Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Могилевский, Описание спектральных функций дифференциального оператора с произвольными индексами дефекта, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 625–630

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 13:02:25

Описание спектральных функций дифференциального оператора с произвольными индексами дефекта

В. И. Могилевский

1. Введение. Пусть L_0 – минимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением четного порядка на полусоси. В работах [1], [2] получено описание всех спектральных функций оператора L_0 с максимальными индексами дефекта.

В настоящей заметке приводится формула для характеристических функций (х.ф.) оператора L_0 , аналогичная по форме известной формуле Крейна для резольвент. Эта формула (см. (6)) позволяет описывать все спектральные функции дифференциального оператора с произвольными (возможно, неравными) индексами дефекта посредством параметра τ неванлинновского типа. Кроме того, в заметке развиваются результаты работ [1], [2] для случая максимальных дефектов. Именно, мы показываем, что в этом случае все х.ф. описываются с помощью дробно-линейного преобразования параметра τ ; при этом матрица коэффициентов такого преобразования удовлетворяет соотношениям, аналогичным таковым для матрицы Невалинны в проблеме моментов (см. (15), (19)).

Отметим, что результаты заметки доказаны с использованием развитого Деркачем и Маламудом метода исследования расширений симметрического оператора с равными индексами дефекта $n_+ = n_-$ посредством граничных троек и соответствующих им формул для резольвент [3], а также полученного в [4], [5] обобщения этого метода на случай $n_+ \neq n_-$.

2. Предварительные сведения. Пусть $\mathfrak{H}, \mathcal{H}$ – гильбертовы пространства, $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$ (соответственно $[\mathfrak{H}]$) – множество ограниченных операторов из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ (соответственно в $\mathfrak{H}$), P_L – ортопроектор на подпространство L в $\mathfrak{H}$, $\mathcal{C}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ (соответственно $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$) – множество замкнутых линейных отношений в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ (соответственно в $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$), $\mathbb{C}_+$ ($\mathbb{C}_-$) – верхняя (нижняя) полуплоскость комплексной плоскости. Для $T \in \mathcal{C}(\mathfrak{H})$ положим $\mathcal{D}(T)$ – область определения отношения T , $\rho(T)$ и $\tilde{\rho}(T)$ – его резольвентное множество и поле регулярности соответственно.

Пусть $\mathcal{H}_1$ – подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}_0$, $\tau_+(\cdot): \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ – голоморфная функция. Тогда имеет место представление

$$\tau_+(\lambda) = \{K_0(\lambda), K_1(\lambda); H_+\} := \{\{K_0(\lambda)h_+, K_1(\lambda)h_+\} : h_+ \in H_+\}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (1)$$

в котором H_+ – (вспомогательное) гильбертово пространство, $K_j(\cdot): \mathbb{C}_+ \rightarrow [H_+, \mathcal{H}_j]$, $j \in \{0, 1\}$, – голоморфные оператор-функции. В работе [4] введены классы $\tilde{R}_+(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ и $\tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ функций $\tau_+(\cdot)$ и описаны их свойства в терминах представления (1). В случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 := \mathcal{H}$ класс $\tilde{R}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}) := \tilde{R}_+(\mathcal{H})$ совпадает с множеством функций $\tau_+(\lambda)$ таких, что $\text{Im } \tau_+(\lambda) \geq 0$ и $-i \in \rho(\tau_+(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Кроме того, класс $\tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ является некоторым подклассом констант $\tau_+ \in \mathcal{C}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, причем $\tau_+ = \tau_+^*$ в случае $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1 := \mathcal{H}$.

