Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Ширяев, А. А. Шкаликов, Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 4, 636–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 08:03:38

Регулярные и вполне регулярные дифференциальные операторы

Е. А. Ширяев, А. А. Шкаликов

1. Регулярные операторы. В работе [1] Биркгоф выделил класс обыкновенных дифференциальных операторов, для которых получил оценки ядер Грина и доказал теорему о разложении по собственным функциям. Операторы из этого класса он назвал *регулярными*. Напомним определение Биркгофа в упрощенной форме.

Пусть L – оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = (-i)^n y^{(n)}(x) + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y, \quad (1)$$

и n линейно независимыми краевыми условиями вида

$$U_j(y) = \sum_{s=0}^{n-1} (a_{j,s}y^{(s)}(0) + b_{j,s}y^{(s)}(1)) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Предполагаем, что коэффициенты $p_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, – суммируемые комплексные функции на отрезке $[0, 1]$. Считаем, что L действует в пространстве $L_2(0, 1)$ и определен равенством $L(y) = l(y)$ на области

$$D(L) = \{y \mid y^{(s)} \in AC[0, 1], s = 0, 1, \dots, n-1, l(y) \in L_2, U_j(y) = 0, j = 1, \dots, n\}.$$

Здесь $AC[0, 1]$ – пространство абсолютно непрерывных функций.

Перепишем краевые условия, выделив старшие производные:

$$U_j(y) := a_j y^{(k_j)}(0) + b_j y^{(k_j)}(1) + \sum_{s=0}^{k_j-1} (a_{j,s}y^{(s)}(0) + b_{j,s}y^{(s)}(1)) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Число k_j , $j = 1, \dots, n$, $0 \leq k_j \leq n-1$, назовем *порядком краевого условия*, а число $\varkappa = k_1 + \dots + k_n$ – *суммарным порядком*. Заменяем краевые условия их линейными комбинациями, при которых суммарный порядок наименьший. Считаем, что получившиеся краевые условия имеют вид (3), причем нумерация такова, что $n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$. Тогда старшие линейные формы

$$U_j^0(y) = a_j y^{(k_j)}(0) + b_j y^{(k_j)}(1), \quad j = 1, \dots, n,$$

также линейно независимы (иначе суммарный порядок можно понизить), что влечет $k_j > k_{j+2}$, $a_j b_j \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. При четном $n = 2m$ оператор L назовем *регулярным по Биркгофу*, если не равен нулю определитель

$$\theta = \begin{vmatrix} a_1 \varepsilon_1^{k_1} & \dots & a_1 \varepsilon_{m-1}^{k_1} & a_1 \varepsilon_m^{k_1} & b_1 \varepsilon_{m+1}^{k_1} & \dots & b_1 \varepsilon_n^{k_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n \varepsilon_1^{k_n} & \dots & a_n \varepsilon_{m-1}^{k_n} & a_n \varepsilon_m^{k_n} & b_n \varepsilon_{m+1}^{k_n} & \dots & b_n \varepsilon_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon_k = \exp(2\pi(k-1)i/n)$, $k = 1, \dots, n$, – корни n -й степени из 1. При нечетном $n = 2m-1$ требуем, чтобы помимо этого определителя был также отличен от нуля определитель, получающийся заменой в m -м столбце чисел a_j на b_j .

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 04-01-00712) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5247.2006.1).

При $n = 2m$ приведенное определение отличается от классического [1], [2], где требуется отличие от нуля еще одного числа, но несложно показать, что второе число может обращаться в нуль только одновременно с приведенным здесь первым числом. Коэффициенты $p_j(x)$ дифференциального выражения и младшие члены в краевых условиях не участвуют в определении регулярности; L регулярен тогда и только тогда, когда регулярен оператор $L_0(y) = (-i)^n y^{(n)}$, порожденный краевыми условиями $U_j^0(y) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Определение регулярности переносится на существенно более общие классы краевых задач со спектральным параметром. Для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем это сделано в [3]–[5], а теория регулярных задач для уравнений с частными производными построена в работах [6]–[8]. Интересно отметить, что для обыкновенных дифференциальных операторов порядка $2m$ в случае распадающихся краевых условий можно определить регулярность по Лопатинскому и она будет эквивалентна регулярности по Биркгофу (см. [9; § 9]).

