Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Америк, Об отображениях на квадрики, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 621–624

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:42:42

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об отображениях на квадрики

Е. Ю. Америк

Пусть X, Y – гладкие проективные многообразия и $f: X \rightarrow Y$ – сюръективный морфизм. Естественно задать вопрос об ограниченности семейства возможных f , т.е. конечности числа неприводимых компонент в соответствующем пространстве параметров. Очевидно, если $Y = \mathbb{P}^n$, то семейство морфизмов из X на Y неограничено (если только $n \neq 0$); в то же время, если Y общего типа, то Кобаяши и Оchiai [1] показали, что число сюръективных морфизмов (и даже доминантных рациональных отображений) из X в Y конечно.

Рассмотрим следующий ослабленный вариант нашего вопроса: пусть X, Y – одной и той же размерности n , и предположим, что выполняется какое-нибудь ограничение на когомологии X и Y , например, что $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$. Для каких Y верно, что степень отображения $f: X \rightarrow Y$ ограничена сверху некоторой функцией дискретных инвариантов X и Y ?

Это, очевидно, не так, если Y – проективное пространство, тор или неразветвленно накрывается тором, т.е. является плоским многообразием (здесь, может быть, полезно заметить, что если Y разветвленно накрывается тором и $\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$, то $Y = \mathbb{P}^n$, см., например, [2]; проективное пространство же по хорошо известной теореме Лазарсфелда вообще не имеет гладких проективных образов, кроме самого себя). Существуют ли другие примеры, или же можно утверждать, что степень f ограничена для всех остальных Y ?

Особенно интересно проверить ограниченность в случае, когда Y – n -мерная квадратика, $n > 2$, поскольку среди многообразий с числом Пикара 1 квадратика в каком-то смысле “особенно близка” к $\mathbb{P}^n$. Кармен Шуман [3], используя оценку Мияоки для количества двойных точек на поверхности, показала ограниченность степени f при $n = 3$. Это доказательство не обобщается на случай произвольного n .

В работе [4] (теорема 4.1.1) мною было приведено другое доказательство этого факта, основанное на так называемой инфинитезимальной теореме Нётера–Лефшеца, и упомянуто (замечание 4.1.2), что такое доказательство нетрудно обобщить на случай высшей размерности. Цель данной заметки – сформулировать и доказать это обобщение.

Я очень признательна Юн-Мук Вангу (J.-M. Hwang) и Нгаимингу Моку (N. Mok), чей интерес к моему результату побудил меня написать эту заметку.

Итак, мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть X – гладкое проективное многообразие размерности n с циклической группой Нерона–Севери, а Q – гладкая n -мерная квадратика (причем $n \geq 3$). Тогда степень морфизма $f: X \rightarrow Q$ ограничена сверху некоторой функцией дискретных инвариантов X .

А именно, обозначим L обильный дивизор, класс которого порождает $NS(X)$, и пусть k, r таковы, что $K_X \equiv kL$, а rL очень обилен. Если теперь m такое, что $f^* \mathcal{O}_Q(1) \equiv mL$, то $m < 2k + (2n + 5)r$ при $n \geq 4$ и $m < 3k + 16r$ при $n = 3$.

Очевидно, степень f равна $m^n L^n / 2$.

Напомним, что Ванг и Мок [5] доказали ограниченность степени морфизма между многообразиями Фано с циклической группой Пикара при условии, что эти многообразия содержат рациональные кривые с тривиальным нормальным расслоением. Квадрика, очевидно, не содержит таких кривых: ее антиканонический класс для этого “слишком положителен”. Возможно, что метод Ванга и Мока неприменим, если Y – однородное многообразие. Впрочем, и наш метод, по-видимому, очень трудно (если и возможно) обобщить на другие однородные многообразия. Конечно, нам хотелось бы рассматривать эту теорему как подтверждение гипотезы о том, что степень морфизма $f: X \rightarrow Y$, где X, Y – n -мерные гладкие проективные многообразия с числом Пикара 1, причем Y – отличное от $\mathbb{P}^n$ многообразие Фано, ограничена (ср. [6; предложение 2.1], где разобран случай тривиального канонического класса Y).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $f: X \rightarrow Q$, где $NS(X) \cong \mathbb{Z}$ – морфизм; f конечен, если непостоянен. Выберем на Q достаточно общую прямую l ; пусть $S \subset Q$ – достаточно общее двумерное линейное сечение $Q \subset \mathbb{P}^{n+1}$, содержащее l (конечно, S – двумерная квадрика). Таким образом, $S = Q \cap H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_{n-2}$, где H_i – достаточно общие гиперплоскости.

