Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Рохлин, Теорема о мартингальном выборе для случайной последовательности с относительно открытыми выпуклыми значениями, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 614–620

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:27:08

УДК 519.216.8

Теорема о мартингальном выборе для случайной последовательности с относительно открытыми выпуклыми значениями

Д. Б. Рохлин

Для многозначной случайной последовательности $(G_n)_{n=0}^N$ с относительно открытыми выпуклыми значениями $G_n(\omega)$ получен критерий существования согласованной с фильтрацией последовательности селекторов $(x_n)_{n=0}^N$, для которой существует эквивалентная мартингальная мера. Указанный критерий выражен в терминах носителей регулярных условных верхних распределений элементов G_n . Данный результат является усилением основного результата предыдущей работы автора [1], в которой накладывалось условие открытости множеств $G_n(\omega)$ и был сформулирован вопрос о возможности ослабления этого условия.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, наделенном возрастающей фильтрацией σ -алгебр $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$, задана последовательность $\mathcal{F}_n$ -измеримых многозначных отображений $\Omega \mapsto G_n(\omega) \subset \mathbb{R}^d$, $n = 0, \dots, N$, с непустыми относительно открытыми выпуклыми значениями $G_n(\omega)$. В настоящей статье получен критерий существования следующей пары: согласованного с фильтрацией однозначного случайного процесса $x = (x_n)_{n=0}^N$, $x_n(\omega) \in G_n(\omega)$, и эквивалентной $\mathbb{P}$ вероятностной меры $\mathbb{Q}$, относительно которой x является мартингалом.

Напомним, что процесс x называется *мартингалом* относительно $\mathbb{Q}$, если случайные величины x_n являются $\mathbb{Q}$ -интегрируемыми и условное математическое ожидание $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(x_n | \mathcal{F}_{n-1})$ совпадает с x_{n-1} . Здесь и далее случайные величины считаются равными, если они принимают одинаковые значения почти наверное (п.н.) относительно меры $\mathbb{P}$ (или любой эквивалентной меры).

Следуя [1], будем говорить, что *задача о мартингальном выборе* (з.м.в.) разрешима для последовательности $(G_n)_{n=0}^N$, если указанная выше пара $(x, \mathbb{Q})$ существует.

Постановка данной задачи мотивирована проблемами математической теории арбитража. В частности, если отображения G_n являются однозначными, то получаем известную задачу о существовании эквивалентной мартингальной меры для заданного случайного процесса $G_n = x_n$. При этом разрешимость з.м.в. является критерием безарбитражности рынка, на котором дисконтированные цены активов описываются процессом x [2]–[5]. В работе [4] показано, что эквивалентная мартингальная

мера для x существует, если и только если выпуклые оболочки носителей регулярных условных распределений элементов $x_n - x_{n-1}$ относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{n-1}$ содержат начало координат в качестве относительно внутренней точки [4; теорема 3, условие (g)]. Цель настоящей работы состоит в обобщении данного результата.

В рамках моделей рынков с операционными издержками [6]–[8] вместо эквивалентных мартингалов мер рассматриваются строго согласованные процессы цен. Так называются P -мартингалы, значения элементов которых п.н. лежат в относительной внутренней случайных конусов K_n^* , сопряженных конусам платежеспособности K_n . Используя инвариантность K_n^* относительно растяжений, нетрудно показать (см. [1; введение]), что существование строго согласованного процесса цен эквивалентно разрешимости з.м.в. для последовательности $(\text{ri } K_n^*)_{n=0}^N$ относительных внутренних K_n^* .

В работе [1] был получен критерий разрешимости з.м.в. в предположении об открытости множеств $G_n(\omega)$. Данный результат не вполне удовлетворителен, поскольку, в частности, он не охватывает случая однозначных G_n и не позволяет конусам K_n^* иметь пустую внутренность. Последнее означает, что должно быть выполнено условие “эффективного трения” (в терминологии [6]).

В настоящей работе не только усилен основной результат [1] (см. ниже теорему 1), но и предложена существенно более простая схема доказательства.