Для формулировки основной теоремы о регулярных операторах удобно ввести дополнительные обозначения. Лучи $\arg \rho = \pm(\pi/2n + \arg(i\varepsilon_k))$ в комплексной ρ -плоскости назовем *критическими*. Их число равно n и $2n$ в четном и нечетном случаях соответственно. Вырежем из ρ -плоскости открытые секторы раствора $\varepsilon < \pi/(2n)$, биссектрисами которых служат критические лучи, а оставшиеся n или $2n$ замкнутых секторов обозначим через $\Omega(\varepsilon)$.

Если резольвентное множество оператора L непусто, то из компактности вложения $D(L) \subset L_2(0, 1)$ (мы снабжаем $D(L)$ нормой графика оператора L , тогда $D(L)$ становится гильбертовым пространством) следует, что спектр L дискретный, т.е. состоит из изолированных собственных значений $\{\lambda_k\}_1^\infty$ конечной алгебраической кратности. Обозначим через $\rho_{k,j}$, $k = 1, \dots, n$, корни уравнения $\lambda_j = \rho^n$, через $B_{k,j}(\delta)$ – круги радиуса δ в ρ -плоскости с центрами в точках $\rho_{k,j}$, и через $B(\delta)$ – объединение всех таких кругов по обоим индексам k и j . Известно [2], что резольвента L есть интегральный оператор

$$(L - \rho^n)^{-1} f(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \rho) f(\xi) d\xi,$$

где $G(x, \xi, \rho)$ – ядро Грина. Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) оператор L регулярен по Биркгофу;
- 2) при любом $\delta > 0$ всякий некритический луч, выходящий из нуля, асимптотически не пересекает множество $\mathbb{C} \setminus B(\delta)$, и для всех $x, \xi \in [0, 1]$ и $\rho \in \mathbb{C} \setminus B(\delta)$ для функции Грина справедлива оценка

$$|G(x, \xi, \rho)| \leq M |\rho|^{-n+1}, \quad (4)$$

где постоянная $M = M(\delta)$ не зависит от x, ξ, ρ ;

- 3) найдется последовательность точек $\{\rho_k\}$ в одном из секторов множества $\Omega(\varepsilon)$ (в случае нечетного n – две последовательности в двух соседних секторах этого множества) такая, что $\rho_k \rightarrow \infty$ и оценка (4) выполнена при $\rho = \rho_k$;
- 4) при любом $\varepsilon > 0$ в области $\Omega(\varepsilon)$ выполняется оценка

$$\|(L - \rho^n)^{-1}\| \leq M |\rho|^{-n}, \quad |\rho| \geq |\rho_0|, \quad (5)$$

где постоянная $M = M(\varepsilon, \rho_0)$ не зависит от ρ , а $\|\cdot\|$ означает норму в L_2 ;

- 5) найдется последовательность точек $\{\rho_k\}$ в одном из секторов множества $\Omega(\varepsilon)$ (в случае нечетного n – две последовательности в двух соседних секторах этого множества) такая, что $\rho_k \rightarrow \infty$ и оценка (5) выполнена при $\rho = \rho_k$;

- 6) система собственных и присоединенных функций оператора L образует безусловный базис со скобками в пространстве L_2 , причем в скобки объединяются не более двух собственных функций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1) \Rightarrow 2)$ доказана Биркгофом [1]. Формально в [1] (см. также [2]) оценка (4) доказана на некоторой последовательности контуров, уходящих на бесконечность. Однако при условии регулярности, оценку снизу характеристического определителя (голоморфной функции, нули которой совпадают с числами $\rho_{k,j}$) легко провести вне множества $B(\rho)$. Тогда оценка (4)

получается при всех $\rho \in \mathbb{C} \setminus B(\rho)$. Импликация $1) \Rightarrow 4)$ доказана Бензингером [10]. Импликации $2) \Rightarrow 3)$ и $4) \Rightarrow 5)$ тривиальны, а $5) \Rightarrow 1)$ доказана Минкиным в его недавней работе [11]. Импликация $1) \Rightarrow 6)$ доказана Шкаликовым [12] (там же см. ссылки на предшествующие работы Данфорда и Шварца, Кесельмана и Михайлова на эту тему). Остается доказать $4) \Rightarrow 1)$ и $6) \Rightarrow 1)$. Доказательства обеих этих импликаций нетривиальны, в них существенно используются результаты и приемы недавней работы Минкина [11]. Подробное изложение будет дано в другой работе, здесь отметим только один вспомогательный результат, играющий важную роль.

