Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ш. К. Форманов, Метод Стейна–Тихомирова и неклассическая центральная предельная теорема, *Матем. заметки*, 2002, том 71, выпуск 4, 604–610

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:58:47

УДК 519.21

МЕТОД СТЕЙНА–ТИХОМИРОВА И НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Ш. К. Форманов

Приведен упрощенный вариант метода Стейна–Тихомирова, реализованный путем определения одного оператора в классе дважды дифференцируемых характеристических функций. При помощи этого метода установлен критерий справедливости неклассической центральной предельной теоремы в терминах характеристических функций.

Библиография: 5 названий.

Пусть $F(x)$ – произвольная функция распределения (ф.р.) и

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$$

– стандартная ф.р. нормального закона. В работе [1] Стейн предложил один универсальный метод оценки величины

$$\Delta = \sup_x |F(x) - \Phi(x)|,$$

основанный на следующих рассуждениях. Пусть $h(u)$ – ограниченная измеримая функция на прямой и

$$\Phi h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-u^2/2} du.$$

Рассмотрим функцию $g(\cdot)$, представляющую собой решение дифференциального уравнения

$$g'(u) - ug(u) = h(u) - \Phi h. \quad (1)$$

Пусть ξ – случайная величина (с.в.) с ф.р.

$$P(\xi < x) = F(x).$$

Положив в (1)

$$h(u) = h_x(u) = I_{(-\infty, x)}(u),$$

имеем

$$F(x) - \Phi(x) = E[g'(\xi) - \xi g(\xi)]. \quad (2)$$

Таким образом, задачу об оценке величины Δ можно свести к оценке разности математических ожиданий

$$|Eg'(\xi) - E\xi g(\xi)|.$$

Также заметим, что в случае, когда с.в. ξ имеет нормальное распределение, правая часть (2) обращается в нуль. Пользуясь изложенным методом, Стейн [1] получил оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме для стационарных в узком смысле последовательностей с.в., удовлетворяющих условиям сильного перемешивания по Розенблатту. При этом от слагаемых требуется существование моментов восьмого порядка. В этой работе Стейн высказал мнение о том, что вряд ли его метод связан с методом характеристических функций (х.ф.).

В [2] Тихомиров опроверг это мнение. Он показал, что именно сочетание идей Стейна с методом х.ф. позволяет получить неулучшаемые оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для последовательностей слабовязисимых с.в. при минимальных моментных условиях. При этом он очень удачно использовал идеи работы [1], составляющие основы предложенного нового метода. В последующем методы, связанные с результатами из [1], [2], в собирательном виде стали называться методом Стейна–Тихомирова (С–Т).

В настоящей работе будет показано, что рассуждения, используемые при применении метода С–Т, могут быть значительно упрощены. Последнее демонстрируется по ходу доказательства неклассической центральной предельной теоремы, которую можно назвать обобщенной теоремой Линдберга–Феллера.

Пусть

$$X_{n1}, X_{n2}, \dots$$

– последовательность независимых с.в., образующих схему серий, и

$$S_n = X_{n1} + X_{n2} + \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

причем в каждой сумме число слагаемых может быть и бесконечным. Положим

$$EX_{nj} = 0, \quad EX_{nj}^2 = \sigma_{nj}^2$$

и

$$\sum_j \sigma_{nj}^2 = 1. \quad (3)$$

В дальнейшем условие (3) считается выполненным.

Как известно, в теории суммирования независимых с.в. существенную роль играет условие равномерной бесконечной малости слагаемых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_j P(|X_{nj}| \geq \varepsilon) = 0 \quad (4)$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Необходимость ограничения (4) связана с желанием сделать предельный закон для распределения суммы S_n нечувствительным к поведению отдельных слагаемых. Но при решении задач отыскания условий сходимости последовательности ф.р.

$$F_n(x) = P(S_n < x)$$

к любому заданному закону введение ограничений типа (4) не представляется обязательным. Следуя Золотареву, предельные теоремы, не использующие условие (4), принято называть *неклассическими*. Как замечено в монографии [3], содержащей основные результаты неклассической теории суммирования независимых с.в., идейные предпосылки неклассического подхода восходят к П. Леви, который изучал различные варианты центральной предельной теоремы.