Имеем $N_{l,S} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ и $N_{S,Q}|_l = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus n-2}$. Значит, точная последовательность нормальных расслоений

$$0 \rightarrow N_{l,S} \rightarrow N_{l,Q} \rightarrow N_{S,Q}|_l \rightarrow 0$$

расщепляется. Обозначим $C = f^{-1}l$ и $M = f^{-1}S$. Поскольку l и S достаточно общие, C и M являются гладкими по клеймановскому варианту теоремы Бертини (см., например, [7; глава III.10]). Так как точная последовательность нормальных расслоений

$$0 \rightarrow N_{C,M} \rightarrow N_{C,X} \rightarrow N_{M,X}|_C \rightarrow 0$$

– это просто обратный образ соответствующей последовательности на Q , то она тоже расщепляется. Поэтому индуцированное отображение $\alpha: H^0(C, N_{C,X}) \rightarrow H^0(C, N_{M,X}|_C)$ сюръективно.

В частности, $\text{Im}(\alpha)$ содержит образ отображения ограничения

$$\beta: H^0(M, N_{M,X}) \rightarrow H^0(C, N_{M,X}|_C).$$

Это можно проинтерпретировать так: любая инфинитезимальная деформация M в X содержит некоторую инфинитезимальную деформацию C . То есть, класс C в $H^{1,1}(M)$ является “инфинитезимально неподвижным” (“infinitesimally fixed”) в терминологии Карлсона, Грина, Гриффитса и Харриса [8].

Напомним, что известные различные результаты – аналоги “инфинитезимальной теоремы Нётера–Лешца”; они утверждают, что если M достаточно обильно на X , то любой инфинитезимально неподвижный класс в $H^{1,1}(M)$ есть ограничение некоторого $(1, 1)$ -класса с X . Наш $(1, 1)$ -класс $[C]$, очевидно, не может быть ограничением класса с X : в самом деле, $N_{C,M} = \mathcal{O}_C$, т.е. $[C]^2 = 0$; но, поскольку мы предполагаем, что $NS(X) = \mathbb{Z}$, то любой $(1, 1)$ -класс с нулевым квадратом на M , являющийся ограничением $(1, 1)$ -класса с X , должен быть численно тривиальным, а это, конечно, не так для $[C]$. Таким образом, из подобных результатов следует несуществование f , в предположении, что M достаточно обилен, т.е., что $\deg(f)$ достаточно велика.

Чтобы сделать точным вышеприведенный аргумент и, тем самым, завершить доказательство теоремы, докажем следующее предложение – прямое обобщение предложения 3.4 из [9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – гладкое проективное многообразие размерности $n > 2$, а Y – гладкое полное пересечение обильных дивизоров $D_1, D_2, \dots, D_{n-2}$ на X (так что $\dim(Y) = 2$). Предположим, что существует очень обильный дивизор A такой, что

$$D_i \in |K_X + (n+1)A + B_i|,$$

$$D = D_1 + D_2 + \dots + D_{n-2} \in |nK_X + (n+1)^2A + E|,$$

где B_i и E – численно эффективны. Тогда для $Y \subset X$ выполнена инфинитезимальная теорема Нётера–Лейфшеца, т.е. любой класс типа $(1, 1)$ на Y , остающийся $(1, 1)$ -классом при всех инфинитезимальных деформациях Y в X , является ограничением некоторого класса с X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать статье [9]. Обозначим $N = \bigoplus_i \mathcal{O}_Y(D_i)$ – нормальное расслоение Y в X , так что $H^0(Y, N)$ – пространство инфинитезимальных деформаций Y в X . По теории, изложенной в [8], пространство инфинитезимально неподвижных $(1, 1)$ -классов – это ядро отображения

$$\alpha: H^1(Y, \Omega_Y^1) \xrightarrow{\gamma} H^2(Y, N^*) \xrightarrow{\beta} \text{Hom}(H^0(Y, N), H^2(Y, \mathcal{O}_Y)),$$

где γ – кограничное отображение, а β происходит из отображения умножения

$$\mu: H^0(Y, N) \otimes H^0(Y, K_Y) \rightarrow H^0(Y, N \otimes K_Y)$$

при помощи двойственности Серра. Нам достаточно убедиться в следующем:

- 1) β – вложение, другими словами, μ сюръективно;
- 2) отображение ограничения $H^1(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^1(Y, \Omega_X^1|_Y)$ сюръективно.