2. Предварительные сведения. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и σ -алгебру $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Далее предполагается, что все рассматриваемые σ -алгебры являются полными относительно меры P (т.е. содержат все подмножества своих множеств P -нулевой меры). Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ – σ -алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Многозначное отображение F , ставящее в соответствие каждому $\omega \in \Omega$ некоторое множество $F(\omega) \subset \mathbb{R}^d$, называется $\mathcal{H}$ -измеримым, если $\{\omega: F(\omega) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{H}$ для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^d$. График и эффективное множество отображения F определяются следующим образом:

$$\text{gr } F = \{(\omega, x): x \in F(\omega)\}, \quad \text{dom } F = \{\omega: F(\omega) \neq \emptyset\}.$$

Известно, что если $\text{gr } F \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$, то отображение F является $\mathcal{H}$ -измеримым [9; следствие II.1.34].

Обозначим через $\text{cl } C$, $\text{ri } C$, $\text{conv } C$ замыкание, относительную внутренность и выпуклую оболочку подмножества C конечномерного пространства соответственно. Пусть $C_1 + C_2 = \{x + y: x \in C_1, y \in C_2\}$ – векторная сумма множеств. Если F – многозначное отображение, то обозначения вида $\text{cl } F$ используются для многозначных отображений, принимающих значения $\text{cl}(F(\omega))$.

Функция $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ называется селектором многозначного отображения F , если $f(\omega) \in F(\omega)$ для всех $\omega \in \text{dom } F$. Множество $\mathcal{H}$ -измеримых селекторов отображения F обозначим через $\mathcal{S}(F, \mathcal{H})$. Заметим, что если многозначное отображение F является $\mathcal{H}$ -измеримым, то отображение

$$F_* = F I_{\text{dom } F} + \mathbb{R}^d I_{\Omega \setminus \text{dom } F} \quad (1)$$

также $\mathcal{H}$ -измеримо и $\mathcal{S}(F, \mathcal{H}) = \mathcal{S}(F_*, \mathcal{H})$. Здесь I_A – индикатор множества A .

Счетное семейство $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\mathcal{H}$ -измеримых селекторов называется ($\mathcal{H}$ -измеримым) *представлением Кастэна* отображения F , если множества $\{f_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ плотны в $F(\omega)$ при всех $\omega \in \text{dom } F$. Известно, что для $\mathcal{H}$ -измеримости многозначного отображения F с непустыми замкнутыми значениями необходимо и достаточно существования $\mathcal{H}$ -измеримого представления Кастэна [9; предложение II.2.3].

Говорят, что $f \in \mathcal{S}(\text{conv } F, \mathcal{H})$ обладает $\mathcal{H}$ -измеримым *представлением Каратеодори*, если существуют элементы $g_k \in S(F, \mathcal{H})$, $k = 1, \dots, d+1$, и $\mathcal{H}$ -измеримые функции

$$\alpha_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, d+1, \quad \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k = 1, \quad (2)$$

такие, что $f = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k g_k$ п.н. Известно, что если $\text{gr } F \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{B}$, то любой элемент $f \in \mathcal{S}(\text{conv } F, \mathcal{H})$ обладает $\mathcal{H}$ -измеримым представлением Каратеодори [10; теорема 8.2(iii)].

Обозначим через $\text{CL} = \text{CL}(\mathbb{R}^d)$ семейство непустых замкнутых подмножеств $\mathbb{R}^d$, а через $\mathcal{E}(\text{CL})$ – σ -алгебру *Эффроса*, порожденную множествами вида

$$A_V = \{D \in \text{CL} : D \cap V \neq \emptyset\},$$

где V – открытое множество $\mathbb{R}^d$.

Пусть F – $\mathcal{F}$ -измеримое многозначное отображение с непустыми замкнутыми значениями. Тогда непосредственно из определений вытекает, что соответствующее однозначное отображение $F: (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\text{CL}, \mathcal{E}(\text{CL}))$ является измеримым. Известно, что измеримое пространство $(\text{CL}, \mathcal{E}(\text{CL}))$ является борелевским пространством [11; теорема 3.3.10]. Отсюда следует, что отображение F , рассматриваемое как случайный элемент со значениями в $(\text{CL}, \mathcal{E}(\text{CL}))$, обладает регулярным условным распределением относительно $\mathcal{H}$ [12; гл. 2, § 7, теорема 5].

