Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Самовол, Локальные гладкие преобразования дифференциальных уравнений, сохраняющие линейные автоморфизмы, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 590–603

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:34:16

УДК 517.91

ЛОКАЛЬНЫЕ ГЛАДКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОХРАНЯЮЩИЕ ЛИНЕЙНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ

В. С. Самовол

Настоящая работа посвящена проблемам, связанным с локально гладкими преобразованиями обыкновенных дифференциальных уравнений, сохраняющими их линейные автоморфизмы.

Библиография: 6 названий.

Введение. В данной работе мы продолжаем изучение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с линейными автоморфизмами, начатое в статьях [1], [2]. Напомним, что речь идет о таких системах, правая часть которых не меняется в результате некоторой линейной замены переменных [3, гл. 3, п. 1.10].

Одним из наиболее эффективных методов анализа дифференциальных уравнений является их упрощение путем подходящего преобразования координат. В этой связи важным является вопрос о сохранении имеющегося автоморфизма после таких преобразований. Для формальных и аналитических систем этот вопрос исследован в [3]. В данной работе эта задача изучается для гладких систем в окрестности невырожденной особой точки.

Рассматривается вещественная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = Q(\xi), \quad (1)$$

где $\xi, Q(\xi)$ – векторы из $\mathbb{R}^r$, $Q(\xi)$ – функция класса C^l в некоторой окрестности нуля (здесь $l > 0$ – целое число или ∞), $Q(0) = 0$, матрица $\tilde{A} = Q'(0)$ не имеет собственных чисел с нулевой действительной частью. Точка $\xi = 0$ является неподвижной точкой для системы (1).

Пусть при линейном невырожденном преобразовании

$$\xi = B\eta, \quad t = \mu\tau \quad (2)$$

система (1) переходит в систему

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{d\tau} = \tilde{Q}(\eta), \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00177.

где

$$\tilde{Q}(\eta) = \mu B^{-1} Q(B\eta). \quad (4)$$

Если при этом оказывается, что $\tilde{Q}(\eta) \equiv Q(\eta)$, то преобразование (2) называется *линейным автоморфизмом* системы (1) (см. [3]). В дальнейшем предполагается наличие у системы (1) линейного автоморфизма (2). Ниже для краткости слово линейный мы будем часто опускать. Матрицу B будем называть *матрицей автоморфизма*.

Нас прежде всего будет интересовать возможность сохранения автоморфизма (2) системы (1) при ее приведении к нормальной форме (гладкая нормализация), а также при приведении системы к линейному виду (гладкая линеаризация). В работах [1], [2] было показано, что для сохранения автоморфизма (2) при указанных преобразованиях системы (1) достаточно, чтобы собственные числа матрицы B автоморфизма являлись корнями некоторой целой степени из единицы, а жорданова форма этой матрицы была диагональной матрицей.

В данной работе мы покажем, что для сохранения автоморфизма при гладкой нормализации и гладкой линеаризации системы достаточно, чтобы спектр матрицы B автоморфизма (2) находился на единичной окружности, а жорданова форма этой матрицы была диагональной матрицей. Это условие мы назовем *условием ортогональности*, так как оно означает, что матрица B вещественно-подобна ортогональной матрице.

В работах [1], [2] были приведены примеры, показывающие существенность расположения спектра матрицы автоморфизма на единичной окружности. В данной статье будет построен пример, показывающий существенность условия диагональности жордановой формы матрицы автоморфизма.

1. Структура автоморфизма. Из равенства (4), в частности, следует, что $\tilde{A} = \mu B^{-1} \tilde{A} B$, где $\tilde{A} = Q'(0)$. Приравнявая определители правой и левой частей данного равенства, получаем для вещественной системы (1) и вещественного преобразования (2), что $\mu = \pm 1$.

Отметим, что если $\xi(\xi^0, t)$ – решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $\xi(\xi^0, 0) = \xi^0$, и (2) – автоморфизм этой системы, то имеют место равенства

$$\xi(B\xi^0, t) = B\xi(\xi^0, \mu t), \quad \xi(B^{-1}\xi^0, t) = B^{-1}\xi(\xi^0, \mu t). \quad (5)$$

Действительно, поскольку (2) является автоморфизмом системы (1), то вместе с $\xi(\xi^0, t)$ решением этой системы является и функция $\xi_1(\xi^0, t) = B^{-1}\xi(B\xi^0, \mu t)$, причем $\xi_1(\xi^0, 0) = \xi^0$. Из этого и из теоремы единственности, очевидно, следуют равенства (5). Таким образом, оператор сдвига по траекториям системы обладает тем же автоморфизмом, что и сама система.

После соответствующего стандартного линейного преобразования нашу систему можно привести к виду, где матрица $A = Q'(0)$ будет иметь блочно-диагональную форму $\tilde{A} = \text{diag}[A_1, A_2]$, где A_1, A_2 – матрицы, имеющие комплексную жорданову форму, причем спектры этих матриц расположены соответственно слева и справа от мнимой оси. Не ограничивая общности, будем считать, что система (1) уже имеет такой вид. При этом, разумеется, надо иметь в виду, что матрица автоморфизма также подвергается соответствующему преобразованию. Будем считать, что матрица B уже является преобразованной матрицей автоморфизма. Перепишем систему (1) более подробно:

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + f_1(x^1, x^2), \quad \dot{x}^2 = A_2 x^2 + f_2(x^1, x^2). \quad (6)$$

Здесь и далее необходимо иметь в виду, что система (6) уже не является вещественной. Однако поскольку исходная система (1) вещественна, то в системе (6) (а также при всех ее дальнейших преобразованиях) будет соблюдаться так называемое условие вещественности (см. [3, гл. 3, п. 1.9]). Этому же условию удовлетворяет и матрица B автоморфизма системы (6).