Ротарь в [4] доказал следующую теорему, которая обобщает классическую теорему Линдберга–Феллера.

ТЕОРЕМА А. Для того чтобы при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_x |F(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$

$$R_n(\varepsilon) = \sum_j \int_{|x| > \varepsilon} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| \rightarrow 0, \quad (5)$$

где

$$F_{nj}(x) = P(X_{nj} < x), \quad \Phi_{nj}(x) = \Phi\left(\frac{x}{\sigma_{nj}}\right).$$

Заметим, что в [4] теорема А в приведенном варианте отсутствует, но к ее утверждению можно прийти, объединив предложения 1 и 2 из [4].

Числовая характеристика $R_n(\varepsilon)$, определенная в (5), является универсальной, она и ее аналоги давно используются в “неклассической” теории суммирования более общих последовательностей с.в. (см., например, [5, глава 5, § 6]).

Теперь рассмотрим класс х.ф. $f(t)$, заданный следующим образом:

$$F = \{f(t) \mid f'(0) = 0, \quad -f''(0) = -\sigma^2 < \infty\}.$$

В классе F введем преобразование (оператор Стейна–Тихомирова)

$$\Delta(f(t)) = f'(t) + t\sigma^2 f(t). \quad (6)$$

Очевидно, что

$$\Delta(e^{-t^2\sigma^2/2}) = 0, \quad (7)$$

т.е. оператор $\Delta(\cdot)$ “аннулирует” нормальную х.ф.

Если рассмотреть (6) как дифференциальное уравнение, которое следует решить при начальном условии $f(0) = 1$, то получим

$$f(t) - e^{-t^2\sigma^2/2} = e^{-t^2\sigma^2/2} \int_0^t \Delta(f(u)) e^{u^2\sigma^2/2} du. \quad (8)$$

В равенстве (8) переменная интегрирования имеет одинаковый знак с t , причем $|u| \leq |t|$.

Равенства (7) и (8) показывают, что выражение $\Delta(f(t))$ характеризует близость распределения с х.ф. $f(t)$ к нормальному закону со средним 0 и дисперсией σ^2 .

Непосредственно можно убедиться в том, что оператор $\Delta(\cdot)$ обладает следующим важным свойством.

ЛЕММА. Для х.ф. $f(t)$ и $g(t)$, для которых

$$f'(0) = g'(0) = 0, \quad \max(|f''(0)|, |g''(0)|) < \infty,$$

имеет место равенство

$$\Delta(f(t)g(t)) = f(t)\Delta(g(t)) + g(t)\Delta(f(t)). \quad (9)$$

Из приведенной леммы следует, что оператор $\Delta(\cdot)$ по отношению к произведению х.ф. является оператором дифференцирования.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \rightarrow 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом $T > 0$

$$\sup_{|t| \leq T} \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| \rightarrow 0, \quad (10)$$

где $f_{nj}(\cdot)$ — х.ф., соответствующая ф.р. $F_{nj}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО по части достаточности условия (10) выглядит просто. На самом деле,

$$f_n(t) = E e^{itS_n} = \prod_j f_{nj}(t)$$

и из равенства (8) следует, что

$$\sup_{|t| \leq T} |f_n(t) - e^{-t^2/2}| \leq T \cdot \sup_{|t| \leq T} |\Delta(f_n(t))| \quad (11)$$

при любом $T > 0$.

