Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Морева, О единственности кратных рядов Уолша для сходимости по двоичным кубам, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 586–598

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 17:46:44

УДК 517.51

О единственности кратных рядов Уолша для сходимости по двоичным кубам

Н. С. Морева

В работе рассматриваются вопросы единственности кратных рядов Уолша, сходящихся по двоичным кубам, на многомерной двоичной группе. Находятся условия, при которых данное конечное или счетное множество будет множеством единственности.

Библиография: 5 названий.

Пусть $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ – система Уолша на двоичной группе G [1],

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}), \quad \mathbf{n} = (n^{(1)}, n^{(2)}, \dots, n^{(d)}), \quad \mathbf{t} = (t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(d)}),$$

– d -кратная система Уолша на произведении G^d групп G . В [2] было доказано, что пустое множество есть множество единственности для системы Уолша в случае сходимости по кубам. На самом деле, было доказано следующее более сильное утверждение.

ТЕОРЕМА 1. *Если кубические частичные суммы $S_{2^{n_1}-1, \dots, 2^{n_d}-1}$ ряда Уолша*

$$\sum_{\mathbf{n}} c_{\mathbf{n}} W_{\mathbf{n}} \tag{1}$$

сходятся к нулю всюду на G^d , то все коэффициенты $c_{\mathbf{n}} = 0$.

Недавно в работе [3] без доказательства было указано, что в случае сходимости ряда (1) по всем кубам любое конечное множество $E \subset G^d$ есть множество единственности и существуют счетные множества единственности. Известно также [4], что если частичные суммы ряда (1) $S_{2^{n_1}-1, \dots, 2^{n_d}-1}$ удовлетворяют условию

$$\limsup_{n_1, \dots, n_d \rightarrow \infty} |S_{2^{n_1}-1, \dots, 2^{n_d}-1}(\mathbf{t})| < \infty$$

всюду на $G^{(d)}$ вне счетного множества точек и при этом

$$\lim_{n_1, \dots, n_d \rightarrow \infty} S_{2^{n_1}-1, \dots, 2^{n_d}-1} = 0 \quad \text{по мере,}$$

то все коэффициенты этого ряда $c_{\mathbf{n}} = 0$.

В этой работе мы рассмотрим вопрос: когда конечное или счетное множество $E \subset G^d$ будет множеством единственности для ряда (1) в случае сходимости по

кубам со стороной 2^n , т.е. когда из сходимости вне E частичных сумм $S_{2^n-1, \dots, 2^n-1}$ к нулю следует, что все $c_n = 0$.

Напомним основные определения и понятия [1].

Пусть

$$G = \{t = (t_k)_{k=0}^{\infty} : t_k = 0 \text{ или } t_k = 1\}.$$

Для $x, y \in \{0, 1\}$ операция $\oplus$ определяется равенством $x \oplus y = (x + y) \bmod 2$. Аналогично для t и $\tau = (\tau_k)_{k=0}^{\infty} \in G$ операция $\oplus$ определяется как покоординатное сложение по модулю 2, т.е.

$$t \oplus \tau = (t_k \oplus \tau_k)_{k=0}^{\infty}.$$

Тогда $(G, \oplus)$ – коммутативная группа, которую принято называть *двоичной группой*.

Если $t_0 = (t_0^{(0)}, t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}, \dots)$, то множество

$$V_n(t_0) = \{t \in G : t_0 = t_0^{(0)}, t_1 = t_1^{(0)}, \dots, t_{n-1} = t_{n-1}^{(0)}\}$$

называют n -й *окрестностью* или *окрестностью ранга n* точки t_0 . Совокупность всех таких окрестностей образует базу топологии в G . В дальнейшем, если нам будет неважно, где располагается окрестность, и будет интересовать лишь ее ранг, то будем писать просто V_n .

Отметим, что две произвольные окрестности ранга n или совпадают, или не пересекаются. В дальнейшем, для объединения двух непересекающихся окрестностей будем использовать знак “ $\sqcup$ ”.

Пусть $t = (t_k)_{k=0}^{\infty} \in G$. Функции

$$r_k(t) = (-1)^{t_k}$$

называют *функциями Радемахера*. Всевозможные конечные произведения функций Радемахера называются *функциями Уолша*.

Пусть

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k 2^k, \quad \varepsilon_k = 0 \text{ или } \varepsilon_k = 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

– двоичное разложение числа n . Функции

$$w_n(t) = \prod_{k=0}^{\infty} (r_k(t))^{\varepsilon_k} = \prod_{k=0}^{\infty} (-1)^{t_k \varepsilon_k}$$

называют *функциями Уолша в нумерации Пэли*.

