Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Лесных, Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 569–585

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:55:27

Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа

А. А. Лесных

В работе изучается скалярное дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа общего вида

$$\sum_{j=0}^m \int_0^h u^{(j)}(t-\theta) d\sigma_j(\theta) = 0, \quad t > h,$$

где $\sigma_j(\theta)$ – функции ограниченной вариации. Для решений этого уравнения получена оценка

$$\|u(t)\|_{W_2^m(T, T+h)} \leq CT^{q-1} e^{\kappa T} \|u(t)\|_{W_2^m(0, h)},$$

где C – постоянная, не зависящая от $u_0(t)$, а значения величин q и κ определяются свойствами характеристического определителя этого уравнения. Ранее эта оценка доказывалась для уравнений менее общего вида. Например, для кусочно постоянных функций $\sigma_j(\theta)$, или для случая, когда $\sigma_m(\theta)$ имеет скачки в обеих точках $\theta = 0$ и $\theta = h$. В настоящей работе эта оценка получена только при условии, что $\sigma_m(\theta)$ имеет скачок в точке $\theta = 0$, которое необходимо для корректной разрешимости начальной задачи.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Одним из важных вопросов в теории функционально-дифференциальных уравнений является вопрос об асимптотическом поведении решений. Среди обширной литературы по этому вопросу отметим монографии [1]–[5], в которых могут быть найдены дальнейшие ссылки.

В этой работе мы получаем точные оценки решений уравнений нейтрального типа достаточно общего вида. Отметим следующие результаты, наиболее близкие к результатам нашей работы. В [6] изучалась начальная задача

$$\frac{d}{dt} \left(u(t) + \int_0^h u(t-\theta) d\mu(\theta) \right) + \int_0^h u(t-\theta) d\eta(\theta) = 0, \quad t > h, \quad (1)$$

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [0, h], \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00712) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5247.2006.1).

где $\mu(\theta)$, $\eta(\theta)$ – функции ограниченной вариации. Для решений этой задачи при предположении, что $\mu(\theta)$ непрерывна при $\theta = 0$, получена следующая оценка в норме пространства непрерывных функций:

$$\|u\|_{C[t, t+h]} \leq de^{(\varkappa+\varepsilon)t} \|u_0\|_{C[0, h]}.$$

В этой оценке число $\varepsilon > 0$ в показателе экспоненты можно взять сколь угодно малым. В этом смысле указанная оценка является неточной.

Неточные оценки такого типа давно и хорошо известны (см. указанные выше монографии). Однако точные оценки решений уравнений нейтрального типа различных видов были получены сравнительно недавно. Наиболее общими, на наш взгляд, являются следующие результаты. В [7] изучалось уравнение вида

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^m A_{kj} u^{(j)}(t - h_k) = f(t), \quad t > h, \quad (3)$$

где A_{kj} – постоянные матрицы, $\det A_{0m} \neq 0$. Для решений этого уравнения получена оценка, которая при $f(t) \equiv 0$ имеет вид

$$\|u\|_{W_2^m(t-h, t)} \leq C(t+1)^{q-1} e^{\varkappa t} \|u_0\|_{W_2^m(0, h)}, \quad t \geq h, \quad (4)$$

где постоянная C не зависит от функции $u_0(t)$, а q и $\varkappa$ – некоторые действительные числа. Здесь уже нельзя уменьшить число $\varkappa$ и заменить его на $\varkappa - \varepsilon$, т.е. эта оценка является точной.

В уравнении (3) участвует лишь конечное число запаздываний по времени, задаваемых числами h_k . В то же время интерес вызывают такие уравнения, запаздывания в которых заданы в более общем виде. Например, в уравнении (1) запаздывания и коэффициенты задаются функциями ограниченной вариации $\mu(\theta)$ и $\eta(\theta)$. В случае, когда эти функции кусочно-постоянные с конечным числом скачков, мы получаем уравнение с конечным числом запаздываний. Точная оценка решений нейтральных уравнений вида (1), запаздывания и коэффициенты в которых задаются функциями ограниченной вариации, получена в [8], где изучается векторное уравнение вида

$$\frac{d}{dt} \int_0^h u(t - \theta) d\mu(\theta) + \int_0^h u(t - \theta) \eta(\theta) d\theta = f(t),$$

элементы матриц $\mu(\theta)$ лежат в $BV[0, h]$, а элементы матриц $\eta(\theta)$ лежат в $L_2(0, h)$. Однако оценка решений получена при более жестких ограничениях на коэффициенты. А именно, предполагается, что функция $\mu(\theta)$ имеет скачок не только при $\theta = 0$, но еще и при $\theta = h$.

В этой работе мы изучаем дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа, в котором сдвиги по времени и коэффициенты задаются функциями ограниченной вариации по аналогии с [6] и [8], а на коэффициенты наложены минимальные ограничения, гарантирующие лишь корректную разрешимость начальной задачи. Для решений соответствующей начальной задачи получена точная оценка в пространстве W_2^m . Сформулируем основной результат работы.

Рассмотрим следующую начальную задачу для скалярного дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа:

$$\sum_{j=0}^m \int_0^h u^{(j)}(t-\theta) d\sigma_j(\theta) = 0, \quad t > h, \quad (5)$$

$$u(t) = u_0(t), \quad t \in [0, h], \quad (6)$$

где функции $\sigma_j(\theta) \in BV[0, h]$. Целая функция

$$\Delta(\lambda) = \sum_{j=0}^m \lambda^j \int_0^h e^{-\lambda\theta} d\sigma_j(\theta) \quad (7)$$

называется *характеристическим определителем* уравнения (5).

Для точной формулировки основного результата работы нам понадобится следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \neq 0$. Тогда все нули $\Delta(\lambda)$ лежат в некоторой левой полуплоскости $\{\operatorname{Re} \lambda \leq C\}$, и поэтому существует число

$$\varkappa = \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \Delta(\lambda) = 0\} < \infty.$$

Кроме того, число нулей $n_\Delta(P(a, b, h))$ определителя $\Delta(\lambda)$, лежащих в прямоугольнике

$$P(a, b, h) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \in (a, \varkappa), \operatorname{Im} \lambda \in (b, b+h)\},$$

не зависит от $b \in \mathbb{R}$ и существует предел

$$q = \lim_{a \rightarrow \varkappa} \lim_{h \rightarrow 0} \max_{b \in \mathbb{R}} n_\Delta(P(a, b, h)). \quad (8)$$

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \neq 0$. Тогда при достаточно больших $T > 0$ для решения $u(t)$ задачи (5), (6) имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^m(T, T+h)} \leq CT^{q-1} e^{\varkappa T} \|u_0\|_{W_2^m(0, h)}, \quad (9)$$

где числа $\varkappa$ и q определены в теореме 1, а постоянная C не зависит от начальной функции $u_0(t)$.