Таким образом, существует функция $P^*: \Omega \times \mathcal{E}(\text{CL}) \mapsto [0, 1]$ со следующими свойствами:

- (i) для каждого ω функция $C \mapsto P^*(\omega, C)$ – вероятностная мера на $\mathcal{E}(\text{CL})$;
- (ii) для каждого $C \in \mathcal{E}(\text{CL})$ функция $\omega \mapsto P^*(\omega, C)$ п.н. совпадает с условной вероятностью $P(\{F \in C\} | \mathcal{H})(\omega)$.

Следуя [1], на семействе открытых множеств $V \subset \mathbb{R}^d$ определим *регулярное условное верхнее распределение* $\mu_{F, \mathcal{H}}(\omega, V) = P^*(\omega, A_V)$ отображения F относительно σ -алгебры $\mathcal{H}$. Множество

$$\mathcal{K}(F, \mathcal{H}; \omega) = \{y \in \mathbb{R}^d : \mu_{F, \mathcal{H}}(\omega, \{y' : |y' - y| < \varepsilon\}) > 0 \text{ для всех } \varepsilon > 0\}$$

называется *носителем* $\mu_{F, \mathcal{H}}(\omega, \cdot)$ [1]. Заметим, что если отображение F является однозначным, то $\mu_{F, \mathcal{H}}$ и $\mathcal{K}(F, \mathcal{H})$ – регулярное условное распределение F относительно $\mathcal{H}$ и его носитель соответственно.

Многозначное отображение $\omega \mapsto \mathcal{K}(F, \mathcal{H}; \omega)$ принимает непустые замкнутые значения и является $\mathcal{H}$ -измеримым [1; предложение 4(a)]. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ – $\mathcal{F}$ -измеримое представление Кастэна для F . Тогда справедливо следующее равенство (см. [1; лемма 1]):

$$\mathcal{K}(F, \mathcal{H}) = \text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{K}(f_i, \mathcal{H}) \right) \quad \text{п.н.} \quad (3)$$

Если отображение F принимает пустые значения на множестве нулевой меры, то положим $\mathcal{K}(F, \mathcal{H}) = \mathcal{K}(F_*, \mathcal{H})$, где F_* определяется формулой (1). При этом, очевидно, соотношение (3) сохраняет силу.

Если же $F(\omega) = \emptyset$ на множестве положительной меры, то положим $\mathcal{K}(F, \mathcal{H}) = \emptyset$ при всех ω .

3. Основной результат. Пусть дана последовательность $\mathcal{F}_n$ -измеримых многозначных отображений $\Omega \mapsto G_n(\omega) \subset \mathbb{R}^d$, $n = 0, 1, \dots, N$, с непустыми относительно открытыми выпуклыми значениями $G_n(\omega)$. Введем последовательность многозначных отображений $(W_n)_{n=0}^N$ по рекуррентной формуле

$$W_N = \text{cl } G_N, \\ W_{n-1} = \text{cl}(G_{n-1} \cap \text{ri } Y_{n-1}), \quad Y_{n-1} = \text{conv } \mathcal{K}(W_n, \mathcal{F}_{n-1}), \quad 1 \leq n \leq N.$$

Данная последовательность корректно определена и согласована с фильтрацией. Действительно, пусть отображение W_n является $\mathcal{F}_n$ -измеримым. Если $W_n \neq \emptyset$ п.н., то отображение $\text{conv } \mathcal{K}(W_n, \mathcal{F}_{n-1})$ $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримо (см. [1; предложение 4(а)] и [9; предложение II.2.26]). Далее, графики отображений G_{n-1} , $\text{ri } Y_{n-1}$ измеримы относительно σ -алгебры $\mathcal{F}_{n-1} \otimes \mathcal{B}$ [13; лемма 1(c)]. Следовательно, отображение $G_{n-1} \cap \text{ri } Y_{n-1}$ является $\mathcal{F}_{n-1}$ -измеримым [9; следствие II.1.34]. Его замыкание W_{n-1} обладает тем же свойством [9; предложение II.1.8].