Рассматривая равенство $\tilde{A} = \mu B^{-1} \tilde{A} B$ как матричное уравнение относительно невырожденной матрицы B (см. [4, с. 199–203]) и учитывая блочно-диагональную форму матрицы $\tilde{A}$, приходим к следующим выводам.

1. Если $\mu = 1$, то матрица B имеет блочно-диагональную структуру $B = \text{diag}[B_1, B_2]$ и справедливы равенства

$$\begin{aligned} A_1 B_1 &= B_1 A_1, & A_2 B_2 &= B_2 A_2, \\ f_1(B_1 x^1, B_2 x^2) &= B_1 f_1(x^1, x^2), & f_2(B_1 x^1, B_2 x^2) &= B_2 f_2(x^1, x^2). \end{aligned}$$

2. Если $\mu = -1$ (это соответствует так называемой обратимой системе), то матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют равенству $A_1 = -A_2$. Ниже в этом случае будем обозначать $-A_1 = A_2 = A$. Таким образом, жорданова форма матрицы $\tilde{A}$ имеет вид $\text{diag}[-A, A]$, где спектр матрицы A расположен справа от мнимой оси. Размер матрицы A будем обозначать буквой n . Из [4] также следует, что матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix},$$

где B_1, B_2 – квадратные матрицы, размеры которых равны n . Также справедливы равенства

$$\begin{aligned} AB_1 &= B_1 A, & AB_2 &= B_2 A, \\ f_1(B_1 x^2, B_2 x^1) &= -B_1 f_2(x^1, x^2), & f_2(B_1 x^2, B_2 x^1) &= -B_2 f_1(x^1, x^2). \end{aligned}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только близкие к тождественным преобразования системы (6). При этом задача состоит в том, чтобы при таких преобразованиях система сохраняла автоморфизм (2).

2. “Выпрямление” устойчивого и неустойчивого многообразий. Хорошо известно, что у системы (6) имеются инвариантные многообразия: устойчивое ($x^2 = \varphi(x^1)$) и неустойчивое ($x^1 = \psi(x^2)$). Широко распространенным и весьма полезным приемом является “выпрямление” этих многообразий, т.е. такая замена переменных, после которой они превращаются в координатные подпространства. В нашем случае необходимо позаботиться о том, чтобы при такой замене переменных сохранялся автоморфизм системы. Сформулируем соответствующее утверждение, доказательство которого дано в [1] (случай $\mu = 1$) и в [2] (случай $\mu = -1$).

Рассмотрим вектор

$$H(z) = \begin{pmatrix} \psi(x^2) \\ \varphi(x^1) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для вектора $H(z)$ справедливо равенство $H(Bz) = BH(z)$.

Утверждение теоремы по сути дела означает, что “выпрямляющая” замена переменных

$$y^1 = x^1 - \psi(x^2), \quad y^2 = x^2 - \varphi(x^1)$$

коммутирует с автоморфизмом системы и, следовательно, преобразованная система будет, как и исходная, обладать автоморфизмом (2), а устойчивое и неустойчивое многообразия преобразований системы будут являться линейными подпространствами $y^1 = 0$, $y^2 = 0$.

3. Локальная гладкая эквивалентность и нормализация систем уравнений. Следующий вопрос, который нас интересует, заключается в анализе ситуации, описываемой известной теоремой Стернберга–Ченя о локальной гладкой эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [5, теорема 12.2]). Достаточные условия такой эквивалентности и методы построения сопрягающего диффеоморфизма хорошо известны. Остается выяснить возможность сохранения автоморфизма системы уравнений при соответствующих ее преобразованиях.

Рассмотрим две системы уравнений

$$\dot{\xi} = Q_1(\xi), \quad (7)$$

$$\dot{\eta} = Q_2(\eta), \quad (8)$$

где $\xi, \eta, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^r$, $r = n_1 + n_2$, функции Q_1, Q_2 принадлежат классу C^l , $l > 0$ – целое число или ∞ , $Q_1(0) = Q_2(0) = 0$,

$$\frac{\partial Q_1(0)}{\partial \xi} = \frac{\partial Q_2(0)}{\partial \eta} = \tilde{A} = \text{diag}[A_1, A_2],$$

A_i – квадратная матрица размера n_i , $i = 1, 2$, $n_1 + n_2 = r$, спектры матриц A_1 и A_2 лежат соответственно левее и правее мнимой оси.

Пусть, кроме того, системы (7) и (8) обладают автоморфизмом (2), т.е.

$$\mu B^{-1} Q_1(B\xi) \equiv Q_1(\xi), \quad \mu B^{-1} Q_2(B\eta) \equiv Q_2(\eta).$$

В соответствии с теоремой 1 будем считать, что у систем (7) и (8) имеются “выпрямленные” инвариантные многообразия

$$\begin{aligned} M_{1\xi} &= \{\xi_i = 0, 1 \leq i \leq n_1\}, & M_{2\xi} &= \{\xi_i = 0, n_1 + 1 \leq i \leq r\}, \\ M_{1\eta} &= \{\eta_i = 0, 1 \leq i \leq n_1\}, & M_{2\eta} &= \{\eta_i = 0, n_1 + 1 \leq i \leq r\}. \end{aligned}$$

Через $\Lambda = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq r\}$ будем обозначать спектр матрицы $\tilde{A}$.