В данной работе используется операционный подход (см., например, [2]), основанный на представлении решения задачи (5), (6) в виде преобразования Лапласа. При таком подходе ключевую роль играют вопросы о распределении нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ и его оценки на контурах интегрирования. Эти вопросы достаточно хорошо изучены (см., например, [2], [9]–[11]) в случае, когда $\Delta(\lambda)$ есть квазиполином вида

$$g(\lambda) = \sum_{j=0}^n p_j \lambda^{m_j} e^{\beta_j \lambda},$$

где p_j , m_j , β_j – некоторые числа. Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$, соответствующий уравнению (5), имеет более общий вид (7), для которого развитая ранее

техника не применима. Мы предлагаем новый подход для получения оценок таких функций, основанный на технике работы [12]. Мы также существенно используем методы работы [13] при оценке интегралов по счетному числу контуров. Результаты и методы нашей работы могут быть без существенных изменений перенесены на случай векторных и неоднородных уравнений нейтрального типа.

На протяжении работы числа $C, C_0, C_1, \dots$ обозначают постоянные, возможно, разные в разных формулах. Через $n_f(G)$ обозначается число нулей функции f в области G , а через $M_f(G)$ – максимум модуля функции f в области G . Кроме того, помимо обычной метрики мы будем использовать в комплексной плоскости метрику

$$\tilde{\rho}(z_1, z_2) = \max\{|\operatorname{Re}(z_1 - z_2)|, |\operatorname{Im}(z_1 - z_2)|\}.$$

Работа построена следующим образом. В п. 2 устанавливаются используемые в дальнейшем свойства характеристического определителя и его нулей. В п. 3 решение задачи (5), (6) записывается в виде преобразования Лапласа и строятся контуры интегрирования. Пункт 4 посвящен оценке интегралов по построенным контурам и завершению доказательства теоремы 2.

2. Свойства характеристического определителя и его нулей. В данном пункте мы приводим необходимые в дальнейшем свойства характеристического определителя и его нулей.

ЛЕММА 1. Пусть $\sigma_m(0+) - \sigma_m(0) \neq 0$. Тогда характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ обладает следующими свойствами:

а) для достаточно больших $\operatorname{Re} \lambda$ имеется асимптотика

$$\Delta(\lambda) \asymp \lambda^m; \quad (10)$$

б) в любой полуплоскости $\{\operatorname{Re} \lambda > C_1\}$ для характеристического определителя и его производных справедливы оценки

$$|\Delta^{(j)}(\lambda)| < C_2(|\lambda| + 1)^m, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m;$$

с) для всех $\varepsilon \in (0, 1/2]$ в любой полуплоскости $\{\operatorname{Re} \lambda > C_1\}$ вне ε -окрестности нулей $\Delta(\lambda)$ для достаточно больших λ справедлива оценка

$$|\Delta(\lambda)| > C_2|\lambda|^m, \quad (11)$$

где постоянная C_2 зависит только от ε и C_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $\Delta(\lambda)$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \Delta_1(\lambda) + \Delta_2(\lambda) + \Delta_3(\lambda), \\ \Delta_1(\lambda) &= \lambda^m(\sigma_m(0+) - \sigma_m(0)), \quad \Delta_2(\lambda) = \lambda^m \int_0^h e^{-\lambda\theta} d\tilde{\sigma}_m(\theta), \\ \Delta_3(\lambda) &= \sum_{j=0}^{m-1} \lambda^j \int_0^h e^{-\lambda\theta} d\sigma_j(\theta), \end{aligned}$$

где $\tilde{\sigma}_m(\theta) = \sigma_m(\theta)$ при $\theta \in (0, h]$ и $\tilde{\sigma}_m(\theta)$ непрерывна в нуле. Пользуясь непрерывностью функции $\tilde{\sigma}_m(\theta)$ в нуле, можно показать, что

$$\int_0^h e^{-\theta N} |d\tilde{\sigma}_m(\theta)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty,$$

откуда получаем в области $\{\operatorname{Re} \lambda > C\}$ представление

$$\Delta_2(\lambda) = o(1)\lambda^m, \quad (12)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow +\infty$. Далее, в области $\{\operatorname{Re} \lambda > C\}$ при $j = 0, 1, \dots, m-1$ имеем

$$\left| \lambda^j \int_0^h e^{-\lambda\theta} d\sigma_j(\theta) \right| \leq |\lambda|^j \int_0^h e^{-\theta \operatorname{Re} \lambda} |d\sigma_j(\theta)| \leq C|\lambda|^j. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что для достаточно больших $\operatorname{Re} \lambda$ выполняются оценки $|\Delta_2(\lambda)| < |\Delta_1(\lambda)|/3$ и $|\Delta_3(\lambda)| < |\Delta_1(\lambda)|/3$. Отсюда получаем утверждение а) леммы.

Оценка сверху $|\Delta(\lambda)| < C_1(|\lambda| + 1)^m$ справедлива не только при достаточно больших $\operatorname{Re} \lambda$, но и в любой полуплоскости $\{\operatorname{Re} \lambda > C_2\}$, так как там $|\Delta_k(\lambda)| < C_3|\lambda|^m$, $k = 1, 2, 3$, в виду (12) и (13). Аналогично можно получить оценки производных $\Delta^{(j)}(\lambda)$ и тем самым доказать утверждение б) леммы.

Докажем теперь утверждение с). Мы уже получили асимптотику (10) для достаточно больших $\operatorname{Re} \lambda$, поэтому достаточно доказать оценку (11) в полосе $\{\operatorname{Re} \lambda \in (a_1, a_2)\}$ для любых a_1, a_2 . Введем функцию $f(z) = \Delta(z + ib)$, область

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (a_1, a_2), \operatorname{Im} z \in (0, h)\}$$

и $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \tilde{\rho}(z, S) < \delta\}$ – δ -окрестность области S в метрике $\tilde{\rho}$, где b, h, δ – некоторые действительные числа. Применим к функции $f(z)$ и областям Ω и S лемму 2.1 из [12]. Получим, что вне некоторого исключительного множества кружков с суммой радиусов меньше ε выполняется оценка

$$\ln |f(z)| \geq C \ln \varepsilon (\ln M_f(\Omega) - \ln M_f(S)) + \ln M_f(S), \quad (14)$$

где постоянная C не зависит от функции $f(z)$. Без ограничения общности, точка $a_2 + ib$ – это самый удаленный от нуля угол области S . Тогда из полученных выше оценок имеем для достаточно большого числа a_2 неравенства

$$M_f(S) \geq |\Delta(a_2 + i(b + h))| \geq C_1 |a_2 + i(b + h)|^m, \quad (15)$$

$$M_f(\Omega) \leq C_2 |a_2 + \delta + i(b + h + \delta)|^m. \quad (16)$$

Подставляя эти неравенства в (14), получаем

$$\ln |f(z)| \geq \ln(C|a_2 + i(b + h)|^m), \quad (17)$$

где постоянная C не зависит от выбора числа b . Вспоминая определение функции $f(z)$, получаем искомую оценку для характеристического определителя $\Delta(\lambda)$.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится следующая лемма об оценке числа нулей аналитической функции.