ЛЕММА. Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ – комплексные, не равные нулю числа, аргументы которых различны. Положим

$$\psi_j(x) = \sum_{k=1}^n c_{k,j} e^{\alpha_k \rho_j x} (1 + \varphi_{k,j}(x)),$$

где $c_{k,j}$ – произвольные числа такие, что $|c_{1,j}| + \dots + |c_{n,j}| \neq 0$, а $\|\varphi_{k,j}\|^2 = o(|\rho_j|^{-1})$ при $|\rho_j| \rightarrow \infty$. Назовем критическими лучи, аргументы которых равны $\pm\pi/2 + \arg \alpha_k$. Последовательность $\{\rho_j\}_1^\infty$, занумерованную в порядке возрастания модулей, назовем редкой, если найдется целое число l такое, что $|\rho_{j+l}/\rho_j| \geq 2$ при всех $j \geq 1$.

Пусть система $\{\psi_j(x)\}_1^\infty$ образует базис Рисса со скобками в замыкании своей линейной оболочки в пространстве $L_2(0,1)$, причем в скобки заключаются не более фиксированного числа N функций. Тогда в каждом замкнутом секторе, не содержащем критические лучи, последовательность $\{\rho_j\}$ является редкой.

2. Вполне регулярные операторы. Здесь будем рассматривать дифференциальные операторы четного порядка $n = 2m$, заданные дифференциальным выражением

$$l(y) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \left\{ (p_k(x)y^{(k)})^{(k)} - \left[(q_k(x)y^{(k)})^{(k-1)} + (r_k(x)y^{(k-1)})^{(k)} \right] \right\}, \quad (6)$$

где $p_m(x) = 1$, $r_0(x) = 0$. Чтобы не усложнять существо дела, предположим, что коэффициенты $p_k(x)$, $q_k(x)$, $r_k(x)$ таковы, что после раскрытия производных дифференциальное выражение приводится к виду (1). Для этого достаточно, чтобы $p_k(x), r_k(x) \in W_1^k[0,1]$, $q_k(x) \in W_1^{k-1}[0,1]$.

Введем квазипроизводные

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= y^{(k)}, & k &= 0, \dots, m-1, \\ y^{[m]} &= y^{(m)} - r_m y^{(m-1)}, \\ y^{[m+k]} &= -(y^{[m+k-1]})' + p_{m-k} y^{(m-k)} \\ &\quad + [q_{m-k+1} y^{(m-k+1)} - r_{m-k} y^{(m-k-1)}], & k &= 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (7)$$

Легко видеть, что при фиксированном x функционал $y^{[k]}(x)$ является линейной комбинацией функционалов $y^{(s)}(x)$, $s = 0, \dots, k$, и наоборот. Поэтому краевые условия можно записать в виде

$$By^\wedge + Cy^\vee = 0, \quad (8)$$

где B и C – некоторые матрицы, а $y^\wedge$ и $y^\vee$ – векторы значений квазипроизводных:

$$y^\wedge = (y(0), y'(0), \dots, y^{(m-1)}(0), y(1), y'(1), \dots, y^{(m-1)}(1))^t, \\ y^\vee = (y^{[2m-1]}(0), y^{[2m-2]}(0), \dots, y^{[m]}(0), -y^{[2m-1]}(1), -y^{[2m-2]}(1), \dots, -y^{[m]}(1))^t,$$

где верхний индекс t означает транспонирование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор L , порожденный дифференциальным выражением (6) и краевыми условиями (8), будем называть *вполне регулярным*, если выполнено условие $B^{-1}(\text{im } C) = \mathbb{C}^{2m} \ominus \ker C$, где B^{-1} понимается как взятие полного прообраза от $\text{im } C$ при отображении B .