Очевидно, что

- 1) $w_{2^n}(t) = r_n(t)$;
- 2) если $2^k \leq n < 2^{k+1}$, то $w_n(t)$ постоянна на окрестностях ранга $k + 1$.

Множество E называется *множеством единственности* или *U -множеством* для рядов по некоторой системе функций, если сходящийся к нулю вне множества E ряд по этой системе тождественно нулевой.

Пусть $G^{(d)} = G \times G \times \dots \times G$ – d -мерная двоичная группа, $V_n^{(d)} = V_n \times \dots \times V_n$ – база окрестностей на этой d -мерной двоичной группе. Рассмотрим следующий ряд,

составленный из d -мерных двоичных пачек:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(\mathbf{t}), \quad \text{где } F_n(\mathbf{t}) = S_n - S_{n-1}, \quad F_0(\mathbf{t}) = c_0 = \text{const}, \quad (2)$$

$$S_n = \sum_{k_1=0}^{2^n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{2^n-1} c_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}), \quad \text{где } \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d), \quad \mathbf{t} = (t^{(1)}, \dots, t^{(d)}),$$

$$W_{\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = w_{k_1}(t^{(1)}) \cdots w_{k_d}(t^{(d)}).$$

В одномерном случае имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t), \quad \text{где } f_n(t) = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} c_k w_k(t), \quad f_0 = \text{const}. \quad (3)$$

Пусть $\mathbf{t} = (t^{(1)}, \dots, t^{(d)})$, где

$$t^{(i)} \in G, \quad t^{(i)} = (t_0^{(i)}, t_1^{(i)}, \dots, t_p^{(i)}, \dots).$$

Рассмотрим следующее взаимнооднозначное отображение:

$$\varphi: \mathbf{t} \mapsto t^*, \quad \text{где } t^* \in G, \quad t^* = (t_0^{(1)}, t_0^{(2)}, \dots, t_0^{(d)}, t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(d)}, \dots). \quad (4)$$

Такое отображение было впервые предложено в работе [5].

ТЕОРЕМА 2. При взаимнооднозначном отображении (4) между $G^{(d)}$ и G каждой d -мерной двоичной пачке $F_n(\mathbf{t})$ соответствует комбинация двоичных пачек из G :

$$f_{d(n-1)+1}(t^*) + \cdots + f_{dn}(t^*),$$

каждой окрестности из $G^{(d)}$ соответствует одна, вполне определенная, окрестность из G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$k = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i(k) 2^i,$$

где $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, и рассмотрим следующую d -кратную частичную сумму:

$$\begin{aligned} S_n^{(d)} &= \sum_{k_1=0}^{2^n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{2^n-1} c_{k_1 \dots k_d} w_{k_1}(t^{(1)}) \cdots w_{k_d}(t^{(d)}) \\ &= \sum_{k_1=0}^{2^n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{2^n-1} c_{k_1 \dots k_d} \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{t_j^{(1)} \varepsilon_j(k_1)} \cdots \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{t_j^{(d)} \varepsilon_j(k_d)} \\ &= \sum_{k_1=0}^{2^n-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{2^n-1} c_{k_1 \dots k_d} \prod_{j=0}^{\infty} (-1)^{t_j^{(1)} \varepsilon_j(k_1) + \cdots + t_j^{(d)} \varepsilon_j(k_d)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} (\varepsilon_j(k_1) \cdot 2^{dj} + \varepsilon_j(k_2) \cdot 2^{dj+1} + \dots + \varepsilon_j(k_d) \cdot 2^{d(j+1)-1}).$$

Таким образом, m всегда задается с помощью чисел $k_1, \dots, k_d$, т.е. $m = m(k_1, \dots, k_d)$. Вычислим значение m , когда $k_1 = k_2 = \dots = k_d = 2^n - 1$. Зная, что

$$2^n - 1 = 2^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} 2^j \varepsilon_j,$$

получаем

$$\begin{aligned} m(2^n - 1, \dots, 2^n - 1) &= \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j 2^{dj} + \dots + \varepsilon_j 2^{dj+d-1} \\ &= 2^{dn-1} + \dots + 2^{d(n-1)} + \sum_{j=0}^{n-2} \varepsilon_j (2^{dj} + \dots + 2^{dj+d-1}), \end{aligned}$$

откуда следует, что $m < 2^{dn}$. Таким образом, находим

$$S_n^{(d)}(\mathbf{t}) = \sum_{m=0}^{2^{dn}-1} c_m w_m(t^*),$$

где $c_m = c_{k_1 \dots k_d}$.