Если существует невырожденный диффеоморфизм $\xi = g(\eta)$ класса C^k , $k \geq 1$, приводящий систему (7) к виду (8) в некоторой окрестности начала координат, то говорят, что системы (7) и (8) C^k -эквивалентны (локально эквивалентны). Если при этом система (8) линейна, то говорят о C^k -линеаризации системы (7). Нас интересует существование указанного диффеоморфизма, коммутирующего с линейным автоморфизмом системы, т.е. такого, что $g(B\eta) \equiv Bg(\eta)$. В этом случае мы будем говорить о C^k -эквивалентности систем (7) и (8) с сохранением автоморфизма (2).

В работах [1], [2] рассматривались причины, вследствие которых с точки зрения вопросов локальной гладкой эквивалентности естественным для автоморфизма системы является условие

$$B^{\tilde{m}} = E, \quad (9)$$

где E – единичная матрица, а $\tilde{m} > 0$ – некоторое целое число. Это означает, что собственные числа матрицы B являются корнями степени $\tilde{m}$ из единицы, а также, что жорданова форма матрицы B является диагональной матрицей. В [1], [2] было доказано, что условие (9) является достаточным для сохранения автоморфизма системы при ее гладких преобразованиях. Наряду с условием (9) естественно рассмотреть более слабый его аналог

$$|\beta_i| = 1, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (10)$$

где $\beta_1, \dots, \beta_r$ – собственные числа матрицы B . В [1], [2] были построены примеры двух локально гладко эквивалентных систем (1), обладающих одним автоморфизмом (2), для которого не выполнено условие (10), вследствие чего, как было показано, всякое гладкое преобразование одной системы в другую не коммутирует с этим автоморфизмом.

В [2] был поставлен вопрос о достаточности условия (10) для гладкой эквивалентности систем с сохранением автоморфизма. В данной работе мы ответим на этот вопрос.

Если собственные числа вещественной матрицы лежат на единичной окружности (т.е. удовлетворяют условию (10)) и комплексная жорданова форма этой матрицы диагональна, то будем говорить, что матрица (и соответствующий ей автоморфизм) удовлетворяет *условию ортогональности*. Данное условие означает, что вещественная жорданова форма матрицы является ортогональной матрицей или, что то же самое, что матрица вещественно-подобна ортогональной матрице. Ниже мы покажем, что условие ортогональности автоморфизма является определяющим при решении вопросов гладкой эквивалентности и гладкой линеаризации с сохранением автоморфизма.

Выше мы отмечали, что построенные в [1], [2] примеры показывают, что часть условия ортогональности, определяемая равенствами (10), является существенной с точки зрения локальной гладкой эквивалентности систем вида (7) и (8) с сохранением автоморфизма. Приведем пример, показывающий, что условие диагональности жордановой формы матрицы B также является существенным в этом смысле.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим две системы уравнений в $\mathbb{R}^4$:

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \quad \dot{z} = 2z + axy, \quad \dot{w} = 2w + ay^2, \quad a \neq 0, \quad (11)$$

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{z}_1 = 2z_1, \quad \dot{w}_1 = 2w_1. \quad (12)$$

Система (12) является линейной частью системы (11). Согласно [6] (см. также условие $S(k)$, приведенное ниже между формулами (36) и (37)) существует диффеоморфизм класса C^1 , линеаризующий систему (11). Системы (11) и (12) обладают автоморфизмом (2), где $\mu = 1$ и

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Здесь $\beta_i = 1, 1 \leq i \leq 4$, т.е. условие (10) выполнено.

Наша цель – показать, что не существует невырожденного диффеоморфизма, коммутирующего с указанным автоморфизмом системы и приводящего систему (11) к линейному виду (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В задачах огладкой линеаризации с сохранением автоморфизма можно без ограничения общности рассматривать только преобразования, близкие к тождественным. Действительно, если невырожденный диффеоморфизм

$$\xi = C\eta + G(\eta), \quad \det C \neq 0, \quad \|G(\eta)\| = o(\|\eta\|), \quad (14)$$

коммутирующий с автоморфизмом (2), приводит систему (1) к линейному виду

$$\dot{\eta} = \hat{A}\eta, \quad (15)$$

то имеет место равенство $\hat{A} = C^{-1}\tilde{A}C$, из чего следует, что линейное преобразование

$$\eta = C^{-1}\zeta \quad (16)$$

приводит систему (15) к линейной форме

$$\dot{\zeta} = \tilde{A}\zeta.$$

Отметим при этом, что поскольку преобразование (14) коммутирует с автоморфизмом (2) системы (1), то и преобразование (16) также коммутирует с данным автоморфизмом. Близкое к тождественному преобразование

$$\xi = \zeta + G(C^{-1}\zeta) \quad (17)$$

будет являться линеаризующим диффеоморфизмом системы (1) того же класса гладкости, что и преобразование (14). Вместе с тем, если преобразование (14) коммутирует с автоморфизмом системы (1), то и преобразование (17) будет также коммутировать с автоморфизмом системы. Это следует из того, что (17) является суперпозицией преобразований (14) и (16), каждое из которых коммутирует с автоморфизмом системы (1).