ТЕОРЕМА 2. Пусть оператор L задан выражением (6) и краевыми условиями (8). Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) оператор L является вполне регулярным;
- 2) числовой образ оператора L не совпадает со всей комплексной плоскостью;
- 3) числовой образ оператора L содержится в некоторой полуплоскости в $\mathbb{C}$;
- 4) квадратичная форма оператора $(Ly, y)_{L_2}$ представима в виде

$$\sum_{k=1}^m [(p_k y^{(k)}, y^{(k)})_{L_2} + (q_k y^{(k)}, y^{(k-1)})_{L_2} - (r_k y^{(k-1)}, y^{(k)})_{L_2}] + (Ay^\wedge, y^\wedge)_{\mathbb{C}^{2m}}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность утверждений 2) и 3) следует из свойства выпуклости числового образа.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 4) для случая $q_k = r_k \equiv 0$ доказана в работе [13]. В общем случае доказательство можно провести аналогично. Чтобы показать справедливость обратного утверждения докажем следующую лемму.

ЛЕММА. Пусть матрица A такова, что для всех $x, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^{2m}$ справедливо равенство $(y_2, x)_{\mathbb{C}^{2m}} = (Ay_1, x)_{\mathbb{C}^{2m}}$, если $x \in B^{-1}(\text{im } C)$ и $B y_1 + C y_2 = 0$. Тогда оператор L вполне регулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $B^{-1}(\text{im } C) \perp \ker C$. Пусть векторы y_1 и y_2 таковы, что $B y_1 + C y_2 = 0$. Тогда $y_1 \in B^{-1}(\text{im } C)$ и $(y_2, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}} = (A y_1, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}}$. Поскольку $B y_1 + C(y_2 + v) = 0$ для любого $v \in \ker C$, то $(y_2 + v, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}} = (A y_1, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}}$. Поэтому $(v, y_1)_{\mathbb{C}^{2m}} = 0$, т.е. $B^{-1}(\text{im } C) \perp \ker C$.

Равенство $B^{-1}(\text{im } C) = \mathbb{C}^{2m} \ominus \ker C$ следует теперь из того, что краевые условия линейно независимы.

Доказательство импликации 4) $\Rightarrow$ 3) следует из компактности вложений $W_2^r \subset W_2^m$ при $r \leq m - 1$ и компактности операторов следа $T_0 y = y^{(r)}(0)$ и $T_1 y = y^{(r)}(1)$ как операторов из W_2^m в $\mathbb{C}$. Доказательство обратной импликации более сложно и здесь мы его не приводим. В нем используется прием из работы [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Всякий вполне регулярный оператор регулярен. Действительно, если L вполне регулярен, то его числовой образ лежит в некоторой полуплоскости, а потому найдется сектор в комплексной плоскости, в котором резольвента $(L - \rho^m)^{-1}$ имеет оценку (5). Тогда по теореме 1 оператор L регулярен. Обратное, вообще говоря, неверно. Это показывает следующий пример.

ПРИМЕР. Пусть $Ly = y^{(4)}$, а краевые условия имеют вид

$$\begin{cases} -y'''(0) + y''(0) + y(0) = 0, \\ y'''(1) + y(1) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y'(1) = 0. \end{cases}$$

Простая проверка показывает, что L регулярен, но не вполне регулярен.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Birkhoff, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**:4 (1908), 373–395. [2] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969. [3] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Тип-я М. П. Фроловой, Петроград, 1917. [4] А. А. Шкаликов, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **9** (1983), 190–229. [5] Л. М. Лужина, *Дисс. ... канд. физ.-матем. наук*, МГУ, М., 1991. [6] Я. Б. Лопатинский, *Укр. матем. журн.*, **5**:2 (1953), 123–151. [7] S. Agmon, L. Nirenberg, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 121–239. [8] М. С. Агранович, М. И. Вишик, *УМН*, **19**:3 (1964), 53–161. [9] А. А. Шкаликов, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14** (1989), 140–224. [10] H. E. Benzinger, *J. Differential Equations*, **7**:3 (1970), 478–496. [11] A. M. Minkin, *J. Math. Anal. Appl.*; [arXiv:math.SP/0409181](#). [12] А. А. Шкаликов, *УМН*, **34**:5 (1979), 235–236. [13] А. А. Владимиров, *Матем. заметки*, **75**:6 (2004), 941–943. [14] Е. А. Ширяев, *Матем. заметки*, **77**:6 (2005), 950–954.

Е. А. Ширяев, А. А. Шкаликов
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
10.11.2006