Применяя такое преобразование для d -мерных двоичных пачек, получим

$$F_n(\mathbf{t}) = S_n^{(d)}(\mathbf{t}) - S_{n-1}^{(d)}(\mathbf{t}) = \sum_{m=2^{d(n-1)}}^{2^{dn}-1} c_m w_m(t^*) = f_{d(n-1)+1}(t^*) + \dots + f_{dn}(t^*).$$

Очевидно также, что при таком преобразовании $\varphi: V_n^{(d)} \mapsto V_{nd}^{(1)}$ взаимнооднозначно. Теорема доказана.

Отметим, что из только что доказанной теоремы очевидно следует, что F_n постоянны на $V_n^{(d)}$.

ЛЕММА 3. Пусть

$$V_{n-1}^{(d)} = \bigsqcup_{i=1}^{2^d} V_{n,i}^{(d)} \quad u \quad F_n(\mathbf{t}) = a_i, \quad \mathbf{t} \in V_{n,i}^{(d)} \quad \text{при } i = 1, \dots, 2^d.$$

Тогда $\sum_{i=1}^{2^d} a_i = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства покажем вначале, что если функция

$$f_{k,p}(t) = f_{k+1}(t) + f_{k+2}(t) + \dots + f_{k+p}(t),$$

где $f_n(t)$ определяются как в (3), постоянная на V_{k+p} , принимает значения a_i на $V_{k+p,i}$, где

$$\bigsqcup_{i=1}^{2^p} V_{k+p,i} = V_k,$$

то

$$\sum_{i=1}^{2^p} a_i = 0.$$

Доказательство проведем индукцией по p . Полагаем $p = 1$. Тогда $f_{k,1} = f_{k+1} -$ функция, постоянная на V_{k+1} и принимающая значения a и $-a$ на левой и правой половинах окрестности V_k соответственно. Но тогда, $a + (-a)$ действительно есть нуль.

Предположим, что утверждение верно при $p := p - 1$. Отметим, что

$$f_{k,p}(t) = f_{k+1}(t) + f_{k+2}(t) + \cdots + f_{k+p}(t) = f_{k+1}(t) + f_{k+1,p-1}(t).$$

Функция $f_{k+1}(t)$ постоянна на V_{k+1} и принимает значения a и $-a$ на левой и правой половинах окрестности V_k соответственно. Пусть

$$V_k = V_{k+1,1} \sqcup V_{k+1,2}.$$

Функция $f_{k+1,p-1}$ постоянна на V_{k+p} и принимает значения b_i на $V_{k+p,i}$, где

$$\bigsqcup_{i=1}^{2^{p-1}} V_{k+p,i} = V_{k+1,1},$$

и значения c_j на $V_{k+p,j}$, где

$$\bigsqcup_{j=2^{p-1}+1}^{2^p} V_{k+p,j} = V_{k+1,2}.$$

Как было уже отмечено, функция $f_{k,p}$, постоянная на V_{k+p} , принимает значения a_l на $V_{k+p,l}$, где

$$\bigsqcup_{l=1}^{2^p} V_{k+p,l} = V_k,$$

то

$$\sum_{l=1}^{2^p} a_l = a + \sum_{i=1}^{2^{p-1}} b_i + (-a) + \sum_{j=1}^{2^{p-1}} c_j.$$

Но по предположению

$$\sum_{i=1}^{2^{p-1}} b_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{2^{p-1}} c_j = 0,$$

таким образом,

$$\sum_{l=1}^{2^p} a_l = a + (-a) = 0.$$

Воспользуемся преобразованием φ из теоремы 1. Тогда

$$F_n = f_{d(n-1)+1} + \cdots + f_{dn}.$$

По доказанному выше эта функция принимает значения a_i на $V_{dn,i}$, где

$$\bigsqcup_{i=1}^{2^d} V_{dn,i} = V_{d(n-1)},$$

и

$$\sum_{i=1}^{2^d} a_i = 0.$$

Применяя обратное преобразование, и замечая, что $\varphi^{-1}: V_{nd} \mapsto V_n^{(d)}$, получаем

$$V_{n-1}^{(d)} = \bigsqcup_{i=1}^{2^d} V_{n,i}^{(d)}$$

и $F_n(\mathbf{t}) = a_i$, $\mathbf{t} \in V_{n,i}^{(d)}$ при $i = 1, \dots, 2^d$, и при этом

$$\sum_{i=1}^{2^d} a_i = 0,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем, если из контекста ясно, о какой окрестности идет речь, вместо $V_n^{(d)}$ будем писать V_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $E \subset G^{(d)}$ – конечное или счетное множество. Множество

$$I_E = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} :$$

$$\exists V_k, \exists V_{k+1}^1 \subset V_k, V_{k+1}^2 \subset V_k, \quad V_{k+1}^1 \cap V_{k+1}^2 = \emptyset, \quad V_{k+1}^i \cap E \neq \emptyset, i = 1, 2\}$$

будем называть *индексным множеством* для множества E .