Если же $W_n = \emptyset$ на множестве положительной меры, то по определению $W_{n-1} = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 1. Следующие условия эквивалентны:

- (а) существуют такой согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ случайный процесс $x = (x_n)_{n=0}^N$ и такая эквивалентная $\mathbb{P}$ вероятностная мера $\mathbb{Q}$, что $x_n \in \mathcal{S}(G_n, \mathcal{F}_n)$, $n \geq 0$, и x является $\mathbb{Q}$ -мартингалом;
- (б) $W_n \neq \emptyset$ п.н., $n = 0, \dots, N-1$.

Обозначим через $E(f \mid \mathcal{H})$ обобщенное условное математическое ожидание $\mathcal{F}$ -измеримой случайной величины f относительно $\mathcal{H}$ (по мере $\mathbb{P}$) [12; с. 229], [5; с. 117]. Доказательство теоремы 1 опирается на следующий результат.

ЛЕММА 1. Пусть F – $\mathcal{F}$ -измеримое многозначное отображение с непустыми замкнутыми выпуклыми значениями. Для любого $\mathcal{H}$ -измеримого селектора ξ отображения $\text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(F, \mathcal{H}))$ существуют элемент $\eta \in \mathcal{S}(\text{ri } F, \mathcal{F})$ и $\mathcal{F}$ -измеримая случайная величина $\gamma > 0$ такие, что

$$\xi = E(\gamma \eta \mid \mathcal{H}), \quad E(\gamma \mid \mathcal{H}) = 1 \quad \text{п.н.} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, $f_i \in \mathcal{S}(\text{ri } F, \mathcal{F})$, – представление Кастэна для $\text{ri } F$. Поскольку $\text{ri } F \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$ [13; лемма 1(c)], то такое представление существует (см. [9; предложение II.2.17]).

Но $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является, очевидно, представлением Кастэна и для F . Воспользуемся соотношением (3):

$$\xi \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(F, \mathcal{H})) = \text{ri}\left(\text{conv}\left(\text{cl}\left(\bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{K}(f_i, \mathcal{H})\right)\right)\right) \quad \text{п.н.}$$

Заметим, что для любого набора множеств $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, $A_i \subset \mathbb{R}^d$, справедливо включение

$$B_1 = \text{ri} \left(\text{conv} \left(\text{cl} \left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i \right) \right) \right) \subset \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^\infty \text{ri}(\text{conv } A_i) \right) = B_2.$$

В самом деле, пусть $x \notin B_2$. Тогда по теореме отделимости существуют $p \in \mathbb{R}^d$, $j \in \mathbb{N}$, $\bar{y} \in A_j$ такие, что

$$\langle p, x \rangle \geq \langle p, y \rangle, \quad y \in A_i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \langle p, x \rangle > \langle p, \bar{y} \rangle.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$.

Очевидно, $\langle p, x \rangle \geq \langle p, z \rangle$ для всех $z \in \text{cl } B_1$. Поскольку $\bar{y} \in \text{cl } B_1$, то $\{x\}$ и $\text{cl } B_1$ собственно отделимы. Следовательно, $x \notin \text{ri}(\text{cl } B_1) = B_1$.

Полагая $A_i = \mathcal{K}(f_i, \mathcal{H})$, заключаем, что

$$\xi \in \text{conv} \left(\bigcup_{i=1}^\infty \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(f_i, \mathcal{H})) \right) \quad \text{п.н.}$$

Опираясь на указанные выше результаты теории измеримых многозначных отображений, легко проверить, что ξ обладает $\mathcal{H}$ -измеримым представлением Каратеодори:

$$\xi = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k \xi_k \quad \text{п.н.}, \quad \xi_k \in \mathcal{S} \left(\bigcup_{i=1}^\infty \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(f_i, \mathcal{H})), \mathcal{H} \right),$$

где $\mathcal{H}$ -измеримые функции α_k удовлетворяют условиям (2).