Перейдем теперь к рассмотрению системы (11). Если бы для системы (11) существовал линеаризующий невырожденный диффеоморфизм, сохраняющий автоморфизм системы, то согласно замечанию 1 существовал бы и близкий к тождественному диффеоморфизм, коммутирующий с ее автоморфизмом, который мы обозначим через

$$\eta = \xi + H(\xi), \quad H(\xi) \in C^1, \quad \|H(\xi)\| = o(\|\xi\|), \quad \xi = (x, y, z, w), \quad \eta = (x_1, y_1, z_1, w_1).$$

Поскольку у системы (12) многообразие $L = \{z_1 = 0, w_1 = 0\}$ инвариантно относительно действия указанного автоморфизма, то и многообразие L_1 системы (11), являющееся прообразом L , также инвариантно относительно данного автоморфизма. Вместе с тем очевидно, что указанные многообразия L и L_1 являются инвариантными многообразиями систем (12) и (11) соответственно.

Очевидно, L_1 имеет вид $L_1 = \{z + h_1(x, y, z, w) = 0, w + h_2(x, y, z, w) = 0\}$, где $h_i(\xi) \in C^1$, $\|h_i(\xi)\| = o(\|\xi\|)$, $i = 1, 2$. Разрешая данные уравнения относительно переменных z, w , получаем, что при наших предположениях у системы (11) в некоторой окрестности начала координат существует гладкое (класса C^1) инвариантное многообразие вида

$$z = f(x, y), \quad w = g(x, y), \quad (18)$$

инвариантное также относительно автоморфизма системы, т.е. выполняется условие

$$F(B\xi) = BF(\xi), \quad (19)$$

где

$$F(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z - f(x, y) \\ w - g(x, y) \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Покажем, что это невозможно.

Прежде всего отметим, что условие (19) можно записать следующим образом:

$$f(x + y, y) = f(x, y) + g(x, y), \quad g(x + y, y) = g(x, y). \quad (20)$$

Пусть окрестность нуля, в которой существует инвариантное многообразие (18), имеет радиус ε . За счет линейной замены переменных $x = cx_1$, $y = cy_1$ число ε можно сделать сколь угодно большим, при этом изменится только коэффициент a в системе (11). Поэтому без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $\varepsilon = 3$.

Наряду с функцией $g(x, y)$ из инвариантного многообразия (18) рассмотрим функцию $u(x, y) = g(x, y) - ay^2 \ln |y|$. Отметим, что вместе с функцией $g(x, y)$ функция $u(x, y)$ также принадлежит классу C^1 . Из (20) следует, что функции $f(x, y)$, $u(x, y)$ удовлетворяют равенствам

$$f(x + y, y) = f(x, y) + u(x, y) + ay^2 \ln |y|, \quad u(x + y, y) = u(x, y). \quad (21)$$

Функция $u(x, y)$, очевидно, удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} y = 2u(x, y),$$

т.е. является однородной функцией второй степени.

До сих пор функция $g(x, y)$ и вместе с ней и функция $u(x, y)$ были определены в ε -окрестности начала координат. Доопределим функцию $u(x, y)$ по однородности на всем пространстве. Заметим, что так определенная функция $u(x, y)$ будет по-прежнему удовлетворять второму равенству из (21). Действительно, для произвольной точки (x, y) найдется число λ такое, что точка $(x_1, y_1) = (x/\lambda, y/\lambda)$ принадлежит ε -окрестности начала координат, где выполняется (21). Тогда

$$u(x + y, y) = u(\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda y_1) = \lambda^2 u(x_1 + y_1, y_1) = \lambda^2 u(x_1, y_1) = u(\lambda x_1, \lambda y_1) = u(x, y)$$

и требуемое равенство установлено для всех точек пространства.

Вследствие своей однородности функция $u(x, y)$ удовлетворяет равенству

$$u(x, y) = y^2 h\left(\frac{x}{y}\right), \quad y \neq 0, \quad h(x) = u(x, 1). \quad (22)$$

Из (21) следуют равенства

$$f(x + ky, y) = f(x, y) + ku(x, y) + kay^2 \ln |y|, \quad u(x + ky, y) = u(x, y), \quad (23)$$

где $k = 1, 2, \dots$.

Подставляя (22) в (23), получаем

$$h(x+k) = h(x), \quad f(x+ky, y) = f(x, y) + ky^2 h\left(\frac{x}{y}\right) + kay^2 \ln |y|. \quad (24)$$

Положив в (24) $x = 1, y = 1/k$, получим

$$f\left(2, \frac{1}{k}\right) = f\left(1, \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}h(k) + \frac{a}{k} \ln\left(\frac{1}{k}\right).$$

Кроме того, из (24) следует, что $h(k) \equiv h(0)$ при всех $k = 1, 2, \dots$. С учетом этого последнее равенство приобретает вид

$$f\left(2, \frac{1}{k}\right) = f\left(1, \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}h(0) + \frac{a}{k} \ln\left(\frac{1}{k}\right),$$

что противоречит при $a \neq 0$ C^1 -гладкости функции $f(x, y)$ в точке $(2, 0)$. Следовательно, для системы (11) не существует линеаризующего диффеоморфизма, сохраняющего ее линейный автоморфизм с матрицей (13).