ТЕОРЕМА 4. Пусть

- 1) $E \subset G^{(d)}$ – конечное или счетное множество, I_E – индексное множество для E ;
- 2) ряд (2) сходится к нулю всюду на $G^{(d)} \setminus E$;
- 3) $F_0 \equiv 0$, $F_{k+1}(\mathbf{t}) \equiv 0$, для всех $k \in I_E$.

Тогда $F_k(\mathbf{t}) \equiv 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Предположим, что не все $F_k \equiv 0$. Пусть k_1 – наименьший из индексов таких F_k . То есть существует $\mathbf{t} \in G^{(d)}$ такой, что

$$F_{k_1}(\mathbf{t}) = a, \quad a \neq 0, \quad \text{и} \quad \forall k < k_1 \quad F_k(\mathbf{t}) \equiv 0.$$

Но тогда, существует $V_{k_1}^1$ такая, что

$$F_{k_1}(\mathbf{t}) \equiv a \quad \forall \mathbf{t} \in V_{k_1}^1.$$

Рассмотрим окрестность $V_{k_1-1} \supset V_{k_1}^1$. По лемме 3

$$\exists V_{k_1}^2 \subset V_{k_1-1}, \quad V_{k_1}^1 \cap V_{k_1}^2 = \emptyset,$$

такое, что

$$F_{k_1}(\mathbf{t}) \equiv b \quad \forall \mathbf{t} \in V_{k_1}^2, \quad b \neq 0.$$

Заметим также, что номер $k_1 - 1$ не принадлежит индексному множеству I_E . Следовательно, одна из окрестностей $V_{k_1}^1$ или $V_{k_1}^2$ не содержит точек из E . Будем обозначать такую окрестность просто V_{k_1} , при этом

$$F_{k_1}(\mathbf{t}) \equiv a_1 \quad \forall \mathbf{t} \in V_{k_1},$$

где $a_1 = a$, если $V_{k_1} = V_{k_1}^1$, $a_1 = b$, если $V_{k_1} = V_{k_1}^2$. Будем считать для определенности, что $a_1 > 0$ (случай $a_1 < 0$ рассматривается аналогично).

Если бы при всех $k > k_1$ на V_{k_1} имело место тождество

$$F_k(\mathbf{t}) \equiv 0,$$

то ряд (2) не сходил бы к нулю на V_{k_1} , что противоречит условию теоремы. Поэтому существует наименьший индекс k_2 , $k_2 > k_1$, такой, что

$$F_{k_2} \not\equiv 0 \quad \text{на } V_{k_1},$$

но тогда на некоторой окрестности $V_{k_2} \subset V_{k_1}$

$$F_{k_2}(\mathbf{t}) \equiv a_2, \quad a_2 > 0.$$

Продолжая это рассуждение, найдем последовательность вложенных окрестностей $V_{k_1} \supset V_{k_2} \supset \dots \supset V_{k_p} \supset \dots$, имеющих в пересечении точку $\mathbf{t}_0$, в которой ряд (2) равен

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p + \dots$$

и, так как все a_p положительны, то в точке $\mathbf{t}_0$ ряд (2) не сходится к нулю, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие теорему 4.

ПРИМЕР 1. Пусть размерность пространства $d = 2$ и $E = \{t_1, t_2, t_3\}$, где $t_k = (t_k^1, t_k^2)$, $k = \overline{1, 3}$, причем

$$\begin{aligned} t_1^1 &= (0, 0, 0, 0, \dots), & t_1^2 &= (0, 0, 0, 0, \dots), \\ t_2^1 &= (1, 1, 1, 1, \dots), & t_2^2 &= (1, 1, 1, 1, \dots), \\ t_3^1 &= (0, 0, 1, 1, \dots), & t_3^2 &= (0, 0, 1, 1, \dots). \end{aligned}$$

Заметим, что если представить $G^{(2)} = \bigsqcup_{i=1}^4 V_{1,i}$, то точки t_1, t_3 будут лежать в одной окрестности (обозначим ее как $V_{1,1}$), а t_2 – в другой. Поэтому в качестве первого элемента индексного множества E выбираем число 0. Поскольку окрестность, содержащая точку t_2 , более не содержит точек из E , то далее мы будем рассматривать только окрестность $V_{1,1}$. Разбивая эту окрестность на окрестности ранга 2, можно заметить, что обе точки принадлежат одной окрестности V_2 , поэтому разобьем окрестность V_2 , содержащую точки t_1, t_3 , на окрестности ранга 3. При этом точки t_1, t_3 попадают в разные окрестности. Таким образом, число 2 является элементом индексного множества. На этом рассуждения можно прекратить, так как

любая окрестность V_n , $n > 3$, содержит не более одной точки из E (или не содержит их вовсе).