Положим $A_k^i = \{\omega : \xi_k \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(f_i, \mathcal{H}))\}$ и рассмотрим покрытие Ω , состоящее из множеств $A_1^{i_1} \cap \dots \cap A_{d+1}^{i_{d+1}}$, где верхние индексы принимают всевозможные натуральные значения. Легко показать (см. [1; лемма 2]), что существует такое $\mathcal{H}$ -измеримое разбиение $\{D_j\}_{j \in J}$, $J \subset \mathbb{N}$, множества Ω , что

$$\emptyset \neq D_j \subset A_1^{i_1} \cap \dots \cap A_{d+1}^{i_{d+1}}, \quad j \in J,$$

где набор $(i_1, \dots, i_{d+1})$ зависит от j .

Для всех $\omega \in D_j$ имеем

$$\xi_k \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(f_{i_k(j)}, \mathcal{H})), \quad k = 1, \dots, d+1.$$

Или, что то же самое, $0 \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(\zeta_{kj}, \mathcal{H}))$, где $\zeta_{kj} = I_{D_j}(f_{i_k(j)} - \xi_k)$.

Согласно [4; теорема 3] отсюда следует, что для любых $k \in \{1, \dots, d+1\}$ и $j \in J$ существует эквивалентная Р вероятностная мера $\mathbf{Q}_{kj}$ с п.н. ограниченной плотностью $0 < \gamma_{kj} = d\mathbf{Q}_{kj}/d\mathbf{P}$ такая, что

$$I_{D_j} \xi_k = I_{D_j} \mathbf{E}_{\mathbf{Q}_{kj}}(f_{i_k(j)} \mid \mathcal{H}) = \frac{I_{D_j}}{\mathbf{E}(\gamma_{kj} \mid \mathcal{H})} \mathbf{E}(\gamma_{kj} f_{i_k(j)} \mid \mathcal{H}) \quad \text{п.н.}$$

В последнем равенстве использована обобщенная формула Байеса [5; гл. 5, § 3а, п. 3].

Следовательно, справедливо представление

$$\xi = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k \xi_k = \mathbf{E} \left(\sum_{k=1}^{d+1} \frac{\alpha_k \gamma_{kj}}{\mathbf{E}(\gamma_{kj} \mid \mathcal{H})} f_{i_k(j)} \mid \mathcal{H} \right) \quad \text{п.н. на } D_j.$$

Здесь учтено, что равенство $E(gh \mid \mathcal{H}) = hE(g \mid \mathcal{H})$ верно, если функция g является $\mathcal{F}$ -измеримой и P -интегрируемой, а функция h — $\mathcal{H}$ -измеримой (см. замечание, сделанное в [12; с. 236]).

Положим $\beta_{kj} = \gamma_{kj}/E(\gamma_{kj} \mid \mathcal{H})$ и введем функции

$$\gamma_j = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k \beta_{kj}, \quad \eta_j = \sum_{k=1}^{d+1} \frac{\alpha_k \beta_{kj}}{\gamma_j} f_{i_k(j)}.$$

Имеем

$$\xi = E(\gamma_j \eta_j \mid \mathcal{H}) \quad \text{п.н. на } D_j.$$

Остается заметить, что поскольку $\gamma_j > 0$, $E(\gamma_j \mid \mathcal{H}) = 1$,

$$\eta_j \in \text{conv}\{f_{i_1(j)}, \dots, f_{i_{d+1}(j)}\} \subset \text{ri } F \quad \text{п.н. на } D_j,$$

то функции

$$\gamma = \sum_{j \in J} I_{D_j} \gamma_j, \quad \eta = \sum_{j \in J} I_{D_j} \eta_j$$

удовлетворяют условиям (4). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть выполнено условие (b). Отправляясь от произвольного селектора $x_0 \in \mathcal{S}(\text{ri } W_0, \mathcal{F}_0)$, построим согласованные с фильтрацией $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ последовательности $x_n \in \text{ri } W_n$, $\gamma_n \geq 0$, удовлетворяющие условиям

$$x_{n-1} = E(\gamma_n x_n \mid \mathcal{F}_n), \quad E(\gamma_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 1 \quad \text{п.н.}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Существование селектора x_0 вытекает из уже упоминавшихся результатов [13; лемма 1(c)], [9; предложение П.2.17]. Существование указанных последовательностей следует из леммы 1, поскольку если $x_{n-1} \in \mathcal{S}(\text{ri } W_{n-1}, \mathcal{F}_{n-1})$, то

$$x_{n-1} \in \mathcal{S}(\text{ri}(\text{conv } \mathcal{H}(W_n, \mathcal{F}_{n-1})), \mathcal{F}_{n-1}).$$