ЛЕММА 2. Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в односвязной области Ω и некоторой ее окрестности, S – компакт, $S \subset \Omega$. Тогда

$$n_f(S) \leq C(\ln M_f(\Omega) - \ln M_f(S)),$$

где постоянная C зависит от Ω и S , но не зависит от функции $f(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая круговых областей аналогичная оценка известна (см. [9; гл. 1, § 5, лемма 4]). Чтобы доказать эту оценку в общем случае, воспользуемся приемом из [12; с. 324]. Пусть $\psi_\mu(z)$ – конформное отображение круга $K_R = \{|z| < R\}$ на область Ω такое, что $\psi_\mu(0) = \mu \in S$. Пусть $r < R$ – наименьшее число такое, что $S \subset \psi_\mu(K_r)$ для всех $\mu \in S$. Положим $\mu_0 \in S$ таким, что $f(\mu_0) = M_f(S)$. Рассмотрим функцию $F(z) = f(\psi_{\mu_0}(z))$. Так как $n_F(K_t)$ не убывает по $t \in [r, R]$, то

$$\int_r^R \frac{n_F(K_t)}{t} dt \geq n_F(K_r) \int_r^R \frac{dt}{t} = C n_F(K_r). \quad (18)$$

Из этой оценки получаем

$$n_f(S) = n_F(K_r) \leq C \int_r^R \frac{n_F(K_t)}{t} dt \leq C \int_0^R \frac{n_F(K_t)}{t} dt. \quad (19)$$

Применив теорему Иенсена [9; гл. 1, § 5], продолжим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} n_f(S) &\leq C \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(Re^{i\theta})| d\theta - \ln |F(0)| \right) \\ &\leq C(\ln M_f(K_R) - \ln |F(0)|) = C(\ln M_f(K_R) - \ln M_f(S)). \end{aligned} \quad (20)$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Существование указанного числа $\varkappa$ следует из п. а) леммы 1. Докажем существование предела (8). В случае, когда функции $\sigma_j(\theta)$ имеют конечное число скачков, это доказано в [14]. Возьмем достаточно большое число $a_2 > \varkappa$, положим $a_1 = a$ и введем функцию $f(z)$ и области S и Ω так же, как и при доказательстве леммы 1. Применяя лемму 2 и оценки (15), (16), получим, что число $n_\Delta(P(a, b, h))$ ограничено сверху постоянной, не зависящей от b . Тогда существует функция $\max_{b \in \mathbb{R}} n_\Delta(P(a, b, h))$ аргументов a и h . Эта функция не возрастает при $a \nearrow \varkappa$ и $h \searrow 0$ и ограничена снизу, поэтому существует предел (8).

3. Запись решения и построение контуров интегрирования. Мы будем оценивать решение $u(t)$ задачи (5), (6) следующим образом. Сначала решение записывается в виде обратного преобразования Лапласа, которое представляет собой интеграл по некоторой вертикальной прямой $b + i\mathbb{R}$, где $b > \varkappa$. Затем интеграл по $b + i\mathbb{R}$ представляется в виде суммы интегралов по некоторой ломаной Γ и некоторым контурам ∂G_k , $k = 1, 2, \dots$. Ломаная Γ находится уже слева от прямой $\varkappa + i\mathbb{R}$ достаточно близко к некоторой прямой $a + i\mathbb{R}$, $a < \varkappa$, а интеграл по этой ломаной не вносит существенного вклада в оценку решения $u(t)$. Основной вклад в оценку решения вносят интегралы по контурам ∂G_k . Эти контуры окружают нули характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, находящиеся в вертикальной полосе между Γ и $b + i\mathbb{R}$. Ключевую роль при получении оценок интегралов играет тот факт, что

расстояние от контуров интегрирования Γ и ∂G_k до нулей $\Delta(\lambda)$ ограничено снизу. Это позволяет с помощью леммы 1 оценить сверху $\Delta^{-1}(\lambda)$ и соответствующие интегралы.

Итак, приступим к реализации намеченного плана. Применяя к уравнению (5) преобразование Лапласа, решение $u(t)$ задачи (5), (6) можно записать в виде

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b+id_{-n}}^{b+id_n} e^{t\lambda} \Delta^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^m \int_0^h p_j(\lambda, \theta) d\sigma_j(\theta) d\lambda, \quad (21)$$

где $b \in \mathbb{R}$ – достаточно большое число, $d_n \rightarrow \pm\infty$ при $n \rightarrow \pm\infty$,

$$p_j(\lambda, \theta) = e^{-\lambda\theta} (u_0^{(j-1)}(0) + \lambda u_0^{(j-2)}(0) + \dots + \lambda^{j-1} u_0(0)) + \int_0^{h-\theta} u_0^{(j)}(\tau) e^{-\lambda(\tau+\theta)} d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Предположим сначала для простоты, что

$$u_0(0) = u'_0(0) = \dots = u_0^{(m-1)}(0) = 0. \quad (22)$$

Тогда

$$p_j(\lambda, \theta) = \int_0^{h-\theta} u_0^{(j)}(\tau) e^{-\lambda(\tau+\theta)} d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (23)$$

Так как функция $n_\Delta(P(a, b, h))$ принимает целые значения и не возрастает при $a \nearrow \varkappa$ и $h \searrow 0$, то найдутся такие числа a, δ, h , что $q = \max_{d \in \mathbb{R}} n_\Delta(P(a - \delta, b, h))$ и $a + \delta < \varkappa$.

Построим сначала ломаную Γ , расположенную достаточно близко к прямой $a + i\mathbb{R}$, точнее, $\Gamma \subset \Pi_\delta = \{\operatorname{Re} \lambda \in [a - \delta, a + \delta]\}$. При этом отрезки этой ломаной будут лежать на сетке

$$S_\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\{\operatorname{Re} \lambda = a + k\varepsilon\} \cup \{\operatorname{Im} \lambda = k\varepsilon\}).$$

Обозначим Λ_ε – ε -окрестность нулей $\Delta(\lambda)$.