Таким образом, индексным множеством для данного множества E будет множество $I = \{0, 2\}$. Если теперь ряд (2) сходится к нулю всюду на $G^{(2)} \setminus E$ и при этом $F_0 \equiv 0$, $F_1 \equiv 0$, $F_3 \equiv 0$, то по теореме 4, $F_n \equiv 0$, для любого $n \in \mathbb{N}$.

ПРИМЕР 2. Пусть размерность пространства $d = 2$ и $E = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ – счетное множество, где $t_k = (t_k^1, t_k^2)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, причем для $i = \overline{1, 2}$

$$\begin{aligned} t_1^i &= (0, 0, 0, 0, \dots), & t_2^i &= (1, 1, 1, 1, \dots), \\ t_3^i &= (0, 0, 1, 1, \dots), & t_4^i &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, \dots), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$t_n^i = (t_0^n, t_1^n, \dots), \quad \text{где} \quad t_m^n = 0, \quad m = \overline{0, (2(n-2)-1)}, \quad \text{и} \quad t_m^n = 1, \quad m \geq 2(n-2),$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям из примера 1, получим, что множество $I = \{2k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ будет индексным множеством для данного множества E . Если теперь ряд (2) сходится к нулю всюду на $G^{(2)} \setminus E$ и при этом $F_0 \equiv 0$, $F_{2k-1} \equiv 0$, для любого $k \in \mathbb{N}$, то по теореме 4 $F_n \equiv 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 4 является окончательной в том смысле, что если рассмотреть индексное множество хотя бы без одного какого-либо элемента, то теорема будет неверна.

Прежде чем сформулировать и доказать следующую теорему, дадим определение угловых точек d -мерной окрестности V_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть V_n – некоторая окрестность ранга n . Возьмем любую точку $t = (t_k) \in V_n$. Точки

$$(t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, 1, 0, 0, \dots) \quad \text{и} \quad (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, 0, 1, 1, \dots)$$

будем называть *крайними точками* окрестности V_n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $V_n^{(d)} = V_n \times \dots \times V_n$. Точку $\mathbf{t} = (t^{(1)}, \dots, t^{(d)})$, где каждая $t^{(i)}$ есть некоторая крайняя точка соответствующей V_n , будем называть *угловой точкой* d -мерной окрестности $V_n^{(d)}$.

Заметим, что любая d -мерная окрестность V_n содержит ровно 2^d угловых точек.

ТЕОРЕМА 5. Для любого непустого множества $I \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ такого, что множество $\mathbb{N} \cup \{0\} \setminus I$ счетно, существует множество E из $G^{(d)}$ такое, что

- 1) его индексное множество совпадает с указанным множеством I ;
- 2) для любого фиксированного $k_i \in I$ найдется ряд вида (2) такой, что $F_{k_i+1} \neq 0$, $F_0 \equiv 0$ и $F_{k+1} \equiv 0$, для всех $k \in I$, $k \neq k_i$, и который сходится к нулю всюду на $G^{(d)}$ вне E и расходится во всех точках множества E , и при этом неверно, что все остальные $F_k(\mathbf{t}) \equiv 0$;
- 3) найдется ряд вида (2) такой, что $F_0 \neq 0$ и $F_{k+1} \equiv 0$ для всех $k \in I$ и который сходится к нулю всюду на $G^{(d)}$ вне E и расходится во всех точках множества E , и при этом неверно, что все остальные $F_k(\mathbf{t}) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для счетного множества I . Случай, когда I конечно, рассматривается аналогично.

1) Пусть нам дано счетное множество

$$I = \{k_1, \dots, k_p, \dots\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$$

такое, что множество $\mathbb{N} \cup \{0\} \setminus I$ счетно, и пусть $k_1 < k_2 < \dots$. Будем строить множество E , для которого множество I будет индексным множеством.