Вопрос о локальной гладкой эквивалентности систем (7) и (8) с сохранением их автоморфизма решается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. *Для систем (7) и (8), где $l = k + 1$, обладающих линейным автоморфизмом (2) с матрицей B , которая удовлетворяет условию ортогональности, существует целое число $N = N(k, \Lambda)$, обладающее следующим свойством: если при малых ξ для всех частных производных $G^{(i)}(\xi)$ порядка $i \leq k$ разности $G(\xi) = Q_1(\xi) - Q_2(\xi)$ справедлива оценка $\|G^{(i)}(\xi)\| \leq D\|(\xi_1, \dots, \xi_r)\|^{N-i}$ (D – некоторая константа), то для системы (7) существует невырожденная замена переменных класса C^k*

$$\xi = g(\eta), \quad (25)$$

удовлетворяющая условию $g(B\eta) = Bg(\eta)$ и приводящая эту систему к виду (8), т.е. системы (7) и (8) C^k -эквивалентны с сохранением автоморфизма.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Пусть задана квадратная вещественная матрица C размерности p , удовлетворяющая условию ортогональности. Тогда в $\mathbb{R}^p$ существует положительно определенная квадратичная форма $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^p$, такая, что $h(Cx) = h(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть искомая квадратичная форма задается матрицей T , т.е. $h(x) = x'Tx$, $x' = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Необходимо найти такую положительно определенную форму, матрица T которой удовлетворяла бы условию

$$C'TC = T. \quad (26)$$

Существует вещественная невырожденная матрица U такая, что $C = USU^{-1}$, где S – вещественная жорданова форма матрицы C , имеющая вследствие условия ортогональности следующий вид:

$$S = \text{diag}[S_1, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots, S_{k+m}],$$

где

$$S_i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}$$

при $1 \leq i \leq k$, $S_i = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ при $k+1 \leq i \leq m$, $p = 2k + m$.

Нетрудно видеть, что условие (26) эквивалентно равенству $S'T_1S = T_1$, где $T_1 = U'TU$.

Учитывая, что $S' = S^{-1}$, в качестве матрицы T_1 можно взять единичную матрицу, и, следовательно, матрица $T = (UU')^{-1}$ будет удовлетворять равенству (26). Лемма доказана.

Важную роль в решении вопросов гладкой эквивалентности и линеаризации систем дифференциальных уравнений, обладающих линейным автоморфизмом, играют некоторые вспомогательные функции, построение которых описывается в следующей лемме.

ЛЕММА 2. *Для системы (6), обладающей автоморфизмом (2), который удовлетворяет условию ортогональности, существуют положительно определенные квадратичные формы $h_1(x)$, $h_2(y)$, $h(\xi) = h_1(x) + h_2(y)$, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$h_1(B_1x) = h_1(x), \quad h_2(B_2y) = h_2(y) \quad \text{при } \mu = 1, B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$h_1(B_1x) = h_2(x), \quad h_2(B_2y) = h_1(y) \quad \text{при } \mu = -1, B = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$h(B\xi) = h(\xi). \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование квадратичных форм $h_1(x)$, $h_2(y)$ при $\mu = 1$ непосредственно следует из леммы 1, так как в этом случае вместе с матрицей B условию ортогональности удовлетворяют и матрицы B_1, B_2 . Последовательно полагая в лемме 1 $C = B_1$ и $C = B_2$, получаем требуемое условие (27). Рассмотрим теперь случай $\mu = -1$.

Пусть искомые квадратичные формы задаются соответственно матрицами T_1 и T_2 , т.е. $h_i(x) = x'T_i x$, $i = 1, 2$. Тогда для выполнения утверждения (28) требуется, чтобы матрицы T_1 и T_2 удовлетворяли равенствам

$$B_1'T_1B_1 = T_2, \quad (30)$$

$$B_2'T_2B_2 = T_1. \quad (31)$$

Подставляя (30) в (31), получаем уравнение для матрицы T_1

$$(B_1B_2)'T_1(B_1B_2) = T_1. \quad (32)$$

При этом необходимо, чтобы матрица T_1 , удовлетворяющая уравнению (32), задавала положительно определенную квадратичную форму. Такое решение у уравнения (32) существует, поскольку матрица $B^2 = \text{diag}[B_1B_2, B_2B_1]$ удовлетворяет условию ортогональности вместе с матрицей B и, таким образом, этому же условию удовлетворяет матрица B_1B_2 . Следовательно, уравнение (32) имеет вид (26) и матрица T_1 существует. Очевидно, что матрица T_2 , определяемая равенством (30), также задает положительно

определенную квадратичную форму. Отметим в заключение, что условие (29) следует из (27) и (28). Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 удобно сначала преобразовать системы (7) и (8) так, чтобы их решения были определены при всех $-\infty < t < +\infty$. Для этого надо заметить функции $Q_i(\xi)$, $i = 1, 2$, функциями, определенными при всех ξ и совпадающими с функциями $Q_i(\xi)$, $i = 1, 2$, при малых ξ , но равными линейной части $\tilde{A}\xi$ вне некоторой окрестности начала координат. При этом важно сохранение автоморфизма преобразованных систем уравнений. Указанное преобразование по существу проводится так же, как и в лемме 3.1 в [5, с. 279–281], с тем лишь изменением, что в качестве сглаживающей функции надо взять такую бесконечно дифференцируемую функцию $\phi(\tau)$, $\tau = h(\xi)$, где $h(\xi)$ – функция, определенная в лемме 2. При этом функция $\phi(\tau)$ выбирается так же, как и функция $\varphi(t)$ в указанной лемме 3.1 в [5], а именно: $\phi(\tau) = 1$ при малых значениях аргумента и равна нулю вне некоторой окрестности нуля, а при остальных τ она принимает значения между 0 и 1. Преобразование функций $Q_i(\xi)$, $i = 1, 2$, получается умножением их нелинейных частей на построенную выше функцию $\phi(h(\xi))$. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что системы (7) и (8) уже удовлетворяют указанному свойству. Таким образом, решения систем (7) и (8) являются бесконечно продолжаемыми, и область определения отображений $T^t: \xi^0 \rightarrow \xi(\xi^0, t)$, $T_1^t: \eta^0 \rightarrow \eta(\eta^0, t)$ совпадает со всем пространством.