ЛЕММА 3. Пусть a, b, δ, h – числа, определенные выше. Тогда для достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ найдутся числа $d_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что $h/2 \leq d_{n+1} - d_n \leq h$ и $\tau_n \in S_\varepsilon \setminus \Lambda_\varepsilon$, где $\tau_n = [a + id_n, b + id_n]$. Найдутся также ломаные

$$\gamma_n \in (\Pi_\delta \cap \{\operatorname{Im} \lambda \in [d_n, d_{n+1}]\} \cap S_\varepsilon) \setminus \Lambda_\varepsilon, \quad n \in \mathbb{Z},$$

с концами $a + id_n$ и $a + id_{n+1}$ такие, что их длины ограничены равномерно по $n \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим вокруг каждого нуля характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ такой прямоугольник, что его стороны лежат на сетке S_ε и расстояние от его сторон до нуля $\Delta(\lambda)$ лежит в интервале $[\varepsilon, 2\varepsilon]$. Объединение таких прямоугольников для всех нулей $\Delta(\lambda)$ состоит из некоторых связных компонент. Мы будем рассматривать те связные компоненты, которые либо лежат целиком справа от прямой $a + i\mathbb{R}$, либо пересекают ее. Объединение таких связных компонент обозначим через Ω_ε . В виду выбора чисел a, δ, h каждая связная компонента множества Ω_ε содержит не более q нулей $\Delta(\lambda)$ и имеет в метрике $\tilde{\rho}$ диаметр не больше $4\varepsilon q$.

Построим числа d_n . Пусть число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $4\varepsilon q < h/2$. Тогда множество $\text{Im } \Omega_\varepsilon$ состоит из отрезков с длиной меньше $h/2$. Число d_0 выберем произвольным образом из множества $\text{Im } S_\varepsilon \setminus \text{Im } \Omega_\varepsilon$ (это множество не пусто, так как $\varepsilon < h/2$). Числа $d_1, d_2, \dots$ определим рекуррентно следующим образом:

$$d_n = \sup \{ ((-\infty, d_{n-1} + h] \cap \text{Im } S_\varepsilon) \setminus \text{Im } \Omega_\varepsilon \}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как множество $\text{Im } \Omega_\varepsilon$ состоит из отрезков с длиной меньше $h/2$, то $d_n \in [d_{n-1} + h/2, d_{n-1} + h] \cap \text{Im } S_\varepsilon$ (это множество не пусто, так как $\varepsilon < h/2$), и поэтому, $h/2 \leq d_n - d_{n-1} \leq h$. Числа $d_{-1}, d_{-2}, \dots$ определяются аналогичным образом:

$$d_n = \inf \{ ([d_{-(n-1)} - h, +\infty) \cap \text{Im } S_\varepsilon) \setminus \text{Im } \Omega_\varepsilon \}, \quad n = -1, -2, \dots$$

Построим теперь ломаные γ_n . Пусть число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $4\varepsilon q < \delta/2$. Тогда каждая связная компонента множества Ω_ε имеет в метрике $\tilde{\rho}$ диаметр, не превосходящий $\delta/2$. Обозначим $\rho_n = [a + id_n, a + id_{n+1}]$. Если $\rho_n \cap \Omega_\varepsilon = \emptyset$, то положим $\gamma_n = \rho_n$. Иначе $\rho_n \cap \Omega_\varepsilon$ представляет собой объединение некоторых вертикальных отрезков ρ_{nk} , число которых не превосходит q для каждого n . Заменим каждый отрезок ρ_{nk} некоторой ломаной γ'_{nk} , т.е. положим

$$\gamma_n = (\rho_n \setminus \Omega_\varepsilon) \cup \bigcup_k \gamma'_{nk},$$

где γ'_{nk} — это участок границы множества Ω_ε , соединяющий концы отрезка ρ_{nk} . Так как каждая связная компонента множества Ω_ε , лежащая в Π_δ , имеет в метрике $\tilde{\rho}$ диаметр, не превосходящий $\delta/2$, то $\gamma'_{nk} \subset \Pi_\delta$. Длина отрезка ρ_n не превосходит h , длина ломаных γ'_{nk} не превосходит $4\varepsilon \cdot 4q = 16\varepsilon q$, поэтому длина ломаной γ_n не превосходит $h + 16\varepsilon q^2 \leq C$, равномерно по n .

В соответствии с этой леммой, положим $\Gamma = \bigcup \gamma_k$ и заменим в (21) интеграл по отрезку $[b + id_{-n}, b + id_n]$ на сумму интегралов по отрезкам τ_{-n} , τ_n , ломаным γ_k , лежащим между τ_{-n} и τ_n , и сумму по некоторым контурам, окружающим те полюса подынтегральной функции (т.е. нули $\Delta(\lambda)$), которые попали между Γ и $b + i\mathbb{R}$ и между τ_{-n} и τ_n .

В качестве контуров, окружающих полюса, возьмем следующие контуры ∂G_k . Обозначим через Π вертикальную полосу, ограниченную ломаной Γ и прямой $b + i\mathbb{R}$. Положим G_k , $k = 1, 2, \dots$, — связные компоненты множества $\Lambda_\varepsilon \cap \Pi$, а ∂G_k — их граница. Заметим, что в виду выбора чисел a и h , ломаной Γ и отрезков τ_n , области G_k не пересекаются с Γ и τ_n , и число нулей $\Delta(\lambda)$, лежащих в полосе Π между отрезками τ_n и τ_{n+1} (а значит, и число нулей в каждой области G_k) не превосходит q .

4. Оценка интегралов. Запишем решение $u(t)$ в виде

$$u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b+id_{-n}}^{b+id_n} U(t, \lambda) d\lambda, \quad (24)$$

где

$$U(t, \lambda) = e^{t\lambda} \Delta^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^m \int_0^h p_j(\lambda, \theta) d\sigma_j(\theta).$$

Интеграл по отрезку $[b + id_{-n}, b + id_n]$ представим в виде следующей суммы:

$$\int_{b+id_{-n}}^{b+id_n} = \int_{\tau_{-n}} + \int_{\tau_n} + \sum_{k=-n}^{n-1} \int_{\gamma_n} + \sum_{G_k \subset \Pi_n} \int_{\partial G_k}, \quad (25)$$

где Π_n – часть полосы Π , лежащая между τ_{-n} и τ_n . Далее, будем последовательно оценивать интегралы в правой части (25) в пространстве $W_2^m(T, T+h)$ при $n \rightarrow \infty$.

Оценим сначала интеграл по ломаной Γ .