Пусть A – замкнутый плотно заданный симметрический оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{N}_\lambda(A) = \text{Ker}(A^* - \lambda)$ и $n_\pm(A) = \dim \mathfrak{N}_\lambda(A)$, $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$, – его дефектные подпространства и индексы дефекта соответственно. Как известно, оператор-функция $\mathbb{R}_\lambda: \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_- \rightarrow [\mathfrak{H}]$ (соответственно $\Sigma(t): \mathbb{R} \rightarrow [\mathfrak{H}]$) называется *обобщенной резольвентой* (соответственно *обобщенным разложением единицы*) оператора A , если существуют гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}} \supset \mathfrak{H}$ и самосопряженный оператор $\tilde{A}$ в $\tilde{\mathfrak{H}}$ такие, что $A \subset \tilde{A}$ и $\mathbb{R}_\lambda = P_{\tilde{\mathfrak{H}}}(\tilde{A} - \lambda)^{-1} | \mathfrak{H}$ (соответственно $\Sigma(t) = P_{\tilde{\mathfrak{H}}} \tilde{E}(t) | \mathfrak{H}$, где $\tilde{E}(t)$ – ортогональное разложение единицы оператора $\tilde{A}$ в $\tilde{\mathfrak{H}}$). При этом биективное соответствие между функциями $\Sigma(\cdot)$ и $\mathbb{R}_\lambda$ задается равенством $\mathbb{R}_\lambda = \int_{\mathbb{R}} (t - \lambda)^{-1} d\Sigma(t)$.

Напомним, далее, некоторые факты из [5]. Пусть $\mathcal{H}_1$ – подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$. Обозначим через P_j ортопроектор в $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}_j$, $j \in \{1, 2\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой Γ_j – линейные операторы из $\mathcal{D}(A^*)$ в $\mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$, называется *граничной D -тройкой* (или просто *D -тройкой*) для A^* , если оператор $\Gamma = (\Gamma_0 \Gamma_1)^\top : \mathcal{D}(A^*) \rightarrow \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ сюръективен и справедливо тождество Грина

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g) - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g) + i(P_2 \Gamma_0 f, P_2 \Gamma_0 g), \quad f, g \in \mathcal{D}(A^*).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5]. *Функцией Вейля*, соответствующей D -тройке $\Pi = \{\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для A^* , называется оператор-функция $M_+(\cdot) : \mathbb{C}_+ \rightarrow [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1]$, определенная равенством

$$\Gamma_1 \mid \mathfrak{N}_\lambda(A) = M_+(\lambda) \Gamma_0 \mid \mathfrak{N}_\lambda(A), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

3. Характеристические функции. Пусть $[0, b)$, $b \leq \infty$, – некоторый промежуток (в случае $b < \infty$ включение $b \in [0, b)$ может выполняться или нет), H – сепарабельное гильбертово пространство ($\dim H \leq \infty$), $\mathfrak{H} := L_2([0, b); H)$ – гильбертово пространство вектор-функций $f : [0, b) \rightarrow H$ с суммируемым квадратом нормы.

Рассмотрим формально-самосопряженное дифференциальное выражение порядка $2n$

$$l[y] = \sum_{k=1}^n (-1)^k \{ (p_{n-k} y^{(k)})^{(k)} - i[(q_{n-k} y^{(k)})^{(k-1)} + (q_{n-k} y^{(k-1)})^{(k)}] \} + p_n y, \quad (2)$$

в котором $p_k(\cdot) : [0, b) \rightarrow [H]$, $q_k(\cdot) : [0, b) \rightarrow [H]$ – оператор-функции класса $C^{n-k}([0, b))$, $0 \in \rho(p_0(t))$ для всех $t \in [0, b)$. Пусть $y^{[k]}$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, – квазипроизводные выражения (2) [6], [7], $\mathcal{D}_l$ – множество функций $y(\cdot) : [0, b) \rightarrow H$, для которых $l[y]$ имеет смысл, $\mathcal{D}_l(\mathcal{H})$ – множество оператор-функций $Y(\cdot) : [0, b) \rightarrow [\mathcal{H}, H]$ таких, что для всех $h \in \mathcal{H}$ $y(t) := Y(t)h \in \mathcal{D}_l$ (здесь $\mathcal{H}$ – некоторое гильбертово пространство). Всякому $y \in \mathcal{D}_l$ и $Y \in \mathcal{D}_l(\mathcal{H})$ сопоставим функции $y^{(j)}(\cdot) : [0, b) \rightarrow H^n$, $Y^{(j)}(\cdot) : [0, b) \rightarrow [\mathcal{H}, H^n]$, $j \in \{1, 2\}$, полагая

