимптотику $P(\eta_+(x) > n)$ лишь в случае $A_0 = \{a = 0\}$.

Везде в дальнейшем будет предполагаться, что в решетчатом случае уровень $x \rightarrow \infty$ принадлежит соответствующей решетке.

ТЕОРЕМА 11. Пусть выполнено $\mathcal{M}_3$, $a = 0$, $E\xi^2 = 1$, $x \rightarrow \infty$, $x = o(\sqrt{n})$. Тогда

$$P(\eta_+(x) > n) \sim \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}}. \quad (14)$$

Это утверждение немедленно следует из оценки скорости сходимости

$$\sup_x \left| P(\bar{S}_n \leq x) - 2 \left[\Phi \left(\frac{x}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \right] \right| < \frac{c}{\sqrt{n}}, \quad c < \infty,$$

в [17] (см. также [18], [19]), справедливой при $E|\xi|^3 < \infty$. Здесь Φ – функция распределения стандартного нормального закона. Так как $\Phi(u) - 1/2 \sim u/2\pi$ при $u \rightarrow 0$, мы получаем (14).

Если распределение ξ решетчато или $\limsup_{t \rightarrow \infty} \varphi(i\lambda) < 1$, то при выполнении $\mathcal{M}_s$, $s > 3$, можно изучать также асимптотическое разложение для $P(\bar{S}_n \leq x)$ при $x \rightarrow \infty$ (см. [18], [14], [20], [21]) и можно получать аналогичные разложения и для

$$P(\eta_+(x) = n) \sim \frac{x}{\sqrt{2\pi n^{3/2}}} \quad (15)$$

(локальные предельные теоремы для $\eta_+(x)$).

Случай $x \rightarrow \infty$, $a > 0$, $\mathcal{M}_s$, насколько нам известно, остается не изученным. Изучению этого случая в классе $\mathcal{R}$ и посвящен следующий раздел.

3.3. Асимптотика $\mathbf{P}(\eta_+(x) > n)$ при выполнении условий $x \rightarrow \infty$, $a > 0$, $\mathcal{R}$. Наряду с названными в заголовке этого раздела условиями нам может понадобиться в случае $\beta \in (1, 2)$ (см. (12)) дополнительное условие

$$\mathbf{P}(\xi > t) \leq V(t), \quad (16)$$

где V имеет вид $V(t) = t^{-\alpha}L(t)$, $\alpha > 1$, L – ММФ. Обозначим

$$z = an - x.$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть $a > 0$, $x \rightarrow \infty$, $x < an$ и выполнено $\mathcal{R}$. Тогда

1) Если $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$ ($\beta > 2$) и $z \gg \sqrt{n \ln n}$, то

$$\mathbf{P}(\eta_+(x) > n) \sim \frac{x}{a} W(z); \quad (17)$$

2) соотношение (17) сохранится, если $\beta \in (1, 2)$, выполнено (16), n и z таковы, что

$$nW(z) \rightarrow 0, \quad nV\left(\frac{z}{\ln z}\right) \rightarrow 0. \quad (18)$$

Смысл утверждения (17) весьма прост: основной вклад в вероятность $\mathbf{P}(\bar{S}_n \leq x)$ вносят траектории, у которых на одном из первых x/a скачков (до пересечения границы x “линией сноса” $a(k) = \mathbf{E}S_k = ak$) произошел отрицательный выброс на величину $\leq x - an$.

Из теоремы следует

$$\mathbf{P}(\bar{S}_n \leq x) \sim \frac{x}{an} \mathbf{P}(S_n \leq x),$$

так что соотношение (13) здесь сохраняется, но вместо весьма сложного множителя $c(\alpha)$ в (13), здесь стоит значительно более простая функция $c(\alpha) = \alpha/a$, при этом случай $\alpha \rightarrow 0$ не исключается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 12 разобьем на три этапа.