ЛЕММА 4. При всех $T > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \int_{\Gamma} U(t, \lambda) d\lambda \right\|_{W_2^m(T, T+h)} \leq C e^{(a+\delta)T} \|u_0(t)\|_{W_2^m(0, h)},$$

где постоянная C не зависит от начальной функции $u_0(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем порядок производной $l \in \{0, 1, \dots, m\}$ и оценим норму функции

$$v_n(t) = \frac{d^l}{dt^l} \int_{\Gamma_n} U(t, \lambda) d\lambda$$

в пространстве $L_2(T, T+h)$. Запишем функцию $v_n(t)$ в виде

$$v_n(t) = \sum_{j=0}^m \int_0^h d\sigma_j(\theta) \int_{\Gamma_n} e^{t\lambda} f(\lambda) d\lambda,$$

где

$$f(\lambda) = \lambda^l \Delta^{-1}(\lambda) e^{-\lambda\theta} g(\lambda), \quad g(\lambda) = \int_0^{h-\theta} u_0^{(j)}(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau.$$

Ломаная Γ состоит из отрезков сетки S_ε . Будем отдельно оценивать сумму интегралов по вертикальным и горизонтальным отрезкам. Заметим, что ломаная Γ лежит в полосе Π_δ , поэтому все вертикальные отрезки этой ломаной лежат на конечном числе вертикальных прямых $a + k\varepsilon + i\mathbb{R}$, где целое число $k \in (-\delta/\varepsilon, \delta/\varepsilon)$.

Введем на S_ε функцию

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda), & \lambda \in \Gamma, \\ 0, & \lambda \notin \Gamma, \end{cases}$$

и запишем интеграл по ломаной Γ в виде суммы

$$\int_{\Gamma} e^{t\lambda} f(\lambda) d\lambda = \sum_{k=\lceil -\delta/\varepsilon \rceil}^{\lfloor \delta/\varepsilon \rfloor} \int_{a+k\varepsilon+i\mathbb{R}} e^{t\lambda} \tilde{f}(\lambda) d\lambda + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{l_n} e^{t\lambda} \tilde{f}(\lambda) d\lambda, \quad (26)$$

где $l_n = [a - \delta + in\varepsilon, a + \delta + in\varepsilon]$. Оценим сначала сумму интегралов по вертикальным отрезкам ломаной Γ , т.е. первую сумму из (26) в пространстве $L_2(T, T+h)$. Так как функция $\lambda^l \Delta^{-1}(\lambda) e^{-\lambda\theta}$ ограничена на Γ , то $\tilde{f}(\lambda) \in L_2(k\varepsilon + i\mathbb{R})$ при всех целых k таких, что $k\varepsilon \in (a - \delta, a + \delta)$. Тогда для всех таких k имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \left\| \int_{a+k\varepsilon+i\mathbb{R}} e^{t\lambda} \tilde{f}(\lambda) d\lambda \right\|_{L_2(T, T+h)} &= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(a+k\varepsilon)t} e^{i\xi\lambda} \tilde{f}(a+k\varepsilon+i\xi) d\lambda \right\|_{L_2(T, T+h)} \\ &\leq C e^{(a+\delta)T} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\lambda} \tilde{f}(a+k\varepsilon+i\xi) d\lambda \right\|_{L_2(T, T+h)} \leq C e^{(a+\delta)T} \|\tilde{f}(\lambda)\|_{L_2(a+k\varepsilon+i\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Здесь в последнем неравенстве использована теорема Планшереля [15; с. 504].

Оценим теперь сумму интегралов по горизонтальным отрезкам ломаной Γ , т.е. вторую сумму из (26) в пространстве $L_2(T, T+h)$. Введем функцию

$$F_N(t) = \sum_{n=-N}^N \int_{l_n} e^{t\lambda} \tilde{f}(\lambda) d\lambda,$$

возьмем произвольную функцию $\phi(t) \in L_2(T, T+h)$ и оценим скалярное произведение $(F_N(t), \phi(t))$ в пространстве $L_2(T, T+h)$:

$$|(F_N, \phi)| \leq \sum_{n=-N}^N \left\| \int_{l_n} \tilde{f}(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda \right\|,$$

где $\psi(\lambda) = \int_T^{T+h} e^{\lambda t} \phi(t) dt$. Применяя два раза неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |(F_N, \phi)| &\leq \sum_{n=-N}^N \|\tilde{f}(\lambda)\|_{L_2(l_n)} \|\psi(\lambda)\|_{L_2(l_n)} \\ &\leq \left(\sum_{n=-N}^N \|\tilde{f}(\lambda)\|_{L_2(l_n)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N}^N \|\psi(\lambda)\|_{L_2(l_n)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Оценим последнюю сумму. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N \|\psi(\lambda)\|_{L_2(l_n)}^2 &= \int_{a-\delta}^{a+\delta} \sum_{n=-N}^N \left| \int_T^{T+h} e^{id_n t} e^{xt} \phi(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_{a-\delta}^{a+\delta} C \|e^{xt} \phi(t)\|_{L_2(T, T+h)}^2 dx \leq C e^{2(a+\delta)T} \|\phi(t)\|_{L_2(T, T+h)}^2 \end{aligned}$$

равномерно по N , где постоянная C не зависит от $\phi(t)$. Здесь в предпоследнем неравенстве использована лемма 2 из [16]. Аналогично получаем

$$\sum_{n=-N}^N \|\tilde{f}(\lambda)\|_{L_2(l_n)}^2 \leq C \|u_0^{(j)}(\tau)\|_{L_2(0, h)}^2 \leq C \|u_0(\tau)\|_{W_2^m(0, h)}^2.$$

Итак, имеем равномерную по N и θ оценку

$$|(F_N, \phi)| \leq C e^{(a+\delta)T} \|u_0(\tau)\|_{W_2^m(0, h)} \|\phi(t)\|_{L_2(T, T+h)},$$

где постоянная C не зависит от $\phi(t)$. Отсюда получаем оценку

$$\|F_N\|_{L_2(T, T+h)} \leq C e^{(a+\delta)T} \|u_0(\tau)\|_{W_2^m(0, h)}$$

и завершаем доказательство леммы.

Оценим теперь интегралы по горизонтальным отрезкам τ_n .

ЛЕММА 5. Для всех $T > 0$ интегралы $\int_{\tau_n} U(t, \lambda) d\lambda$ стремятся к нулю по норме пространства $W_2^m(T, T+h)$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторяя рассуждения из доказательства леммы 4, можно показать, что сходится ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\| \int_{\tau_n} U(t, \lambda) d\lambda \right\|_{W_2^m(T, T+h)}.$$

Отсюда получаем требуемое утверждение.

Прежде чем оценивать интегралы по ∂G_k , сформулируем несколько вспомогательных утверждений. Следующая лемма является тривиальным следствием леммы 2 из [16] (см. также лемму 3.2 из [13]).

ЛЕММА 6. Пусть последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ лежит в некоторой вертикальной полосе $\{\operatorname{Re} \lambda \in (C_1, C_2)\}$. Причем число членов последовательности, лежащих в прямоугольнике $\{\operatorname{Re} \lambda \in (C_1, C_2), \operatorname{Im} \lambda \in (C_3, C_3+h)\}$, ограничено сверху постоянной, не зависящей от C_3 , а зависящей только от высоты прямоугольника h . Тогда система функций $f_k(x) = e^{\lambda_k x}$ является бесселевой в $L_2(0, 1)$, т.е. для любой функции $g(x) \in L_2(0, 1)$ сходится ряд $\sum_k |(g(x), f_k(x))|^2$.