$$y^{(1)}(t) = \{y^{[k-1]}(t)\}_{k=1}^n, \quad y^{(2)}(t) = \{y^{[2n-k]}(t)\}_{k=1}^n, \\ Y^{(j)}(t)h = (Y(t)h)^{(j)}, \quad h \in \mathcal{H}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Обозначим через L_0 и L соответственно минимальный и максимальный операторы в $\mathfrak{H}$, порожденные выражением (2). Положим также $\mathcal{D} := \mathcal{D}(L)$. Как известно, L_0 – плотно заданный симметрический оператор и $L_0^* = L$.

Пусть, далее, $B = B^* \in [H^n]$ – некоторый оператор, $\varphi(t, \lambda), \psi(t, \lambda) : [0, b) \rightarrow [H^n, H]$ – операторные решения уравнения $ly - \lambda y = 0$ с начальными условиями

$$\varphi^{(1)}(0, \lambda) = \sin B, \quad \varphi^{(2)}(0, \lambda) = -\cos B, \quad \psi^{(1)}(0, \lambda) = \cos B, \quad \psi^{(2)}(0, \lambda) = \sin B.$$

Обозначим через L_B^* и L_B расширения L_0 с областями определения

$$\mathcal{D}(L_B^*) = \{y \in \mathcal{D} : \cos B y^{(1)}(0) + \sin B y^{(2)}(0) = 0\}, \\ \mathcal{D}(L_B) = \{y \in \mathcal{D}(L_B^*) : [y, z](b) = 0, \quad z \in \mathcal{D}\},$$

где

$$[y, z](b) = \lim_{t \rightarrow b-0} ((y^{(1)}(t), z^{(2)}(t))_{H^n} - (y^{(2)}(t), z^{(1)}(t))_{H^n}), \quad y, z \in \mathcal{D}.$$

Тогда L_B – симметрический оператор, а L_B^* – оператор, сопряженный к L_B . Всюду далее предполагаем, что $n_-(L_B) \leq n_+(L_B)$ или, эквивалентно, $n_-(L_0) \leq n_+(L_0)$.

ЛЕММА 3. Существуют гильбертово пространство $\mathcal{H}_0$, подпространство $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_0$ и операторы $\Gamma_j: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}_j$, $j \in \{0, 1\}$, такие, что D -тройкой для L является совокупность

$$\tilde{\Pi} = \{(H^n \oplus \mathcal{H}_0) \oplus (H^n \oplus \mathcal{H}_1), \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\},$$

в которой для всякого $y \in \mathcal{D}$

$$\tilde{\Gamma}_0 y = \{\cos By^{(1)}(0) + \sin By^{(2)}(0), \Gamma_0 y\}, \quad \tilde{\Gamma}_1 y = \{-\sin By^{(1)}(0) + \cos By^{(2)}(0), \Gamma_1 y\}. \quad (3)$$

Пусть функция Вейля $M_+(\cdot)$ для D -тройки (3) имеет блочное представление

$$M_+(\lambda) = \begin{pmatrix} M_1(\lambda) & M_2(\lambda) \\ M_3(\lambda) & M_4(\lambda) \end{pmatrix} : H^n \oplus \mathcal{H}_0 \rightarrow H^n \oplus \mathcal{H}_1, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (4)$$

Формула (4) задает оператор-функции $M_j(\cdot)$, $j = 1 \div 4$, определенные в $\mathbb{C}_+$. В следующем предложении раскрывается смысл этих функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $M_+(\cdot)$ – функция Вейля (4), $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_0 \ominus \mathcal{H}_1$, P_j – орто-проектор в $\mathcal{H}_0$ на $\mathcal{H}_j$, $j \in \{1, 2\}$. Тогда