Доказательство теоремы 2. Существует несколько способов построения сопрягающего диффеоморфизма. Для того чтобы такой диффеоморфизм коммутировал с автоморфизмом системы, воспользуемся схемой, предложенной в доказательстве теоремы 12.2 в [5, гл. IX].

Рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \varphi(x, y) = -h_1(\xi) + h_2(\xi)$, где $h_1(\xi) = h_1(x)$, $h_2(\xi) = h_2(y)$ – функции, определенные в лемме 2.

Следуя обозначениям [5, с. 314], определим множества K^0, K^+, K^- следующим образом (несколько иначе, чем в [5]):

$$K^0 = \{\xi : \varphi(\xi) = 0\}, \quad K^+ = \{\xi : \varphi(\xi) > 0\}, \quad K^- = \{\xi : \varphi(\xi) < 0\}.$$

Как и в [5], обозначим через T и T_1 операторы сдвига на единицу времени по траекториям системы (7) и (8) соответственно. Следуя [5], положим $K^j = T^j K^0$, $j = 0, \pm 1, \dots$, где $K^0 = \{\xi : \xi \in K^+, T^{-1}\xi \in K^-\}$, $K^j = \{\xi : T^{-j}\xi \in K^+, T^{-j-1}\xi \in K^-\}$.

Отметим, что существует число $\varepsilon > 0$ такое, что верны следующие оценки:

$$\begin{aligned} -(\alpha_2 + \varepsilon)h_1(\xi(\xi^0, t)) &< \frac{dh_1(\xi(\xi^0, t))}{dt} < -(\alpha_1 - \varepsilon)h_1(\xi(\xi^0, t)), \\ (\alpha_1 - \varepsilon)h_2(\xi(\xi^0, t)) &< \frac{dh_2(\xi(\xi^0, t))}{dt} < (\alpha_2 + \varepsilon)h_2(\xi(\xi^0, t)), \end{aligned}$$

где $\xi(\xi^0, t)$ – решение системы (7), удовлетворяющее начальному условию

$$\begin{aligned} \xi(\xi^0, 0) &= \xi^0, \quad \alpha_1 = \min(|\operatorname{Re} \lambda_i|, 1 \leq i \leq r), \\ \alpha_1 - \varepsilon &> 0, \quad \alpha_2 = \max(|\operatorname{Re} \lambda_i|, 1 \leq i \leq r), \end{aligned}$$

λ_i – элементы спектра матрицы $\tilde{A}$. Вследствие указанных оценок все определения являются корректными.

В качестве сопрягающего диффеоморфизма для отображений T^t и T_1^t положим согласно упражнению 14.1 [5, с. 324] $R(\xi) = T_1^{-t(\xi)} T^t(\xi) \xi$, где $t(\xi)$ таково, что $T^t(\xi) \xi \in K^0$, $\xi \notin M_{1\xi} \cup M_{2\xi}$. Все рассуждения [5, с. 313–324] полностью сохраняются. Остается убедиться в том, что сопрягающий диффеоморфизм коммутирует с автоморфизмом системы (7).

Из определения функции $\varphi(\xi)$ и равенств (27), (28) следует, что $\varphi(B\xi) = -\varphi(\xi)$, поэтому если $\xi \in K^0$, то $B\xi \in K^0$. Таким образом, поскольку по определению числа $t(\xi^0)$ $\xi(\xi^0, t(\xi^0)) \in K^0$, то $B\xi(\xi^0, t(\xi^0)) \in K^0$, откуда, в свою очередь, с учетом (5) следует, что $\xi(B\xi^0, \mu t(\xi^0)) \in K^0$. Отсюда получаем, что $t(B\xi^0) = \mu t(\xi^0)$. Далее имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} R(B\xi^0) &= T_1^{-t(B\xi^0)} T^{t(B\xi^0)} B\xi^0 = T_1^{-t(B\xi^0)} T^{\mu t(\xi^0)} B\xi^0 = T_1^{-t(B\xi^0)} B T^{t(\xi^0)} \xi^0 \\ &= B T_1^{-\mu t(B\xi^0)} T^{t(\xi^0)} \xi^0 = B T_1^{-t(\xi^0)} T^{t(\xi^0)} \xi^0 = B R(\xi^0). \end{aligned}$$

Четвертое равенство в этой цепочке следует из равенства (5), если его записать для решений системы (8): $\eta(B\eta^0, t) = B\eta(\eta^0, \mu t)$, а в пятом равенстве учтено, что $\mu^2 = 1$. Коммутативность сопрягающего диффеоморфизма и автоморфизма системы установлена. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим теперь задачу локальной гладкой нормализации системы (1) с сохранением ее автоморфизма (2). Будем рассматривать системы (1) класса C^∞ . При этом без ограничения общности считаем, что матрица $\tilde{A}$ линейной части системы имеет нормальную жорданову форму.