Следующее утверждение является аналогом леммы 3.3 из [13].

ЛЕММА 7. Пусть функция $R(\lambda)$ аналитична в некоторой области, лежащей в некоторой вертикальной полосе $\{\operatorname{Re} \lambda \in (C_1, C_2)\}$, за исключением полюсов, удовлетворяющих условиям леммы 6. Тогда ε -окрестность полюсов для достаточно малого числа ε представляется в виде объединения непересекающихся компонент G_k , в каждой из которых количество полюсов с учетом кратности есть $q_k + 1$. Причем $q_k + 1 \leq q$ для некоторого числа q и всех k . Пусть $\lambda_k^0, \dots, \lambda_k^{q_k} -$ полюса $R(\lambda)$, лежащие в G_k , и вне ε -окрестности этих полюсов для функции $R(\lambda)$ и ее производных выполняется оценка

$$|R^{(j)}(\lambda)| < C, \quad j = 0, \dots, q-1. \quad (27)$$

Тогда при $T > 0$ справедливо представление

$$\int_{\partial G_k} e^{\lambda(T+x)} R(\lambda) \int_0^1 f(\xi) e^{-\lambda \xi} d\xi d\lambda = T^{q-1} e^{\varkappa T} c_k \varphi_k(x, T), \quad (28)$$

где $\varkappa = \sup_k \max_{j=0, \dots, q_k} \operatorname{Re} \lambda_k^j$, последовательность чисел $\{c_k\}$ принадлежит пространству l_2 , а система функций $\{\varphi_k(x, T)\}$ бесселева по x в $L_2(0, 1)$, т.е. для всех $T > 0$ и для любой функции $g(x) \in L_2(0, 1)$ сходится ряд $\sum_k |(g(x), \varphi_k(x, T))|^2$, причем сходимость равномерна по $T > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда все полюсы простые. Введем функцию

$$\mathcal{F}_k(x, \xi, T) = T^{-q} e^{-\varkappa T} \int_{\partial G_k} R(\lambda) e^{\lambda T} e^{\lambda(x-\xi)} d\lambda$$

и запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_k(x, \xi, T) &= T^{-q+1} e^{-\varkappa T} \sum_{j=0}^{q_k} a_{kj} e^{\lambda_k^j T} e^{\lambda_k^j(x-\xi)} \\ &= T^{-q+1} e^{-\varkappa T} e^{\rho_k(x-\xi)} \sum_{j=0}^{q_k} a_{kj} e^{\lambda_k^j T} e^{(\lambda_k^j - \rho_k)(x-\xi)}, \end{aligned}$$

где $a_{kj} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k^j} R(\lambda)(\lambda - \lambda_k^j)$ и выбрана некоторая точка $\rho_k \in G_k$ так, что $\operatorname{Re} \rho_k \leq \varkappa$. Далее, разлагая экспоненты в ряд, имеем

$$\mathcal{F}_k(x, \xi, T) = T^{-q+1} e^{-\varkappa T} e^{\rho_k(x-\xi)} \sum_{\mu, \nu=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{q_k} a_{kj} e^{\lambda_k^j T} (\lambda_k^j - \rho_k)^{\mu+\nu} \frac{x^\mu (-\xi)^\nu}{\mu! \nu!};$$

тогда

$$(\mathcal{F}_k(x, \xi, T), \bar{f}(\xi)) = e^{\rho_k x} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{d^\mu x^\mu}{\mu!} b_{k\mu}(T), \quad (29)$$

где

$$b_{k\mu}(T) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{k\mu\nu}(T),$$

$$b_{k\mu\nu}(T) = T^{-q+1} e^{-\varkappa T} d^{-\mu} \sum_{j=0}^{q_k} a_{kj} e^{\lambda_k^j T} (\lambda_k^j - \rho_k)^{\mu+\nu} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} (e^{-\rho_k \xi}, \xi^\nu \bar{f}(\xi)).$$

Оценим $b_{k\mu\nu}(T)$. В каждой области G_k представим функцию $R(\lambda)$ в виде

$$R(\lambda) = \frac{R_k(\lambda)}{\prod_{j=0}^{q_k} (\lambda - \lambda_k^j)},$$

где $R_k(\lambda)$ аналитична в области G_k и некоторой ее окрестности. Причем, ввиду (27) и принципа максимума эта функция и ее производные $R_k^{(l)}(\lambda)$ ограничены в области G_k при $l = 0, \dots, q_k$ равномерно по k . Тогда

$$\sum_{j=0}^{q_k} a_{kj} e^{\lambda_k^j T} (\lambda_k^j - \rho_k)^{\mu+\nu} = \sum_{j=0}^{q_k} \frac{H_k(\lambda_k^j)}{\prod_{l \neq j} (\lambda_k^j - \lambda_k^l)} = H_k(\lambda_k^0, \dots, \lambda_k^{q_k}),$$

где

$$H_k(\lambda) = R_k(\lambda)(\lambda - \rho_k)^{\mu+\nu} e^{\lambda T},$$

а $H_k(\lambda_k^0, \dots, \lambda_k^{q_k})$ – разделенная разность, соответствующая функции $H_k(\lambda)$ и точкам $\lambda_k^0, \dots, \lambda_k^{q_k}$ (см. [17; гл. 4, § 24, п. 4, с. 228]). Известна оценка (см. там же)

$$|H_k(\lambda_k^0, \dots, \lambda_k^{q_k})| \leq \frac{1}{q_k!} \max_{\lambda \in Q_k} |H_k^{(q_k)}(\lambda)|,$$

где Q_k – выпуклая оболочка точек $\lambda_k^0, \dots, \lambda_k^{q_k}$. Без ограничения общности в ε -окрестности Q_k нет других полюсов $R(\lambda)$, кроме $\lambda_k^0, \dots, \lambda_k^{q_k}$. Тогда имеем оценку

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in Q_k} |H_k^{(q_k)}(\lambda)| &= \max_{\lambda \in Q_k} \left| \sum_{\alpha+\beta+\gamma=q_k} R_k^{(\alpha)}(\lambda) \frac{d^\beta}{d\lambda^\beta} ((\lambda - \rho_k)^{\mu+\nu}) T^\gamma e^{\lambda T} \right| \\ &\leq C(\mu + \nu)^q d^{\mu+\nu} T^{q-1} e^{\varkappa T}, \end{aligned}$$

где $d = \max(1, \sup_k \operatorname{diam} G_k)$.