1) функция $M_1(\cdot)$ однозначно определяется следующими соотношениями: если

$$v_0(t, \lambda) := -\varphi(t, \lambda)M_1(\lambda) + \psi(t, \lambda),$$

то $v_0(t, \lambda)\hat{h} \in \mathfrak{H}$ и $\Gamma_0(v_0(t, \lambda)\hat{h}) = 0$ для всех $\hat{h} \in H^n$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$; кроме того, $\text{Im } M_1(\lambda) \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$;

2) оператор-функции $M_2(\cdot)$ и $M_3(\cdot)$ однозначно определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi(t, \lambda)M_2(\lambda)h_0 &\in \mathfrak{H}, & \Gamma_0(-\varphi(t, \lambda)M_2(\lambda)h_0) &= h_0, & h_0 &\in \mathcal{H}_0, & \lambda &\in \mathbb{C}_+, \\ \varphi(t, \bar{\lambda})M_3^*(\lambda)h_1 &\in \mathfrak{H}, & P_1\Gamma_0(-\varphi(t, \bar{\lambda})M_3^*(\lambda)h_1) &= h_1, & h_1 &\in \mathcal{H}_1, & \lambda &\in \mathbb{C}_+. \end{aligned}$$

Отметим также, что функция $M_4(\lambda)$ выражается в явном виде через $M_2(\lambda)$ и операторные решения $\varphi(t, \lambda)$, $\psi(t, \lambda)$ (соответствующие формулы не выписаны ввиду недостатка места).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть выполнены условия предложения 4. Тогда

1) для любой функции $\tau_+(\cdot) \in \tilde{R}_+(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ существует единственная оператор-функция $\Phi_\tau(\cdot): \mathbb{C}_+ \rightarrow [H^n]$ такая, что оператор-функция

$$v_\tau(t, \lambda) := -\varphi(t, \lambda)\Phi_\tau(\lambda) + \psi(t, \lambda), \quad t \in [0, b], \quad (5)$$

удовлетворяет следующим соотношениям для всех $\hat{h} \in H^n$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$:

- а) $v_\tau(t, \lambda)\hat{h} \in \mathfrak{H}$;
- б) $\{\Gamma_0(v_\tau(t, \lambda)\hat{h}), \Gamma_1(v_\tau(t, \lambda)\hat{h})\} \in -\tau_+(\lambda)$;

2) верно неравенство $\text{Im } \Phi_\tau(\lambda) \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Оператор-функцию $\Phi_\tau(\cdot)$ из предложения 5 назовем *характеристической функцией (х.ф.)* оператора L_B , соответствующей параметру $\tau_+ \in \tilde{R}_+(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

В следующей теореме описываются все х.ф. и обобщенные резольвенты оператора L_B .

ТЕОРЕМА 7. Пусть (4) – блочное представление функции Вейля для D -тройки (3). Тогда

1) равенство

$$\Phi_\tau(\lambda) = M_1(\lambda) - M_2(\lambda)K_0(\lambda)(K_1(\lambda) + M_4(\lambda)K_0(\lambda))^{-1}M_3(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (6)$$

задает биективное соответствие между х.ф. $\Phi_\tau(\cdot)$ оператора L_B и функциями $\tau_+(\cdot) \in \tilde{R}_+(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$, представленными в виде (1);

2) равенство

$$(\mathbb{R}_\lambda f)(x) = \int_0^b K_\tau(x, t, \lambda) f(t) dt, \quad f = f(\cdot) \in \mathfrak{H}, \quad (7)$$

где $K_\tau(x, t, \lambda): [0, b] \times [0, b] \rightarrow [H]$ – операторное ядро вида

$$K_\tau(x, t, \lambda) = \begin{cases} -v_\tau(x, \lambda)\varphi^*(t, \bar{\lambda}), & x > t, \\ -\varphi(x, \lambda)v_\tau^*(t, \bar{\lambda}), & x < t, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-, \quad (8)$$

$v_\tau(\cdot, \lambda)$ – оператор-функция (5), задает биективное соответствие между обобщенными резольвентами $\mathbb{R}_\lambda$ оператора L_B и функциями $\tau_+(\cdot) \in \tilde{R}_+(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. При этом каноническим резольвентам в (7), (8) отвечают константы $\tau_+ \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$.