1. *Оценка снизу.* Обозначим

$$G_n = \{\bar{S}_n \leq x\}, \quad B_j = \{\xi_j < -z(1 + \varepsilon)\}, \quad v = \frac{x}{a}(1 - \varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$ – фиксированное малое число. Тогда, считая для простоты v целочисленным, будем иметь

$$\mathbf{P}(G_n) \geq \mathbf{P}\left(G_n \cup_{j=1}^v B_j\right) = \sum_{j=1}^v \mathbf{P}(G_n B_j) + O((xW(z))^2).$$

Очевидно, что при $j \leq v$ в силу закона больших чисел $\mathbf{P}(G_n/B_j) \rightarrow 1$ при $x \rightarrow \infty$. Так как $xW(z) \rightarrow 0$, то

$$\mathbf{P}(G_n) \geq \sum_{j=1}^v \mathbf{P}(B_j)(1 + o(1)) + O((xW(z))^2) \sim \frac{x}{a}(1 - \varepsilon)W(z(1 + \varepsilon)).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ находим окончательно

$$\mathbf{P}(G_n) \geq \frac{x}{a}W(z)(1 + o(1)). \quad (19)$$

2. Оценка $\mathbf{P}(G_n)$ сверху для срезанных слагаемых. Обозначим $C_j = \{\xi_j > -z/r\}$, $r > 1$, $C = \bigcap_{j=1}^n C_j$. Тогда

$$\mathbf{P}(G_n) = \mathbf{P}(G_n C) + \mathbf{P}(G_n \overline{C}), \quad (20)$$

где $\overline{C}$ есть дополнение к C ,

$$\mathbf{P}(G_n \overline{C}) \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \overline{C}_j), \quad \mathbf{P}(G_n C) \leq \mathbf{P}(S_n - an \leq -z; C). \quad (21)$$

ЛЕММА 2. Если $\mathbf{E}\xi^2 < \infty$, $(\beta > 2)$, и $x \gg \sqrt{n \ln n}$, то

$$\mathbf{P}(G_n C) \leq (nW(z))^{r+o(1)}.$$

Если $\beta \in (1, 2)$, выполнено (16), (18), то

$$\mathbf{P}(G_n C) \leq c(nW(z))^r.$$

Утверждение леммы вытекает из теоремы 4.1 (следствие 4.1) и теоремы 3.1 в [22]. Если выбрать $r > \beta/(1 - \beta)$, то, очевидно

$$(nW(z))^r = o(xW(z)), \quad \mathbf{P}(G_n C) = o(xW(z)). \quad (22)$$

3. Оценка сверху суммы (21). Имеем

$$\mathbf{P}(G_n \overline{C}_j) = \mathbf{P}\left(\overline{S}_{j-1} \leq x, \xi_j < -\frac{z}{r}, S_{j-1} + \xi_j + \overline{S}_{n-j}^* \leq x\right),$$

где $\overline{S}_{n-j}^*$ имеют распределение $\overline{S}_{n-j}$, но не зависят от $\xi_1, \dots, \xi_j$. Так как ξ_j не зависит от $\xi_1, \dots, \xi_{j-1}$ и $\overline{S}_{n-j}^*$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(G_n \overline{C}_j) &\leq \mathbf{E}\left[W(-x + \overline{S}_{n-j}^* + S_{j-1}); \overline{S}_{n-j}^* + S_{j-1} > x + \frac{z}{r}\right] \\ &\leq \mathbf{E}W\left(\max\left(\frac{z}{r}, -x + S_{n-1}\right)\right) = \mathbf{E}W\left(\max\left(\frac{z}{r}, z + S_{n-1}^0\right)\right) \\ &\sim W(z)\mathbf{E}\left[\max\left(\frac{1}{r}, 1 + \frac{S_n^0}{z}\right)\right]^{-\beta}, \end{aligned}$$

где $S_n^0 = S_n - an$. Так как $S_n^0/z \xrightarrow{p} 0$ при выполнении условий $z \gg \sqrt{n \ln n}$ или (18), мы получаем отсюда

$$\mathbf{P}(G_n \overline{C}_j) \leq W(z)(1 + o(1)).$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}(G_n \overline{C}_j) \leq W\left(\frac{z}{r}\right) \mathbf{P}(\overline{S}_{j-1} \leq x) = W\left(\frac{z}{r}\right) \mathbf{P}(\eta(x) \geq j).$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \overline{C}_j) \leq \frac{x}{a}(1 + \varepsilon)W(z) + W\left(\frac{z}{r}\right) \sum_{j > \frac{x}{a}(1 + \varepsilon)} \mathbf{P}(\eta(x) \geq j). \quad (23)$$

