Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Пастухова, С. В. Тихомирова, Эллиптическое уравнение с несимметрической матрицей. Усреднение “вариационных решений”, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 631–635

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 15:09:33

Эллиптическое уравнение с несимметрической матрицей. Усреднение “вариационных решений”

С. Е. Пастухова, С. В. Тихомирова

1. Рассмотрим стационарное уравнение диффузии во всем пространстве

$$u^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad -\operatorname{div}(\nabla u^\varepsilon + B(\varepsilon^{-1}x)\nabla u^\varepsilon) + u^\varepsilon = f \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad (1)$$

где $B(y)$ – измеримая кососимметрическая периодическая матрица с ячейкой периодичности $\square = [-1/2, 1/2]^n$. Под решением задачи (1) понимается функция u^ε , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(\varepsilon^{-1}x)\nabla u^\varepsilon \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u^\varepsilon \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (2)$$

где $A(y) = \mathbf{1} + B(y)$, $\mathbf{1}$ – единичная матрица. Данное определение имеет смысл, если $B \in L^2_{\text{per}}(\square)$. Это же условие обеспечивает существование решения, но не единственность. Доказательство разрешимости можно провести с помощью аппроксимации

$$B_N \in L^\infty_{\text{per}}(\square), \quad B_N \rightarrow B \quad \text{в } L^2_{\text{per}}(\square), \quad B_N \text{ кососимметрична.} \quad (3)$$

С матрицей B_N (вместо B) уравнение (1) разрешимо, последовательность его решений $u_N = u_N^\varepsilon$ равномерно ограничена в $H^1(\mathbb{R}^n)$, и можно считать, что $u_N \rightharpoonup u$ в $H^1(\mathbb{R}^n)$. Переход к пределу в интегральном тождестве показывает, что u – решение исходного уравнения (1). Видим, что процедура аппроксимации (3) всякий раз приводит к решению задачи, которое принято называть *аппроксимационным*. Условие $B \in L^2_{\text{per}}(\square)$ не гарантирует единственности аппроксимационного решения. Кроме того, помимо аппроксимационных могут существовать другие решения, которые нельзя получить путем аппроксимаций. Пример уравнения типа (1) с подобного рода решением построен в [1].

В связи с неединственностью решения задачи (1) в работе [1] рассматривался особый способ однозначного выделения решения для уравнения типа (1), названный *вариационным*. Он заключается в следующем. Вводится операторная система

$$\begin{aligned} -\Delta u_1^\varepsilon + S u_2^\varepsilon + u_1^\varepsilon &= f_1, \\ -\Delta u_2^\varepsilon - S^* u_1^\varepsilon + u_2^\varepsilon &= f_2, \end{aligned} \quad u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad (4)$$

где оператор S , действующий из $H^1(\mathbb{R}^n)$ в $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$, определен сначала равенством

$$(Su, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} B \nabla u \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad (5)$$

для произвольной $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а затем продолжен до замкнутого оператора. Несмотря на то, что форма (5) кососимметрична для $u, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, оператор S не обязательно кососамосопряженный, так как области определения $D = \operatorname{dom} S$ и $D^* = \operatorname{dom} S^*$, вообще говоря, не совпадают. Однако “матричный” оператор

$$T = \begin{pmatrix} 0 & S \\ -S^* & 0 \end{pmatrix}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00621).

всегда кососамосопряжен на своей области определения $\text{dom } T = \text{dom } S^* \times \text{dom } S = D^* \times D$ для любого замкнутого оператора S , в результате чего система (4) однозначно разрешима. В самом деле, ее можно записать в виде операторного уравнения

$$(I + T) \begin{pmatrix} u_1^\varepsilon \\ u_2^\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

где $I = -\Delta + 1: H^1(\mathbb{R}^n)^2 \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^n)^2$, разрешимость которого нетрудно установить.

Если в (4) $f_1 = f$, $f_2 = 0$, то сумма $u_1 + u_2$ удовлетворяет тождеству (2) и, значит, является решением задачи (1). Это решение мы получили, минуя процедуру аппроксимации, и будем называть его *вариационным*.