Представим d -мерную двоичную группу $G^{(d)}$ в виде

$$G^{(d)} = \bigsqcup V_{k_1},$$

где k_1 – первый элемент из множества I . Выберем одну такую окрестность V_{k_1} , отметим ее угловые точки и включим их в множество E . Представим V_{k_1} в виде дизъюнктного объединения окрестностей V_{k_2} :

$$V_{k_1} = \bigsqcup V_{k_2}.$$

В тех окрестностях V_{k_2} , которые уже содержат точку из E , отметим оставшиеся угловые точки и включим их в E . Продолжая этот процесс, мы получим множество $E = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{2^{dp}}, \dots\}$ такое, что его индексное множество совпадает с данным $I = \{k_1, \dots, k_p, \dots\}$.

2) Выберем теперь произвольное $k_i \in I$ и зафиксируем его. Пусть

$$F_0 \equiv 0, \quad F_{k+1} \equiv 0 \quad \forall k \in I, \quad k \neq k_i.$$

Построим такой ряд вида (2), который будет сходиться всюду на $G^{(d)}$ вне E , расходиться во всех точках множества E и для которого $F_{k_i+1} \neq 0$.

Положим $F_k \equiv 0$ для $k = 0, \dots, k_i$.

Шаг 1. Представим d -мерную двоичную группу в виде

$$G^{(d)} = \bigsqcup V_{k_i}.$$

По построению среди V_{k_i} есть те, которые содержат точки из E . Обозначим их как $V_{k_i, \alpha}$, $\alpha \in J$. При этом

$$V_{k_i, \alpha} = \bigsqcup_{j=1}^{2^d} V_{k_i, j}^{\alpha}$$

и для любых $\alpha \in J$, $j = 1, \dots, 2^d$, окрестности $V_{k_i, j}^{\alpha}$ содержат точки из E .

Построим $F_{k_i+1}(\mathbf{t})$ так, чтобы

$$F_{k_i+1}(\mathbf{t}) = 0$$

вне этих окрестностей, а на каждой из них

$$|F_{k_i+1}(\mathbf{t})| \equiv a,$$

где $a > 0$ – некоторое число. При этом на половине окрестностей $V_{k_i, j}^{\alpha}$

$$F_{k_i+1}(\mathbf{t}) \equiv a,$$

а на другой половине

$$F_{k_i+1}(\mathbf{t}) \equiv -a.$$

В этом случае,

$$|S_{k_i+1}(\mathbf{t})| = \left| \sum_{k=0}^{k_i+1} F_k(\mathbf{t}) \right| = \begin{cases} a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{k_i+1} \text{ и } V_{k_i+1} \cap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{k_i+1} \text{ и } V_{k_i+1} \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

Шаг 2. Представим указанное множество I в следующем виде:

$$I = \{K_1, K_1 + 1, \dots, K_1 + m_1 - 1, K_2, \dots, K_2 + m_2 - 1, \dots, K_p, \dots, K_p + m_p - 1, \dots\},$$

где для любого $j \geq 1$ $K_j + m_j < K_{j+1}$.

Таким образом, множество I разбивается на пачки последовательно идущих элементов. При таком разбиении окажется, что для любого $j \geq 1$ число m_j есть количество элементов в j -й пачке.

Тогда в новом представлении множества I указанное k_i будет иметь вид $K_j + r$, где $j \geq 1$, $0 \leq r < m_j$ — фиксированные числа. Тогда

$$F_{K_j+r+1} = F_{k_i+1} \quad \text{и} \quad S_{K_j+r+1} = S_{k_i+1},$$

Рассмотрим два случая:

А) $r = m_j - 1$;

В) $r < m_j - 1$.

А) Пусть $r = m_j - 1$, тогда k_i будет иметь вид $K_j + m_j - 1$. Представим рассматриваемые окрестности V_{k_i} в виде дизъюнктного объединения окрестностей V_{k_i+1} . Так как $k_i + 1 = K_j + m_j \notin I$, то для каждой такой окрестности V_{k_i+1} только одна окрестность $V_{k_i+2} \subset V_{k_i+1}$ содержит точки из E . Поэтому $F_{k_i+2}(\mathbf{t}) = F_{K_j+m_j+1}(\mathbf{t})$ будем строить так, чтобы

$$F_{K_j+m_j+1}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{K_j+m_j}(\mathbf{t}) = 0, \\ -S_{K_j+m_j}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_j+m_j+1} \text{ и } V_{K_j+m_j+1} \cap E = \emptyset, \\ (2^d - 1)S_{K_j+m_j}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_j+m_j+1} \text{ и } V_{K_j+m_j+1} \cap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|S_{K_j+m_j+1}(\mathbf{t})| = \left| \sum_{k=0}^{K_j+m_j+1} F_k(\mathbf{t}) \right| = \begin{cases} 2^d a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_j+m_j+1} \text{ и } V_{K_j+m_j+1} \cap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_j+m_j+1} \text{ и } V_{K_j+m_j+1} \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