Введем положительный P -мартингал

$$(z_n)_{n=0}^N, \quad z_0 = 1, \quad z_n = \prod_{k=1}^n \gamma_k, \quad n \geq 1,$$

и эквивалентную P -вероятностную меру Q' с плотностью $dQ'/dP = z_N$. Согласно обобщенной формуле Байеса

$$x_{n-1} = \frac{1}{z_{n-1}} E(x_n z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = E_{Q'}(x_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \quad \text{п.н.}$$

Таким образом, процесс x является обобщенным (или, что то же самое, локальным) Q' -мартингалом. Но тогда для него существует и эквивалентная мартингальная мера Q [4; теорема 3].

Поскольку, кроме того, $x_n \in \mathcal{S}(\text{ri } W_n, \mathcal{F}_n) \subset \mathcal{S}(G_n, \mathcal{F}_n)$, то выполнено условие (a).

Пусть теперь выполнено условие (а). Заметим, что $x_N \in G_N \subset W_N$, и предположим, что соотношения $x_j \in W_j$, $j \geq n$ уже установлены. Поскольку

$$0 \in \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(x_n - x_{n-1}, \mathcal{F}_{n-1})) \quad \text{п.н.}, \quad n \geq 1$$

(см. [4; теорема 3]), и $\mathcal{K}(x_n, \mathcal{F}_{n-1}) \subset \mathcal{K}(W_n, \mathcal{F}_{n-1})$, то

$$x_{n-1} \in G_{n-1} \cap \text{ri}(\text{conv } \mathcal{K}(x_n, \mathcal{F}_{n-1})) \subset G_{n-1} \cap \text{ri } Y_{n-1} \subset W_{n-1} \quad \text{п.н.}$$

В частности, $W_n \neq \emptyset$ п.н. при всех n . Теорема доказана.

В работе [1] теорема 1 была доказана при одном из следующих дополнительных предположений: (i) множества $G_n(\omega)$ открыты; (ii) множество Ω конечно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Б. Рохлин, “Задача о мартингальном выборе в случае конечного дискретного времени”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **50:3** (2005), 480–500.
- [2] J. M. Harrison, S. R. Pliska, “Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading”, *Stochastic Process. Appl.*, **11:3** (1981), 215–260.
- [3] R. C. Dalang, A. Morton, W. Willinger, “Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models”, *Stoch. Stoch. Rep.*, **29:2** (1990), 185–201.
- [4] J. Jacod, A. N. Shiryaev, “Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case”, *Finance Stoch.*, **2:3** (1998), 259–273.
- [5] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*, Фазис, М., 1998.
- [6] Y. Kabanov, M. Rásonyi, C. Stricker, “No-arbitrage criteria for financial markets with efficient friction”, *Finance Stoch.*, **6:3** (2002), 371–382.
- [7] W. Schachermayer, “The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time”, *Math. Finance*, **14:1** (2004), 19–48.
- [8] Y. Kabanov, M. Rásonyi, C. Stricker, “On the closedness of sums of convex cones in L^0 and the robust no-arbitrage property”, *Finance Stoch.*, **7:3** (2003), 403–411.
- [9] S. Hu, N. S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis*, Volume 1: Theory, Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.
- [10] Wagner D. H., “Survey of measurable selection theorems”, *SIAM J. Control Optim.*, **15:5** (1977), 859–903.
- [11] S. M. Srivastava, *A Course on Borel Sets*, Springer, New York, 1998.
- [12] А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1989.
- [13] Д. Б. Рохлин, “Расширенная версия теоремы Даланга–Мортон–Виллинджера при выпуклых ограничениях на портфель”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **49:3** (2004), 503–521.

Д. Б. Рохлин

Ростовский государственный университет, г. Ростов-на-Дону

E-mail: rokhlin@math.rsu.ru

Поступило

28.02.2006