Заметим, что решение системы (4) можно задать условиями: $u_1^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $u_2^\varepsilon \in D$ и выполнено интегральное тождество

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u_1^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_1 + u_1^\varepsilon \varphi_1) dx + \int_{\mathbb{R}^n} B \nabla u_2^\varepsilon \nabla \varphi_1 dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 \varphi_1 dx, \\ \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u_2^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_2 + u_2^\varepsilon \varphi_2) dx + \int_{\mathbb{R}^n} B \nabla u_1^\varepsilon \nabla \varphi_2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_2 \varphi_2 dx, \end{cases} \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (6)$$

В самом деле, в силу тождества (6)₂ $u_1^\varepsilon \in D^*$ и

$$\int_{\mathbb{R}^n} B \nabla u_1^\varepsilon \nabla \varphi_2 dx = -(S^* u_1^\varepsilon, \varphi_2),$$

поэтому систему (6) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u_1^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_1 + u_1^\varepsilon \varphi_1) dx + (S u_2^\varepsilon, \varphi_1) = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 \varphi_1 dx, \\ \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u_2^\varepsilon \cdot \nabla \varphi_2 + u_2^\varepsilon \varphi_2) dx + (-S^* u_1^\varepsilon, \varphi_2) = \int_{\mathbb{R}^n} f_2 \varphi_2 dx, \end{cases} \quad (7)$$

причем в такой записи системы допускаются пробные функции $\varphi_1 \in D$, $\varphi_2 \in D^*$.

2. Теперь обратимся к задаче усреднения для уравнения (1). В условиях неоднозначной разрешимости будем для каждого ε выделять его вариационное решение u^ε указанным выше способом. Наша цель – найти предел последовательности u^ε и указать уравнение, которому он удовлетворяет. Ясно, что для этого необходимо изучить процедуру усреднения для системы вида (4). Только этим вопросом мы далее и занимаемся, выделив его в отдельный объект исследования.

Разберем формальную процедуру усреднения для системы уравнений (4). Справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Решение задачи (4) существует, единственно и удовлетворяет равномерной по ε оценке*

$$\|u_1^\varepsilon\|_{H^1}^2 + \|u_2^\varepsilon\|_{H^1}^2 \leq \|f_1\|_{L^2}^2 + \|f_2\|_{L^2}^2.$$

Будем искать приближение к вариационному решению в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^\varepsilon(x) &\equiv \bar{u}_1(x, y) = u_1^0(x) + \varepsilon v_1(x, y), \\ \bar{u}_2^\varepsilon(x) &\equiv \bar{u}_2(x, y) = u_2^0(x) + \varepsilon v_2(x, y), \end{aligned} \quad y = \varepsilon^{-1}x. \quad (8)$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \nabla \bar{u}_1 + B \nabla \bar{u}_2 = \nabla u_1^0 + \nabla_y v_1 + B(\nabla u_2^0 + \nabla_y v_2) + \varepsilon(\nabla_x v_1 + B \nabla_x v_2), \\ I_2 &\equiv \nabla \bar{u}_2 + B \nabla \bar{u}_1 = \nabla u_2^0 + \nabla_y v_2 + B(\nabla u_1^0 + \nabla_y v_1) + \varepsilon(\nabla_x v_2 + B \nabla_x v_1), \end{aligned} \quad (9)$$

и после подстановки (8) в (4) получаем следующие невязки в уравнениях:

$$\begin{cases} \varepsilon^{-1} \text{div}_y [\nabla_y v_1 + B(\nabla u_2^0 + \nabla_y v_2)] + \text{div}_x [\nabla u_1^0 + \nabla_y v_1 + B(\nabla u_2^0 + \nabla_y v_2)] \\ \quad + \varepsilon \text{div}(\nabla v_1 + B \nabla_x v_2) + u_1^0 + \varepsilon v_1 - f_1, \\ \varepsilon^{-1} \text{div}_y [\nabla_y v_2 + B(\nabla u_1^0 + \nabla_y v_1)] + \text{div}_x [\nabla u_2^0 + \nabla_y v_2 + B(\nabla u_1^0 + \nabla_y v_1)] \\ \quad + \varepsilon \text{div}(\nabla v_2 + B \nabla_x v_1) + u_2^0 + \varepsilon v_2 - f_2. \end{cases} \quad (10)$$