В) Пусть $r < m_j - 1$. Тогда

$$F_{K_j+r+2} \equiv 0, \quad \dots, \quad F_{K_j+m_j} \equiv 0,$$

а значит, и

$$S_{K_j+r+2} = \dots = S_{K_j+m_j} \equiv S_{K_j+r+1}.$$

Представим рассматриваемые окрестности V_{K_j+r} в виде дизъюнктного объединения окрестностей $V_{K_j+m_j}$. Так как $K_j + m_j \notin I$, то для каждой такой окрестности

$V_{K_j+m_j}$ только одна окрестность $V_{K_j+m_j+1} \subset V_{K_j+m_j}$ содержит точки из E . Поэтому $F_{K_j+m_j+1}(\mathbf{t})$ будем строить так, чтобы

$$F_{K_j+m_j+1}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{K_j+m_j}(\mathbf{t}) = 0, \\ -S_{K_j+m_j}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_j+m_j+1} \text{ и } V_{K_j+m_j+1} \cap E = \emptyset, \\ (2^d - 1)S_{K_j+m_j}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_j+m_j+1} \text{ и } V_{K_j+m_j+1} \cap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким образом,

$$|S_{K_j+m_j+1}(\mathbf{t})| = \left| \sum_{k=0}^{K_j+m_j+1} F_k(\mathbf{t}) \right| = \begin{cases} 2^d a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_j+m_j+1} \text{ и } V_{K_j+m_j+1} \cap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_j+m_j+1} \text{ и } V_{K_j+m_j+1} \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

Шаг 3. Поскольку $K_j+m_j < K_{j+1}$, то $K_{j+1} = K_j+m_j+r_j$, где $r_j \geq 1$. Обозначим K_j+m_j+h как H_j . Будем строить $F_{H_j+1}(\mathbf{t})$, $1 \leq h \leq r_j$, так, чтобы

$$F_{H_j+1}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{H_j}(\mathbf{t}) = 0, \\ -S_{H_j}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{H_j+1} \text{ и } V_{H_j+1} \cap E = \emptyset, \\ (2^d - 1)S_{H_j}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{H_j+1} \text{ и } V_{H_j+1} \cap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Тогда

$$|S_{H_j+1}(\mathbf{t})| = \left| \sum_{k=0}^{H_j+1} F_k(\mathbf{t}) \right| = \begin{cases} 2^{d(h+1)} a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{H_j+1} \text{ и } V_{H_j+1} \cap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{H_j+1} \text{ и } V_{H_j+1} \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

Шаг 4. Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям в пункте В) шага 2 и в шаге 3, получаем, что для всех $q > j$

$$F_{K_{q+1}}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{K_{q+1}-1}(\mathbf{t}) = 0, \\ -S_{K_{q+1}-1}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_{q+1}} \text{ и } V_{K_{q+1}} \cap E = \emptyset, \\ (2^d - 1)S_{K_{q+1}-1}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_{q+1}} \text{ и } V_{K_{q+1}} \cap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned} & |S_{K_{q+1}}(\mathbf{t})| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{K_{q+1}} F_k(\mathbf{t}) \right| = \begin{cases} 2^{d(K_{q+1}-K_j-(m_j+\dots+m_q))} a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_{q+1}} \text{ и } V_{K_{q+1}} \cap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{K_{q+1}} \text{ и } V_{K_{q+1}} \cap E = \emptyset. \end{cases} \end{aligned}$$

Видно, что полученный таким образом ряд вида (2) сходится к нулю всюду на $G^{(d)}$ вне E и расходится во всех точках множества E .

В случае конечного множества I , когда все k_j исчерпаны, все дальнейшие шаги описываются следующим образом. Пусть $k_j \in I$ и для всех $i \in \mathbb{N}$ $k_j + i \notin I$, тогда

$$F_{k_j+i+1}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{если } S_{k_j+i}(\mathbf{t}) = 0, \\ -S_{k_j+i}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{k_j+i+1} \text{ и } V_{k_j+i+1} \cap E = \emptyset, \\ (2^d - 1)S_{k_j+i}(\mathbf{t}), & \text{если } \mathbf{t} \in V_{k_j+i+1} \text{ и } V_{k_j+i+1} \cap E \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$|S_{k_j+i+1}(\mathbf{t})| = \left| \sum_{k=0}^{k_j+i+1} F_k(\mathbf{t}) \right| = \begin{cases} 2^{di} |S_{k_j}|, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{k_j+i+1} \text{ и } V_{k_j+i+1} \cap E \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{k_j+i+1} \text{ и } V_{k_j+i+1} \cap E = \emptyset. \end{cases}$$

3) доказывается аналогично 2).