Хорошо известно, что с помощью преобразования, близкого к тождественному,

$$\xi = u + F(u), \quad \|F(u)\| = o(\|u\|), \quad (33)$$

где $F(u)$ – полином от своих переменных, можно систему (1) привести к виду

$$\dot{u} = \tilde{A}u + R_1(u) + R_2(u). \quad (34)$$

Здесь $R_1(u)$ – полином, состоящий из нелинейных резонансных членов степени, не превосходящей некоторого целого числа N , а для функции $R_2(u)$ выполняется оценка $\|R_2(u)\| = o(\|u\|^N)$ при $\|u\| \rightarrow 0$. При этом число N можно выбрать сколь угодно большим. Кроме того, из [3, гл. 3, ш. 1.9, 1.10] следует, что преобразование (33) можно выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло условию вещественности, а также коммутировало с автоморфизмом системы, т.е. $F(Bu) = BF(u)$. Таким образом, система (34) также обладает автоморфизмом (2), т.е. для функций $R_1(x), R_2(x)$ выполняются условия

$$R_1(Bu) = \mu B R_1(u), \quad R_2(Bu) = \mu B R_2(u).$$

Пусть теперь задано некоторое целое число $k > 0$. Пусть также для системы (34) выполнено неравенство $N > N(k, \Lambda)$, где $N(k, \Lambda)$ – число, существование которого утверждается в теореме 2. Тогда, применяя к системе (34) теорему 2, получаем, что существует близкое к тождественному преобразование класса C^k , коммутирующее с автоморфизмом системы, приводящее эту систему к полиномиальной нормальной форме

$$\dot{v} = \tilde{A}v + R_1(v), \quad (35)$$

обладающей автоморфизмом (2). Отметим, что из доказательства теоремы 2 следует, что указанное преобразование будет удовлетворять условию вещественности. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Для любого целого числа $k > 0$ существует близкое к тождественному преобразование класса C^k , коммутирующее с автоморфизмом (2) и приводящее в некоторой окрестности начала координат систему (1) класса C^∞ к полиномиальной нормальной форме (35).

4. Гладкая линеаризация систем уравнений. Исследуем теперь проблему существования гладкого линеаризующего преобразования системы (1) класса C^∞ , коммутирующего с ее автоморфизмом (2). В соответствии с теоремой 3 будем считать, что система (1) приведена к полиномиальной нормальной форме (35). Задача, таким образом, сводится к линеаризации системы (35).

Для формулировки заключительных результатов запишем систему (35) в более детальном виде

$$\dot{v}_i = \varepsilon_i v_{i-1} + \lambda_i v_i + a_i(v), \quad 1 \leq i \leq r, \quad (36)$$

$\varepsilon_i = 0$ или $\varepsilon_i > 0$, $a_i(v) = \sum_{|s|=2}^N a_s^i v^s$, $s = (s_1, \dots, s_r)$ – неотрицательные целочисленные наборы, $|s| = \sum_{i=1}^r s_i$. Считаем, что $\operatorname{Re} \lambda_{i+1} \leq \operatorname{Re} \lambda_i < 0$ при $1 \leq i \leq n_1 - 1$ и $\operatorname{Re} \lambda_{i+1} \geq \operatorname{Re} \lambda_i > 0$ при $n_1 + 1 \leq i \leq r$. В случае $\mu = -1$ в соответствии с видом матрицы $\tilde{A} = \operatorname{diag}[-A, A]$ дополнительно считаем, что $r = 2n$, $n_1 = n$, $\lambda_{i+n} = -\lambda_i$, $\varepsilon_{i+n} = \varepsilon_i$ при $n + 1 \leq i \leq 2n$.

Для каждого целочисленного набора $s \in W = \bigcup_{i=1}^r \{s : a_s^i \neq 0\}$ обозначим

$$\rho_{p,k}(s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^p s_i |\operatorname{Re} \lambda_i| - k |\operatorname{Re} \lambda_p|, & 1 \leq p \leq n_1, \\ \sum_{i=n_1+1}^p s_i \operatorname{Re} \lambda_i - k \operatorname{Re} \lambda_p, & n_1 + 1 \leq p \leq r, \end{cases} \quad \rho_k(s) = \max_{1 \leq p \leq r} \rho_{p,k}(s).$$

Следуя терминологии работы [6], будем говорить, что набор s удовлетворяет условию $S(k)$, если выполняется неравенство $\rho_k(s) > 0$. Если же это неравенство выполняется для каждого набора $s \in W$, то будем говорить, что система (36) удовлетворяет условию $S(k)$.

Рассмотрим вместе с системой (36) соответствующую линейную систему

$$\dot{z}_i = \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (37)$$

Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ [6, теорема 3]. Если для системы (36) выполнено условие $S(k)$, то существует близкое к тождественному преобразование

$$v_i = z_i + H_i(z), \quad |H_i(z)| = o(\|z\|), \quad 1 \leq i \leq r, \quad (38)$$

класса C^k , приводящее систему (36) к виду (37), т.е. системы (36) и (37) C^k -эквивалентны.

Таким образом, условие $S(k)$ является достаточным условием C^k -линеаризации системы (36). Вопрос, который нам осталось обсудить, заключается в том, можно ли построить преобразование (38) так, чтобы оно коммутировало с автоморфизмом системы (36). Ответ на этот вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 4. Если линейный автоморфизм системы (36) удовлетворяет условию ортогональности, то условие $S(k)$ является достаточным условием для существования преобразования (38), приводящего эту систему к линейному виду (37) и коммутирующего с автоморфизмом системы, т.е. система (36) C^k -линеаризуема с сохранением ее автоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомые функции $H_i(z)$ должны удовлетворять системе уравнений в частных производных, характеристическая система для которой имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, & 1 \leq i \leq r, \\ \dot{H}_i &= \varepsilon_i H_{i-1} + \lambda_i H_i + a_i(z + H), & 1 \leq i \leq r. \end{aligned} \quad (39)$$

Наша цель – показать, что у системы (39) имеется инвариантное многообразие класса C^k вида $H = \varphi(z)$, $\|\varphi(z)\| = o(\|z\|)$, удовлетворяющее условию $\varphi(Bz) = B\varphi(z)$. Это будет означать, что отображение $v = z + \varphi(z)$ является искомым.