Для проверки сюръективности μ , достаточно проверить сюръективность каждой “компоненты”

$$\mu_i: H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D_i)) \otimes H^0(Y, K_Y) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D_i) \otimes K_Y).$$

Из резольвенты

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}_X(-D_i - D_j) \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_X(-D_i) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y \rightarrow 0 \quad (1)$$

получаем, что $H^0(X, \mathcal{O}_X(D_i) \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(D))$ сюръективно отображается на $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(D_i) \otimes K_Y)$ (в самом деле, дивизоры D_i обильны, так что это следует из теоремы Кодаиры об обращении в нуль). Значит, сюръективность μ_i получается ограничением из сюръективности соответствующих отображений умножения на X :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D_i)) \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(D) \otimes K_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(D) \otimes K_X \otimes \mathcal{O}_X(D_i)).$$

Их сюръективность, в свою очередь, сразу вытекает из теоремы 2 (случай $p = 0$) из [9]: достаточно положить, в обозначениях [9]

$$L_d = \mathcal{O}_X(D_i), \quad W = H^0(X, L_d), \quad N_f = K_X + D.$$

В самом деле, $N_f = K_X + (n+1)A + n(K_X + (n+1)A) + E$, и $n(K_X + (n+1)A)$ численно эффективен; к тому же D_i порождается глобальными сечениями, поскольку имеет вид $K_X + (n+1)A + B_i$, где A очень обилён.

Что касается сюръективности отображения ограничения из 2), из резольвенты (1) и теоремы Кодаиры об обращении в нуль следует, что достаточно проверить условие $H^{n-1}(X, \Omega_X^1(-D)) = 0$, или, по двойственности, $H^1(X, \Omega_X^{n-1}(D)) = 0$. Поскольку расслоение $\Omega_X^{n-1}(nA)$ порождено глобальными сечениями, то здесь можно применить теорему Гриффитса об обращении в нуль. Она утверждает, что если E – глобально порожденное векторное расслоение, а F – такое линейное расслоение, что $F \otimes (\det(E) \otimes K_X)^{-1}$ обильно, то $H^i(E \otimes F) = 0$ при $i > 0$. Поскольку $\det(\Omega_X^{n-1}(nA)) = n^2A + (n-1)K_X$, получим $H^1(X, \Omega_X^{n-1}(D)) = 0$ в силу нашего условия на D .

Вернемся теперь к нашей поверхности $M \subset X$, $M = D_1 \cap D_2 \cap \cdots \cap D_{n-2}$ с $D_i \in |f^* \mathcal{O}_Q(1)|$; мы видели, что для нее не выполняется инфинитезимальное условие Нётера–Лефшеца. Ясно, что как только $f^* \mathcal{O}_Q(1)$ станет достаточно обильным, дивизоры D_i будут удовлетворять обоим условиям предыдущего предложения, что приведет к противоречию. Конкретнее, предположим, что D_i имеют вид $2K_X + (2n + 5)A$ для некоторого очень обильного A ; простое вычисление (с использованием того факта, что $K_X + (n + 1)A$ всегда численно эффективен) показывает, что оба условия выполняются при любом $n \geq 4$. (Для $n = 3$ они выполнены для $D = D_1 = 3K_X + 16A$; это используется уже в [9].) Поэтому D_i не может быть “настолько обильным”; другими словами, если m таково, что $f^* \mathcal{O}_Q(1) \equiv mL$, то $m < 2k + (2n + 5)r$ при $n \geq 4$ и $m < 3k + 16r$ при $n = 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти оценки можно слегка улучшить, заметив, что поскольку X отображается на квадрику, то X не может быть проективным пространством, и если X – квадрика, то f – изоморфизм; так что мы можем предполагать, что X не является ни $\mathbb{P}^n$, ни квадрикой, а тогда уже $K_X + (n - 1)A$ (вместо $K_X + (n + 1)A$) численно эффективен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Kobayashi, T. Ochiai, *Invent. Math.*, **31** (1975), 7–16. [2] J.-M. Hwang, N. Mok, *Math. Z.*, **238**:1 (2001), 89–100. [3] C. Schuhmann, *Math. Ann.*, **306**:3 (1996), 571–581. [4] E. Amerik, *Compositio Math.*, **112**:3 (1998), 255–271. [5] J.-M. Hwang, N. Mok, *J. Algebraic Geom.*, **12**:4 (2003), 627–651. [6] E. Amerik, M. Rovinsky, A. Van de Ven, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **49**:2 (1999), 405–415. [7] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977. [8] J. Carlson, M. Green, Ph. Griffiths, J. Harris, *Compositio Math.*, **50** (1983), 109–205. [9] L. Ein, R. Lazarsfeld, *Inv. Math.*, **111** (1993), 51–67.

Е. Ю. Америк

Независимый московский университет

E-mail: amerik@mccme.ru

Поступило

14.11.2006