4. Разложения по собственным функциям. Х.ф. и обобщенные резольвенты оператора L_B естественно возникают в теории разложения по собственным функциям дифференциальных операторов. Напомним в этой связи некоторые определения.

Пусть $\mathcal{H}'$ – гильбертово пространство. Неубывающая оператор-функция $F(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow [\mathcal{H}']$ называется *распределением*, если она сильно непрерывна слева на $\mathbb{R}$ и $F(0) = 0$. Как известно, всякое распределение $F(\cdot)$ порождает гильбертово пространство $L_2(F, \mathcal{H}')$ [8].

Пусть, далее, $\mathfrak{H}_0$ – линейал финитных в точке b функций $f \in \mathfrak{H}$. Каждой функции $f(\cdot) \in \mathfrak{H}_0$ поставим в соответствие вектор-функцию $g_f(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow H^n$, полагая

$$g_f(\lambda) = \int_0^b \varphi^*(t, \lambda) f(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Распределение $F(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow [H^n]$ называется *спектральной функцией* оператора L_B , соответствующей его разложению единицы $\Sigma(t)$, если для любого промежутка $[\alpha, \beta]$ выполняется равенство

$$((\Sigma(\beta) - \Sigma(\alpha))f, f) = \int_{[\alpha, \beta]} (dF(\lambda)g_f(\lambda), g_f(\lambda)), \quad f \in \mathfrak{H}_0. \quad (10)$$

Если $F(\cdot)$ – спектральная функция, то в силу (10) для всех $f \in \mathfrak{H}_0$ $g_f \in L_2(F, H^n)$ и справедливо равенство Парсеваля

$$(\|f\|_{\mathfrak{H}})^2 = \int_0^b \|f(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (dF(\lambda)g_f(\lambda), g_f(\lambda)) \quad (= \|g_f\|_{L_2(F, H^n)}^2), \quad f \in \mathfrak{H}_0. \quad (11)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Спектральная функция $F(\cdot)$ называется *ортгональной*, если множество $\{g_f : f \in \mathfrak{H}_0\}$ всюду плотно в $L_2(F, H^n)$.

В следующей теореме приводится описание всех спектральных функций оператора L_B .

ТЕОРЕМА 10. 1) Любому разложению единицы оператора L_B соответствует единственная спектральная функция.

2) В условиях теоремы 7 формула (6) совместно с равенством

$$F(\lambda) = s - \lim_{\delta \rightarrow +0} w - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{-\delta}^{\lambda - \delta} \operatorname{Im} \Phi_\tau(t + i\varepsilon) dt \quad (12)$$

задают биективное соответствие между спектральными функциями $F(\cdot)$ оператора L_B и функциями $\tau_+(\cdot) \in \tilde{R}_+(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$. При этом ортогональным спектральным функциям в формулах (6) и (12) соответствуют константы $\tau_+ \in \tilde{R}^0(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ (что возможно лишь в случае $n_+(L_0) = n_-(L_0)$).

5. Матрица $W_+(\lambda)$. Пусть $\rho(L_B, H)$ – множество всех точек $\lambda \in \widehat{\rho}(L_B)$ таких, что $\varphi(t, \bar{\lambda})\widehat{h} \in \mathfrak{H}$ для всех $\widehat{h} \in H^n$. Можно показать, что $\rho(L_B, H)$ – открытое множество и $\psi(t, \bar{\lambda})\widehat{h} \in \mathfrak{H}$ для всех $\lambda \in \rho(L_B, H)$, $\widehat{h} \in H^n$. Введем, далее, оператор-функции $\varphi(\cdot), \psi(\cdot): \rho(L_B, H) \rightarrow [\mathfrak{H}, H^n]$, полагая (интегралы понимаются в смысле слабой сходимости)

$$\varphi(\lambda)f = \int_0^b \varphi^*(t, \bar{\lambda})f(t) dt, \quad \psi(\lambda)f = \int_0^b \psi^*(t, \bar{\lambda})f(t) dt, \quad f = f(t) \in \mathfrak{H}, \quad \lambda \in \rho(L_B, H).$$