Следуя технологии линеаризации, разработанной в [6], произведем в системе (39) замену переменных $H = g + \Phi(z)$, $\Phi(z) \in C^k$, после которой данная система примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \\ \dot{g}_i &= \varepsilon_i g_{i-1} + \lambda_i g_i + \tilde{a}_i(z, g) + \tilde{a}_i(z), & 1 \leq i \leq r, \end{aligned} \quad (40)$$

где функции $\tilde{a}_i(z, g)$, $\tilde{a}_i(z)$ таковы, что $\tilde{a}_i(z, 0) \equiv 0$, $|\tilde{a}_i(z)| = o(\|z\|^N)$, причем число N можно сделать сколь угодно большим.

Ниже мы покажем, что функция $\Phi(z)$ может быть построена так, что

$$\Phi(Bz) = B\Phi(z). \quad (41)$$

Вследствие этого система (40) обладает линейным автоморфизмом (2) с матрицей B .

Применяя к системе (40) доказанную выше теорему 2, получаем, что существует преобразование $g = g^1 + \Psi(z)$, $\|\Psi(z)\| = o(\|z\|)$, $\Psi(z) \in C^k$, приводящее эту систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \varepsilon_i z_{i-1} + \lambda_i z_i, \\ \dot{g}_i^1 &= \varepsilon_i g_i^1 + \lambda_i g_i^1 + \tilde{a}_i(z, g^1), & 1 \leq i \leq r. \end{aligned} \quad (42)$$

При этом для функции $\Psi(z)$ выполняется условие $\Psi(Bz) = B\Psi(z)$, т.е. преобразование коммутирует с автоморфизмом системы. У системы (42) многообразие $g^1 = 0$ является инвариантным, следовательно, у системы (40) многообразие $g = \Psi(z)$ также инвариантно, из чего следует, что преобразование $H = \varphi(z) = \Phi(z) + \Psi(z) \in C^k$ является искомым и удовлетворяет требуемому условию $\varphi(Bz) = B\varphi(z)$.

Нам осталось показать, что функция $\Phi(z)$ может быть построена так, что будет выполнено условие (41).

При построении вектор-функции $\Phi(z) = (\Phi_1(z), \dots, \Phi_r(z))$ мы будем следовать конструкции, реализованной в [1], [2]; а именно, определим эту функцию следующим образом:

$$\Phi_i(z) = \sum_{|s|=2}^N b_s^i z^s T^\omega, \quad 1 \leq i \leq r, \quad (43)$$

где z^s – резонансные наборы, удовлетворяющие условию $S(k)$, $T^\varpi = t_1^{\varpi_1} \dots t_r^{\varpi_r}$ – мономы от переменных $t_1(z), \dots, t_r(z)$, причем функции $t_j(z)$, $1 \leq j \leq r$, таковы, что производная каждой из них в силу линейной системы (37) равна единице.

Сохраняя идею построения функций $t_j(z)$, мы внесем в их конструкцию некоторые изменения. Пусть вначале $1 \leq j \leq n_1$. Для каждого числа $1 \leq j \leq n_1$ определим $q(j)$ как максимальное из чисел $1 \leq i \leq n_1$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j$. Для $n_1 + 1 \leq j \leq r$ число $q(j)$ определим как максимальное среди чисел $n_1 + 1 \leq i \leq r$, для которых $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j$.

В качестве функций $t_j(z) = t_j(z_1, z_2, \dots, z_r)$ рассмотрим взятое с обратным знаком время, за которое точка

$$\tilde{z} = \begin{cases} (z_1, z_2, \dots, z_{q(j)}, 0, \dots, 0), & 1 \leq j \leq n_1, \\ (0, \dots, 0, z_{n_1+1}, z_{n_1+2}, \dots, z_{q(j)}, 0, \dots, 0), & n_1 + 1 \leq j \leq r, \end{cases}$$

достигнет поверхности $h(\tilde{z}) = \varepsilon$, где $h(\tilde{z})$ – функция, определенная в лемме 2.

Из построения функции $h(\tilde{z})$ следует, что для функций $t_j(z)$ выполняются условия

- 1) при $\mu = 1$ $t_j(Bz) = t_j(z)$, $1 \leq j \leq r$;
- 2) при $\mu = -1$ $t_j(Bz) = -t_{n+j}(z)$, $1 \leq j \leq n$.

Все остальные рассуждения [1], [2], относящиеся к построению функции $\Phi(z)$, полностью сохраняются. Таким образом, существование требуемого многообразия у системы (39) установлено и, следовательно, для системы (36) существует близкое к тождественному преобразование класса C^k , приводящее ее к линейному виду (37) и коммутирующее с автоморфизмом (2). Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность А. Д. Брюно за полезные обсуждения вопросов, связанных с проблематикой данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самовол В. С. Гладкая эквивалентность дифференциальных уравнений и линейные автоморфизмы // Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 567–578.
- [2] Самовол В. С. Гладкая эквивалентность и линеаризация обратимых систем // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 1. С. 96–108.
- [3] Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979.
- [4] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [5] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
- [6] Самовол В. С. Линеаризация систем дифференциальных уравнений в окрестности инвариантных тороидальных многообразий // Тр. ММО. 1979. Т. 38. С. 187–219.