Здесь $W\left(\frac{z}{r}\right) \leq cW(z)$ и в силу усиленного закона больших чисел и теоремы восстановления $\mathbf{E}\eta_+(x) = \sum \mathbf{P}(\eta_+(x) > j) \sim x/a$ находим, что второе слагаемое в правой части (23) есть $o(x)W(z)$. Отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{P}(G_n \overline{C}_j) \leq \frac{x}{a}W(z)(1 + o(1)).$$

Сопоставляя это неравенство с (20)–(22), мы получим такую же оценку для $\mathbf{P}(G_n)$. Это вместе с оценкой снизу (19) доказывает теорему.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Боровков А. А. Об асимптотике распределений времен первого прохождения. I // Матем. заметки. 2004. Т. 75. № 1. С. 24–39.
- [2] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [3] Паулаускас В. И. Оценки остаточного члена в предельной теореме в случае устойчивого предельного закона // Литовский матем. сб. 1974. Т. 14. № 1. С. 165–187.
- [4] Паулаускас В. И. Равномерные и неравномерные оценки остаточного члена в предельной теореме в случае устойчивого закона // Литовский матем. сб. 1974. Т. 14. № 4. С. 171–185.
- [5] Chover J., Ney P., Wainger S. Function of probability measures // J. Analyse. Math. 1973. V. 26. P. 255–302.
- [6] Боровков А. А. О субэкспоненциальных распределениях и асимптотике распределения максимума последовательных сумм // Сиб. матем. ж. В печати.
- [7] Петров В. В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1971.
- [8] Emery D. J. Limiting behaviour of the distribution of the maxima of partial sums of certain random walks // J. Appl. Probab. 1972. V. 9. P. 572–579.
- [9] Doney R. A. On the asymptotic behaviour of first passage times for transient random walk // Probability Theory and Related Fields. 1989. V. 18. P. 239–246.
- [10] Bertoin J., Doney R. A. Some asymptotic results for transient random walks // Adv. Appl. Probab. 1996. V. 28. P. 207–227.
- [11] Могульский А. А., Рогозин Б. А. Случайные блуждания в положительном квадранте I–III // Матем. труды. 1999. Т. 2. № 2. С. 57–97; 2000. Т. 3. № 1. С. 48–118; 2001. Т. 4. № 1. С. 1–25.
- [12] Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.

- [13] Боровков А. А. Предельные теоремы о распределении максимума сумм ограниченных решетчатых случайных величин. I, II // Теория вероятн. и ее примен. 1960. Т. 5. № 2. С. 137–171; 1960. Т. 5. № 4. С. 377–392.
- [14] Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // Сиб. матем. ж. 1962. Т. 3. № 5. С. 645–694.
- [15] Боровков А. А. О преобразовании Крамера, больших отклонениях в граничных задачах и условном принципе инвариантности // Сиб. матем. ж. 1995. Т. 36. № 3. С. 493–509.
- [16] Боровков А. А. Об условных распределениях, связанных с большими отклонениями // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 4. С. 732–744.
- [17] Нагаев С. В. О скорости сходимости распределения максимума сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1970. Т. 15. № 2. С. 320–325.
- [18] Нагаев С. В. Асимптотические разложения для максимума сумм независимых случайных величин // Теория вероятн. и ее примен. 1970. Т. 15. № 3. С. 527–528.
- [19] Нагаев С. В. О скорости сходимости в одной граничной задаче // Теория вероятн. и ее примен. 1970. Т. 15. № 2. С. 179–199.
- [20] Королёк В. С. К асимптотике распределений максимальных отклонений // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. № 3. С. 522–525.
- [21] Королёк В. С. Асимптотический анализ распределений максимальных отклонений в решетчатой схеме блужданий // Теория вероятн. и ее примен. 1962. Т. 7. № 4. С. 393–409.
- [22] Боровков А. А. Оценки для распределения сумм и максимумов сумм случайных величин при невыполнении условия Крамера // Сиб. матем. ж. 2000. Т. 5. № 5. С. 997–1038.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: borovkov@math.nsc.ru

Поступило
17.05.2002
Исправленный вариант
01.04.2003