ТЕОРЕМА 11. Пусть $\widetilde{\Pi}$ – D -тройка (3) для L , $M_+(\cdot)$ – соответствующая функция Вейля (4), $G_1 := \Gamma_1 + i P_2 \Gamma_0$, $G_0 := P_1 \Gamma_0$, $W_+(\lambda)$, $\lambda \in \rho(L_B, H)$, – оператор-функция вида

$$W_+(\lambda) = \begin{pmatrix} w_1(\lambda) & w_2(\lambda) \\ w_3(\lambda) & w_4(\lambda) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} G_1 \varphi^*(\lambda) & G_1 \psi^*(\lambda) \\ G_0 \varphi^*(\lambda) & G_0 \psi^*(\lambda) \end{pmatrix}^* : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \rightarrow H^n \oplus H^n. \quad (13)$$

Тогда

1) если $\lambda \in \rho(L_B, H) \cap \mathbb{C}_+$, то $0 \in \rho(M_3(\lambda))$ и справедливо равенство

$$W_+(\lambda) = \begin{pmatrix} M_3^{-1}(\lambda)M_4(\lambda) & M_3^{-1}(\lambda) \\ M_1(\lambda)M_3^{-1}(\lambda)M_4(\lambda) - M_2(\lambda) & M_1(\lambda)M_3^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \rho(L_B, H) \cap \mathbb{C}_+; \quad (14)$$

2) имеет место тождество

$$W_+(\lambda)J_+W_+^*(\mu) = J + i(\lambda - \bar{\mu})\chi(\lambda)\chi^*(\mu), \quad \lambda, \mu \in \rho(L_B, H), \quad (15)$$

где $\chi(\lambda) = (\varphi(\lambda)\psi(\lambda))^\top$,

$$J_+ = \begin{pmatrix} P_2 & iI_{\mathcal{H}_1} \\ -iP_1 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \\ J = \begin{pmatrix} 0 & iI_{H^n} \\ -I_{H^n} & 0 \end{pmatrix} : H^n \oplus H^n \rightarrow H^n \oplus H^n.$$

В следующей теореме дается описание х.ф. $\Phi_\tau(\cdot)$ в форме, отличной от (6).

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\rho(L_B, H) \neq \emptyset$ и $W_+(\cdot)$ – матрица (13). Тогда формула

$$\Phi_\tau(\lambda) = (w_3(\lambda)K_0(\lambda) + w_4(\lambda)K_1(\lambda))(w_1(\lambda)K_0(\lambda) + w_2(\lambda)K_1(\lambda))^{-1}, \quad (16)$$

в которой $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cap \rho(L_B, H)$, задает биективное соответствие между х.ф. $\Phi_\tau(\cdot)$ оператора L_B и функциями $\tau_+(\cdot) \in \widetilde{R}_+(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ вида (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Пусть D -тройка

$$\widetilde{\Pi} = \{(H^n \oplus \mathcal{H}_0) \oplus (H^n \oplus \mathcal{H}_1), \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$$

вида (3) удовлетворяет условию $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 := \mathcal{H}$. Тогда совокупность $\widetilde{\Pi}' := \{H^n \oplus \mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_0, \widetilde{\Gamma}_1\}$ является граничной тройкой (пространством граничных значений) для L [9], а функция (4) совпадает с соответствующей функцией Вейля в смысле [3]. В этом случае х.ф. $\Phi_\tau(\cdot)$ описываются формулами (6), (16), в которых

$$\{K_0(\lambda), K_1(\lambda); H_+\} = \tau(\lambda) \in \widetilde{R}_+(\mathcal{H}).$$

В случае $\rho(L_B, H) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ матрица $W_+(\cdot)$ выписывается в явном виде. Именно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. Пусть $a = \bar{a} \in \rho(L_B, H)$. Тогда