Отсюда, приравнявая выражения при ε^{-1} к нулю, получаем задачу на ячейке периодичности относительно $v_1(x, \cdot)$, $v_2(x, \cdot)$

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{div}_y [\nabla_y v_1 + B(y)(\nabla u_2^0 + \nabla_y v_2)] \equiv \operatorname{div}_y S_1(x, y), \\ 0 &= \operatorname{div}_y [\nabla_y v_2 + B(y)(\nabla u_1^0 + \nabla_y v_1)] \equiv \operatorname{div}_y S_2(x, y), \\ \langle v_1(x, \cdot) \rangle &= 0, \quad \langle v_2(x, \cdot) \rangle = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\langle \cdot \rangle = \int_{\square} \cdot dy$ – среднее по ячейке, и условия нормировки добавлены для однозначного выделения решения. Заметим, что выражения $S_1(x, \cdot)$, $S_2(x, \cdot)$ представляют собой соленоидальные векторы.

Очевидно, что вектор

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

линейно зависит от

$$\begin{pmatrix} \nabla u_1^0 \\ \nabla u_2^0 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$v_1 = N_{11}(y) \cdot \nabla u_1^0 + N_{12}(y) \cdot \nabla u_2^0, \quad v_2 = N_{21}(y) \cdot \nabla u_1^0 + N_{22}(y) \cdot \nabla u_2^0, \quad (12)$$

где N_{ij} – (2×1) -столбцы, составленные из компонент решений некоторых канонических задач вида (11), откуда следует представление

$$S_1(y, \nabla u_1^0, \nabla u_2^0) = K_{11}(y) \nabla u_1^0 + K_{12}(y) \nabla u_2^0, \quad S_2(y, \nabla u_1^0, \nabla u_2^0) = K_{21}(y) \nabla u_1^0 + K_{22}(y) \nabla u_2^0, \quad (13)$$

где $K_{ij}(y)$ – соленоидальные матрицы. По определению столбцами соленоидальной матрицы являются соленоидальные векторы.

Систему (11) можно переписать в виде уравнений

$$0 = \operatorname{div}_y [w_1 + B(y)(\eta + w_2)], \quad 0 = \operatorname{div}_y [w_2 + B(y)(\xi + w_1)], \quad \zeta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (14)$$

относительно вектора

$$w \equiv w_\zeta = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \quad w_i = \nabla_y v_i,$$

где в качестве ξ , η взяты ∇u_1^0 , ∇u_2^0 . Решение задачи (14) определяется так же, как для системы (4), через интегральные тождества типа (6), (7).

ЛЕММА 2. 1) Задача (14) однозначно разрешима.

2) Пусть $(2n \times 2n)$ -матрица A^0 определена равенством

$$A^0 \zeta = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{1} & B \\ B & \mathbf{1} \end{pmatrix} (\zeta + w_\zeta) \right\rangle \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (15)$$

где w_ζ – решение задачи (14). Тогда $A^0 \zeta \zeta \geq \zeta \cdot \zeta$.

Приравнявая к нулю выражения при нулевой степени в (10), получаем после взятия среднего по ячейке периодичности систему уравнений для u_1^0 , u_2^0 :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_x [\nabla u_1^0 + \langle S_1(x, \nabla u_1^0, \nabla u_2^0) \rangle] + u_1^0 &= f_1, \\ -\operatorname{div}_x [\nabla u_2^0 + \langle S_2(x, \nabla u_1^0, \nabla u_2^0) \rangle] + u_2^0 &= f_2, \end{aligned} \quad (16)$$

которую символически можно записать так:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_x I_1^0 + u_1^0 = f_1, \\ -\operatorname{div}_x I_2^0 + u_2^0 = f_2. \end{cases} \quad (17)$$