Таким образом, получаем, что

$$|b_{k\mu\nu}(T)| \leq C \frac{d^\mu (\mu + \nu)^{q-1}}{\nu!} |(e^{-\rho_k \xi}, \xi^\nu \bar{f}(\xi))| = c_{k\nu} \quad (30)$$

равномерно по T . Применяя лемму 6, получаем

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |2^{\nu} c_{k\nu}|^2 \leq \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{4^{\nu} d^{\nu}}{\nu!} \|\xi^{\nu} f\|^2 \leq C \|f\|^2.$$

Обозначая $c'_k = \sup_{\nu \in [0, +\infty)} 2^{\nu} c_{k\nu}$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c'_k| \leq \|f\|^2.$$

Положим $c_k = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{k\nu}$. Тогда

$$|b_{k\mu}(T)| \leq c_k \quad (31)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{k\nu} \right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |c'_k|^2 \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu} \right)^2 \leq 4C \|f\|^2,$$

т.е. числа c_k образуют последовательность из l_2 .

Запишем (29) в виде

$$(\mathcal{F}_k(x, \xi, T), \bar{f}(\xi)) = c_k \varphi_k(x, T),$$

где

$$\varphi_k(x, T) = e^{\rho_k x} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{d^{\mu}}{\mu!} x^{\mu} \frac{b_{k\mu}(T)}{c_k}.$$

Пользуясь (31) и леммой 6, для любой функции $g(t) \in L_2(0, 1)$ получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\varphi_k, g)|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \left| \left(e^{\rho_k x}, \frac{C_1^{\mu}}{\mu!} x^{\mu} g \right) \right|^2 \leq C_2 \|g\|^2,$$

равномерную по T , т.е. функции $\varphi_k(x, T)$ образуют бесселеву систему по x .

Случай кратных полюсов рассматривается как предельный случай простых полюсов дословным повторением рассуждений из [13].

Оценим, наконец, интегралы по контурам ∂G_k .

ЛЕММА 8. При достаточно больших $T > 0$ справедлива оценка

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\partial G_k} U(t, \lambda) d\lambda \right\|_{W_2^m(T, T+h)} \leq CT^{q-1} e^{\varkappa T} \|u_0(t)\|_{W_2^m(0, h)}, \quad (32)$$

где постоянная C не зависит от начальной функции $u_0(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем производную порядка $l = 0, 1, \dots, m$ от частичной суммы интегралов по ∂G_k в виде

$$\frac{d^l}{dt^l} \sum_{k=1}^n \int_{\partial G_k} U(t, \lambda) d\lambda = \sum_{j=0}^m \int_0^h J_n(u_0^{(j)}, t - \theta) d\sigma_j(\theta), \quad (33)$$

где

$$J_n(f, x) = \sum_{k=1}^n \int_{\partial G_k} e^{\lambda x} \lambda^l \Delta^{-1}(\lambda) \int_0^h f(\tau) e^{-\lambda \tau} d\tau d\lambda. \quad (34)$$

Оценим норму $J_n(f, x)$ как функции от x в пространстве $L_2(T, T+h)$. Введем обозначение

$$\mathcal{F}_k(x, \tau) = e^{-\kappa T} \int_{\partial G_k} e^{\lambda(T+x-\tau)} \lambda^l \Delta^{-1}(\lambda) d\lambda$$

и запишем (34) в виде

$$J_n(f, T+x) e^{-\kappa T} = \sum_{k=1}^n (\mathcal{F}_k(x, \tau), f(\tau)).$$

Применим лемму 7 для $R(\lambda) = \lambda^l \Delta^{-1}(\lambda)$ и области Γ . Получаем

$$(\mathcal{F}_k(x, \tau), f(\tau)) = T^{q-1} c_k \varphi_k(x, T),$$

где $\{c_k\} \in l_2$, а система функций $\{\varphi_k(x, T)\}$ бесселева по x в $L_2(0, h)$, причем для всех $g(x) \in L_2(0, h)$ ряд $\sum_k |(g(x), \varphi_k(x, T))|^2$ сходится равномерно по T . Тогда, обозначая

$$F_n(x, \tau) = \sum_{k=1}^n \mathcal{F}_k(x, \tau)$$

и применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем для всех $g(x) \in L_2(0, h)$ равномерную по n оценку

$$\begin{aligned} |(F_n(x, \tau), f(\tau)g(x))_{L_2(0, h)^2}| &= \left| \left(\sum_{k=1}^n T^{q-1} c_k \varphi_k(x, T), g(x) \right) \right| \\ &\leq T^{q-1} \sum_{k=1}^n |c_k| |(\varphi_k(x, T), g(x))| \\ &\leq T^{q-1} \|c_k\|_{l_2} \|(\varphi_k(x, T), g(x))\|_{l_2}. \end{aligned}$$

Так как функции вида $f(\tau)g(x)$ плотны в $L_2(0, h)^2$, то по теореме Банаха–Штейнгауза (см. [15]) получаем, что $\|F_n(x, \tau)\|_{L_2(0, h)^2} \leq CT^{q-1}$ равномерно по n . Тогда

$$\|J_n(f, T+x) e^{-\kappa T}\|_{L_2(0, h)} = \|(F_n(x, \tau), f(\tau))\| \leq CT^{q-1} \|f\|.$$

Итак, имеем равномерную по n оценку

$$\|J_n(f, x)\|_{L_2(T, T+h)} \leq CT^{q-1} e^{\kappa T} \|f\|. \quad (35)$$

Теперь функция (33) оценивается достаточно просто. Для каждого слагаемого в (33) имеем

$$\left\| \int_0^h J_n(u^{(j)}, t - \theta) d\sigma_j(\theta) \right\|_{L_2(T, T+h)}^2 = \int_T^{T+h} \left| \int_0^h J_n(u^{(j)}, t - \theta) d\sigma_j(\theta) \right|^2 dt.$$

Раскрывая модуль в последнем выражении, меняя порядок интегрирования и используя оценку (35), получаем равномерную по n оценку

$$\left\| \int_0^h J_n(u^{(j)}, t - \theta) d\sigma_j(\theta) \right\|_{L_2(T, T+h)} \leq CT^{q-1} e^{\kappa T} \|u_0^{(j)}\|_{L_2(0, h)},$$

откуда следует искомая оценка (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Оценка (9) следует из представления (24), равенства (25) и оценок из лемм 4, 5 и 8.