Приведем пример, иллюстрирующий приведенную выше теорему. Пусть $d = 2$, а множество I состоит из одной точки, скажем 1. Тогда

$$G^{(2)} = \bigsqcup_{i=1}^4 V_{1,i}.$$

Выберем $V_{1,1}$ – окрестность, содержащую точку

$$\mathbf{t} = (t^1, t^2), \quad \text{где } t^1 = (0, 0, \dots), \quad t^2 = (0, 0, \dots),$$

и отметим ее угловые точки:

$$\mathbf{t}_1 = (t_1^1, t_1^2), \quad \mathbf{t}_2 = (t_2^1, t_2^2), \quad \mathbf{t}_3 = (t_3^1, t_3^2), \quad \mathbf{t}_4 = (t_4^1, t_4^2),$$

где

$$\begin{aligned} t_1^1 &= (0, 0, \dots), & t_1^2 &= (0, 0, \dots), \\ t_2^1 &= (0, 0, \dots), & t_2^2 &= (0, 1, 1, \dots), \\ t_3^1 &= (0, 1, 1, \dots), & t_3^2 &= (0, 1, 1, \dots), \\ t_4^1 &= (0, 1, 1, \dots), & t_4^2 &= (0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Пусть множество $E = \{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{t}_4\}$. Очевидно, что индексным множеством множества E будет $I = \{1\}$. Построим ряд такой, что он будет сходиться к нулю всюду на $G^{(2)}$ вне E , $F_2 \not\equiv 0$, и при этом не все пачки из оставшихся тождественно равны нулю.

Пусть $F_0 \equiv 0$, $F_1 \equiv 0$. Разобьем окрестность $V_{1,1}$ на окрестности ранга 2: $V_{1,1} = \bigsqcup_{i=1}^4 V_{2,i}$ и выберем F_2 такую, что

$$F_2(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{t} \notin V_{1,1}, \\ a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{2,2k}, \quad k = \overline{0, 1}, \\ -a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_{2,2k+1}, \quad k = \overline{0, 1}, \end{cases}$$

где $a > 0$. Заметим, что на данном шаге $S_2 = F_2$. Далее, мы должны выбрать F_3 таким образом, чтобы S_3 было равно нулю всюду, за исключением тех окрестностей ранга 3, которые содержат точки из E . Поэтому F_3 построим следующим образом:

$$F_3(\mathbf{t}) = \begin{cases} -S_2, & \text{если } \mathbf{t} \in V_3, \quad V_3 \cap E = \emptyset, \\ 3S_2, & \text{если } \mathbf{t} \in V_3, \quad V_3 \cap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Благодаря такому построению

$$|S_3(\mathbf{t})| = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{t} \in V_3, \quad V_3 \cap E = \emptyset, \\ 4a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_3, \quad V_3 \cap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Рассуждая и дальше подобным образом, получаем, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$,

$$F_n(\mathbf{t}) = \begin{cases} -S_{n-1}, & \text{если } \mathbf{t} \in V_n, V_n \cap E = \emptyset, \\ 3S_{n-1}, & \text{если } \mathbf{t} \in V_n, V_n \cap E \neq \emptyset, \end{cases}$$

$$|S_n(\mathbf{t})| = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathbf{t} \in V_n, V_n \cap E = \emptyset, \\ 2^{2(n-2)}a, & \text{если } \mathbf{t} \in V_n, V_n \cap E \neq \emptyset. \end{cases}$$

Таким образом, только пустое множество является множеством единственности для ряда (1) при сходимости по двоичным кубам. Даже в случае, когда есть сходимость к нулю вне одной точки, мы должны требовать дополнительное условие $F_0 \equiv 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Schipp, W.R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Akademiai Kiado, Budapest, 1990.
- [2] S. F. Lukomskii, “On U -set for multiple Walsh series”, *Anal. Math.*, **18**:2 (1992), 127–138.
- [3] М. Г. Плотников, “Об U -множествах для кратных рядов Уолша”, *Современные проблемы теории функций и их приложения*, Тезисы докладов 13-й Саратов. зимней школы, Изд. “Научная книга”, Саратов, 2006, 140–141.
- [4] F. Weisz, “Uniqueness of two-parameter dyadic martingales and Walsh–Fourier series”, *Mathematica Pannonica*, **9**:1 (1998), 131–140.
- [5] С. Ф. Лукомский, “Об абсолютной сходимости кратных рядов Уолша”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1988, № 4, 34–36.

Н. С. Морева

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: tehni_N@mail.ru

Поступило

07.06.2006

Исправленный вариант

25.10.2006