Возможна запись системы (16) с помощью матрицы A^0 (см. (15))

$$u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} \in H^1(\mathbb{R}^n)^2, \quad (18)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (A^0 \nabla u^0 \nabla \varphi + u^0 \cdot \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)^2,$$

где

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla u^0 = \begin{pmatrix} \nabla u_1^0 \\ \nabla u_2^0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^0 имеет положительно определенную симметрическую часть, которая только и важна в этом уравнении. Поэтому справедлива

ЛЕММА 3. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n)^2$, тогда существует и единственно решение задачи (17), причем $u^0 \in H^2(\mathbb{R}^n)^2$ и выполнена оценка

$$\|u^0\|_{H^2} \leq c \|f\|_{L^2}, \quad c = (n, \|B\|_{L^2(\square)}).$$

В принятых обозначениях (см. (9), (11), (17))

$$\begin{cases} I_1 = \nabla u_1^0 + S_1 + \varepsilon(\nabla_x v_1 + B \nabla_x v_2), \\ I_2 = \nabla u_2^0 + S_2 + \varepsilon(\nabla_x v_2 + B \nabla_x v_1), \end{cases} \quad \begin{cases} I_1^0 = \nabla u_1^0 + \langle S_1 \rangle, \\ I_2^0 = \nabla u_2^0 + \langle S_2 \rangle. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} I_1 - I_1^0 = S_1 - \langle S_1 \rangle + \varepsilon(\nabla_x v_1 + B \nabla_x v_2) = r_1, \\ I_2 - I_2^0 = S_2 - \langle S_2 \rangle + \varepsilon(\nabla_x v_2 + B \nabla_x v_1) = r_2, \end{cases} \quad (19)$$

где $S_1 - \langle S_1 \rangle$, $S_2 - \langle S_2 \rangle$ – соленоидальные по y векторы (см. (11)), имеющие нулевое среднее.

ЛЕММА 4 [2; гл. 1, § 1]. Если вектор $g \in L_{\text{per}}^2(\square)$, $\text{div } g = 0$, $\langle g \rangle = 0$, то найдется кососимметрическая матрица $G \in H_{\text{per}}^1(\square)$ такая, что $\text{div}_y G = g$.

Получаем следующее представление (см. также (13)):

$$S_1 - \langle S_1 \rangle = \Gamma_{11}(y) \nabla u_1^0 + \Gamma_{12}(y) \nabla u_2^0, \quad S_2 - \langle S_2 \rangle = \Gamma_{21}(y) \nabla u_1^0 + \Gamma_{22}(y) \nabla u_2^0, \quad (20)$$

где каждый столбец g матрицы Γ_{ij} имеет вид дивергенции от кососимметрической матрицы: $g = \text{div } G$, $G_{ij} = -G_{ji}$. Рассмотрим подробно следующие за этим преобразования в правой части (20) на примере одного из слагаемых:

$$\Gamma_{11} \nabla u_1^0 = g^k \frac{\partial u_1^0}{\partial x_k},$$

$$g^k = \text{div}_y G^k, \quad g^k \frac{\partial u_1^0}{\partial x_k} \equiv (\text{div}_y G^k) \frac{\partial u_1^0}{\partial x_k} = \varepsilon \text{div} \left(G^k \frac{\partial u_1^0}{\partial x_k} \right) - \varepsilon G^k \nabla \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_k} \right),$$

причем первое слагаемое в последней сумме есть соленоидальный вектор, что следует из кососимметричности матрицы G^k . Отсюда невязки $\text{div } r_1$, $\text{div } r_2$ (см. (19), (12)) содержат выражения вида

$$\varepsilon \text{div} \left(G^j(y) \nabla \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} \right) \right), \quad \varepsilon \text{div}(\nabla^2 u_i^0 N_{ij}(y)), \quad \varepsilon \text{div}(B(y) \nabla^2 u_i^0 N_{ij}(y)). \quad (21)$$

Введем следующее основное предположение:

$$B \in L_{\text{per}}^n(\square) \quad \text{для } n \geq 3 \quad \text{и} \quad B \in L_{\text{per}}^{2+\delta}(\square), \quad \text{где } \delta > 0, \quad \text{для } n = 2. \quad (22)$$

ЛЕММА 5. Если выполнено (22), то $BN_{ij} \in L_{\text{per}}^2(\square)$.