1) существуют слабые пределы

$$\Gamma_0 y := w - \lim_{t \rightarrow b-0} (\psi^{(1)*}(t, a)y^{(2)}(t) - \psi^{(2)*}(t, a)y^{(1)}(t)) \quad (\in H^n), \quad y \in \mathcal{D}, \quad (17)$$

$$\Gamma_1 y := w - \lim_{t \rightarrow b-0} (\varphi^{(1)*}(t, a)y^{(2)}(t) - \varphi^{(2)*}(t, a)y^{(1)}(t)) \quad (\in H^n), \quad y \in \mathcal{D}; \quad (18)$$

2) формулы (3) с операторами $\Gamma_j: \mathcal{D} \rightarrow H^n$, $j \in \{0, 1\}$ вида (17), (18) задают граничную тройку $\tilde{\Pi} = \{H^n \oplus H^n, \tilde{\Gamma}_0, \tilde{\Gamma}_1\}$ для L с соответствующей матрицей (13), элементы которой имеют вид (интегралы понимаются в смысле слабой операторной сходимости)

$$w_1(\lambda) = (\lambda - a) \int_0^b \varphi^*(t, \bar{\lambda}) \varphi(t, a) dt, \quad w_2(\lambda) = I + (\lambda - a) \int_0^b \varphi^*(t, \bar{\lambda}) \psi(t, a) dt, \quad (19)$$

$$w_3(\lambda) = -I + (\lambda - a) \int_0^b \psi^*(t, \bar{\lambda}) \varphi(t, a) dt, \quad w_4(\lambda) = (\lambda - a) \int_0^b \psi^*(t, \bar{\lambda}) \psi(t, a) dt. \quad (20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Пусть при некоторых $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda = \bar{\lambda}_0$ сходятся интегралы

$$\int_0^b \|\varphi(t, \lambda)\|^2 dt, \quad \int_0^b \|\psi(t, \lambda)\|^2 dt.$$

Тогда эти интегралы сходятся при всех λ (т.е. имеет место АН-случай в терминологии [1]) и $\rho(L_B, H) = \mathbb{C}$. Если $\dim H < \infty$, то АН-случай равносильным эквивалентным условиям $\rho(L_B, H) \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho(L_B, H) = \mathbb{C} \Leftrightarrow n_+(L_0) = n_-(L_0) = 2n \dim H$.

Для АН-случая аналоги формул (16) и (19), (20) при $a \neq \bar{a}$ получены в [1]. Отметим в этой связи, что не вещественность a в (19) не позволяет задать в удобном виде параметр $\tau_+(\lambda)$ в (16) (см. [1]). В работе [2] для АН-случая получена граничная тройка (17), (18) и соответствующая матрица $W(\lambda)$ в виде (13); там же формулой (16) описаны ортогональные х.ф., отвечающие параметру $\tau = \tau^* = \text{const}$.

Отметим в заключение, что в случае $\dim H = \infty$ условие $\rho(L_B, H) \neq \emptyset$ не равносильно АН-случаю; поэтому в случае $\rho(L_B, H) \neq \emptyset$ теорему 12 можно рассматривать как обобщение результатов работ [1], [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М.Л. Горбачук, *Укр. матем. журн.*, **18:2** (1966), 3–21. [2] А.М. Холькин, *Теория функций, функцион. анализ и их прилож.*, **44** (1985), 112–122. [3] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *J. Func. Anal.*, **95:1** (1991), 1–95. [4] V. Mogilevskii, *Methods Funct. Anal. Topology*, **12:1** (2006), 38–56. [5] V. Mogilevskii, *Methods Funct. Anal. Topology*, **12:3** (2006), 258–280. [6] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969. [7] Ф. С. Рофе-Бекетов, *Теория функций, функцион. анализ и их прилож.*, **8** (1969), 3–24. [8] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965. [9] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*, Наукова думка, Киев, 1984.

В. И. Могилевский

Луганский национальный

педагогический университет, Украина

E-mail: vim@mail.dsip.net

Поступило

20.09.2006