Рассмотрим теперь случай, когда начальная функция $u_0(t)$ не удовлетворяет условию (22). Тогда оценка (9) может быть получена следующим образом. Оценка решения $u(t)$ в пространстве $L_2(T, T+h)$ получается применением техники, описанной выше. Оценим производную $u'(t)$ в пространстве $L_2(T, T+h)$. Положим

$$p_j^1(\lambda, \theta) = p_j(\lambda, \theta) - e^{-\lambda\theta} \lambda^{j-1} u(0), \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Тогда преобразование Лапласа производной $u'(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u'(t) e^{-\lambda t} dt &= \lambda \int_0^\infty u(t) e^{-\lambda t} dt - u(0) \\ &= \lambda \Delta^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^m \int_0^h (e^{-\lambda\theta} \lambda^{j-1} u(0) + p_j^1(s, \theta)) d\sigma_j(\theta) - u(0) \\ &= \lambda \Delta^{-1}(\lambda) \left(\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda} u(0) + \sum_{j=0}^m \int_0^h p_j^1(\lambda, \theta) d\sigma_j(\theta) \right) - u(0) \\ &= \lambda^m \Delta^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^m \int_0^h \frac{p_j^1(\lambda, \theta)}{\lambda^{m-1}} d\sigma_j(\theta). \end{aligned}$$

Заметим, что на любой вертикальной прямой

$$\frac{p_j^1(\lambda, \theta)}{\lambda^{m-1}} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

и поэтому можно применить использованную выше технику и оценить норму функции $u'(t)$ в пространстве $L_2(T, T+h)$.

Аналогично, положим

$$p_j^2(\lambda, \theta) = p_j^1(\lambda, \theta) - e^{-\lambda\theta} \lambda^{j-2} u'(0), \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Тогда преобразование Лапласа второй производной $u''(t)$ имеет вид

$$\int_0^\infty u''(t) e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty u'(t) e^{-\lambda t} dt - u'(0) = \lambda^m \Delta^{-1}(\lambda) \sum_{j=0}^m \int_0^h \frac{p_j^2(\lambda, \theta)}{\lambda^{m-2}} d\sigma_j(\theta).$$

Как и выше, на любой вертикальной прямой имеем

$$\frac{p_j^2(\lambda, \theta)}{\lambda^{m-2}} = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

откуда получаем оценку функции $u''(t)$. Аналогично оцениваются и остальные производные $u^{(k)}$, $k = 1, \dots, m$, т.е. норма решения $u(t)$ в пространстве $W_2^m(T, T+h)$. Теорема доказана.

Сделаем в заключение следующее замечание. Введем в пространстве $W_2^m(-h, 0)$ полугруппу U_t сдвигов вдоль решений

$$(U_t u_0)(\tau) = u(t + \tau), \quad t \geq 0, \quad \tau \in [-h, 0],$$

где $u(t)$ – решение задачи (5), (6) с начальной функцией $u_0(t)$. Можно показать (см., например, [4], [8]), что операторы U_t образуют C_0 -полугруппу, генератор A которой имеет вид

$$Au = u',$$

$$D(A) = \left\{ u(t) \in W_2^{m+1}(-h, 0) : \sum_{j=0}^m \int_0^h u^{(j)}(-\theta) d\sigma_j(\theta) = 0 \right\}.$$

Собственные значения (с.з.) и собственные и присоединенные функции (с.п.ф.) оператора A совпадают с с.з. и с.п.ф. следующей краевой задачи с параметром в граничных условиях:

$$l(y, \lambda) = y' - \lambda y = 0, \quad (36)$$

$$U(y, \lambda) = \sum_{j=0}^m \int_0^h \lambda^j y(-\theta) d\sigma_j(\theta) = 0. \quad (37)$$

Для случая, когда функции $\sigma_j(\theta)$ кусочно-постоянные с конечным числом скачков, в работе [13] построены в различных пространствах операторы, линеаризующие эту краевую задачу, и показывается, что их с.п.ф. образуют базис Рисса со скобками в соответствующих функциональных пространствах. В частности, с.п.ф. оператора A в этом случае образуют базис Рисса со скобками в пространстве $W_2^m(-h, 0)$. Тогда оценка (9) решений задачи (5), (6) следует из теоремы 1 работы [18].

Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральными краевыми условиями, не содержащими параметр, изучались в [19]. Пользуясь методами этих двух работ [19] и [13], а также леммами 1 и 7 настоящей работы, можно построить в широком классе функциональных пространств операторы, линеаризующие краевую задачу (36), (37), и показать, что их с.п.ф., отвечающие с.з., попавшим в полосу Π , образуют базис Рисса со скобками в замыкании своей линейной оболочки. Причем в скобки нужно объединять лишь те слагаемые, которые соответствуют с.з., попавшим в одну и ту же область G_k . В частности, с.п.ф. оператора A образуют базис Рисса со скобками в замыкании своей линейной оболочки в пространстве $W_2^m(-h, 0)$. Тогда решение $u(t)$ может быть представлено в виде $u(t) = v(t) + w(t)$, где основной вклад в рост решения дает функция $v(t)$ – проекция решения $u(t)$ на замыкание линейной оболочки с.п.ф., соответствующих с.з., попавшим в полосу Π . Эта функция $v(t)$, а, значит, и решение $u(t)$, оценивается опять с помощью теоремы 1 работы [18].

Автор искренне благодарит проф. А. А. Шкаликова за постановку задачи и ценные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H.-O. Walther, *Delay Equations. Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

- [2] Р. Беллман, К. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, М., 1967.
- [3] А. Д. Мышкис, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Наука, М., 1972.
- [4] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.
- [5] Л. Э. Эльсгольц, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1964.
- [6] D. Henry, "Linear autonomous neutral functional differential equations", *J. Differential Equations*, **15** (1974), 106–128.
- [7] В. В. Власов, С. А. Иванов, "О точных оценках решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа", *Докл. РАН*, **406**:5 (2006), 583–585.
- [8] V. V. Vlasov, D. A. Medvedev, "On asymptotic behavior and estimates of solutions to neutral equations", *Funct. Differential Equations*, **13**:2 (2006), 207–223.
- [9] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [10] Л. С. Понтрягин, "О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций", *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **6**:3 (1942), 115–134.
- [11] В. А. Садовничий, В. А. Любишкин, Ю. Белабасси, "О нулях целых функций одного класса", *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **8** (1982), 211–217.
- [12] А. А. Шкаликов, "Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций", *Матем. сб.*, **123**:3 (1984), 317–347.
- [13] А. А. Шкаликов, "Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях", *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **9** (1983), 190–229.
- [14] В. В. Власов, С. А. Иванов, "Оценки решений уравнений с последствием в шкале пространств Соболева и базис из разделенных разностей", *Алгебра и анализ*, **15**:4 (2003), 115–141.
- [15] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1989.
- [16] В. Э. Кацнельсон, "О базисах из показательных функций в L^2 ", *Функцион. анализ и его прилож.*, **5**:1 (1971), 37–47.
- [17] Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, М., 1965.
- [18] А. И. Милославский, "Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений", *Сиб. матем. журн.*, **26**:5 (1985), 118–132.
- [19] А. А. Шкаликов, "О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями", *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 6, 12–21.

А. А. Лесных

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: andrey_les@mail.ru

Поступило

20.11.2006