3. Нашей целью будет

ТЕОРЕМА 6. Пусть $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon$ – решение задачи (4), u_1^0, u_2^0 – решение усредненной задачи (17). Тогда в предположении (22)

$$\|u_1 - u_1^0\|_{L^2} + \|u_2 - u_2^0\|_{L^2} \leq c\varepsilon(\|f_1\|_{L^2} + \|f_2\|_{L^2}), \quad (23)$$

где константа c зависит от размерности пространства и нормы $\|B\|_{L_{\text{per}}^n(\square)}$.

Дадим набросок доказательства этой теоремы.

Можно считать, что определенное в (8) первое приближение $\bar{u}_1^\varepsilon, \bar{u}_2^\varepsilon \in D^* \times D$ и поэтому является решением задачи вида (4) с подходящими правыми частями. Это соображение позволяет нам далее пользоваться энергетическим равенством и энергетической оценкой для уравнения (4).

По свойствам первого и нулевого приближений $\bar{u}_1^\varepsilon, \bar{u}_2^\varepsilon$ и u_1^0, u_2^0 имеем (см. (9), (17)–(19))

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(I_1 - \nabla u_1^\varepsilon - B\nabla u_2^\varepsilon) + \bar{u}_1^\varepsilon - u_1^\varepsilon &= -\operatorname{div} I_1 + \bar{u}_1^\varepsilon - f_1 = -\operatorname{div} I_1 + \bar{u}_1^\varepsilon + \operatorname{div} I_1^0 - u_1^0 \\ &= -\operatorname{div}(I_1 - I_1^0) + (\bar{u}_1^\varepsilon - u_1^0) = -\operatorname{div} r_1 + \varepsilon v_1, \end{aligned}$$

аналогично

$$-\operatorname{div}(I_2 - \nabla u_2^\varepsilon - B\nabla u_1^\varepsilon) + \bar{u}_2^\varepsilon - u_2^\varepsilon = -\operatorname{div} r_2 + \varepsilon v_2.$$

Отсюда для $\varphi_1 = u_1^\varepsilon - \bar{u}_1^\varepsilon, \varphi_2 = u_2^\varepsilon - \bar{u}_2^\varepsilon$ энергетическое равенство имеет вид

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_1^2 + |\nabla \varphi_1|^2) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_2^2 + |\nabla \varphi_2|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (r_1 \cdot \nabla \varphi_1 - \varepsilon v_1 \varphi_1) dx + \int_{\mathbb{R}^n} (r_2 \cdot \nabla \varphi_2 - \varepsilon v_2 \varphi_2) dx$$

и по свойствам r_i, v_i (см. (12), (20), (21))

$$\|\varphi_1\|_{H^1}^2 + \|\varphi_2\|_{H^1}^2 \leq c\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(\varepsilon^{-1}x)\Phi(x)|^2 dx, \quad (24)$$

где $\|\Phi\|_{L^2}^2 = \|u_1^0\|_{H^2}^2 + \|u_2^0\|_{H^2}^2$ и оценивается по лемме 3, $\theta(y)$ – периодическая функция вида $N_{ij}(y), BN_{ij}(y), G^j(y) \in L_{\text{per}}^2(\square)$ (см. леммы 4, 5). Прием, использованный в работах [3], [4], позволяет исключить из оценки (24) осциллирующие множители и получить в итоге неравенство (23).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. В. Жиков, *Функцион. анализ и его прилож.*, **38:3** (2004), 15–28. [2] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука; Физматлит, М., 1993. [3] В. В. Жиков, *Докл. РАН*, **403:3** (2005), 305–508. [4] В. В. Жиков, С. В. Тихомирова, *Современная матем. и ее прилож.*, 2005 (в печати).

С. Е. Пастухова

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

E-mail: leonowmw@cs.msu.su

Поступило

24.11.2005

С. В. Тихомирова

Владимирский государственный педагогический университет