Далее в силу (9)

$$\Delta(f_n(t)) = \sum_j \prod_{k \leq j-1} f_{nk}(t) \Delta(f_{nj}(t)) \prod_{s \geq j+1} f_{ns}(t)$$

и, следовательно,

$$|\Delta(f_n(t))| \leq \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))|. \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) доказывают достаточность условия (10) для справедливости центральной предельной теоремы. Для того чтобы показать необходимость условия (10), докажем, что оно не сильнее (5). Формально этого достаточно, а последующие рассуждения проясняют суть дела. Положим

$$\varphi_{nj}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_{nj}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_{nj}\left(\frac{x}{\sigma_{nj}}\right).$$

Учитывая то, что $\Delta(\varphi_{nj}(t)) = 0$ при любом $j \geq 1$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| &= \sum_j |\Delta(f_{nj}(t)) - \Delta(\varphi_{nj}(t))| \\ &\leq \sum_j |(f'_{nj}(t)) - \varphi'_{nj}(t)| + |t| \sum_j \sigma_{nj}^2 |f_{nj}(t) - \varphi_{nj}(t)| \\ &= \sum_1(t) + |t| \sum_2(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Заметив, что

$$EX_{nj} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_{nj} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\Phi_{nj} = \sigma_{nj}^2,$$

и проведя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} |f'_{nj}(t) - \varphi'_{nj}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (ix)(e^{itx} - 1 - itx) d(F_{nj} - \Phi_{nj}) \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)) dx \right| \\ &\quad + |t| \left| \int_{-\infty}^{\infty} (ix)(e^{itx} - 1)(F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)) dx \right|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_1(t) &\leq t^2 \varepsilon \sum_j \int_{|x| \leq \varepsilon} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx \\ &\quad + (|t| + t^2) \sum_j \int_{|x| > \varepsilon} |x| |F_{nj}(x) - \Phi_{nj}(x)| dx \\ &\leq t^2 \varepsilon \sum_j 2\sigma_{nj}^2 + (|t| + t^2) R_n(\varepsilon) \leq 2(|t| + t^2)(\varepsilon + R_n(\varepsilon)). \end{aligned} \quad (14)$$

При выводе (14) использован следующий факт. Если $F(x)$ – ф.р. со средним 0 и дисперсией σ^2 , то

$$\int_0^{\infty} u(1 - F(u) + F(-u)) du = \frac{\sigma^2}{2}.$$

В работе [4] установлено, что

$$\sum_2(t) \leq 2(t^2 + |t|^3)(\varepsilon + R_n(\varepsilon)). \quad (15)$$

Из соотношений (13)–(15) следует, что если выполнено условие (5), то при любом $T > 0$

$$\sup_{t \leq T} \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Проиллюстрируем на простом примере нарастающих сумм независимых бернуллиевых с.в., насколько легко проверяется условие (10). Пусть

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p_j, \\ 0 & \text{с вероятностью } q_j = 1 - p_j. \end{cases}$$

Учитывая то, что $MY_j = p_j$, $DX_j = p_j q_j$, положим

$$B_n^2 = \sum_{j=1}^n p_j q_j, \quad X_{nj} = \frac{Y_j - p_j}{B_n}, \quad S_n = \sum_{j=1}^n X_{nj}.$$

В рассматриваемом случае

$$f_{nj}(t) = E e^{itX_{nj}} = p_j e^{itq_j/B_n} + q_j e^{-itp_j/B_n}.$$

Покажем, что если $B_n \rightarrow \infty$, то условие (10) выполняется. На самом деле, легко увидеть, что

$$f_{nj}(t) = 1 - \frac{p_j q_j}{2B_n^2} t^2 + \frac{p_j q_j}{B_n^2} \varepsilon_n(t), \quad (16)$$

$$f'_{nj}(t) = -\frac{p_j q_j}{B_n^2} t + \frac{p_j q_j}{B_n^2} \varepsilon_n(t), \quad (17)$$

где

$$\sup_{|t| \leq T} |\varepsilon_n(t)| = O\left(\frac{1}{B_n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

при любом $T > 0$.

Из равенств (16), (17) следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{t \leq T} \sum_j |\Delta(f_{nj}(t))| = O\left(\frac{1}{B_n}\right). \quad (18)$$

Понятно, что непосредственная проверка (5) или классического условия Линдеберга для рассматриваемой последовательности простых с.в. выглядит намного сложнее, чем полученные оценки (18).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно привести более сложные примеры последовательностей с.в., для которых доказательство справедливости центральной предельной теоремы с привлечением критерия (10) упрощается. По-видимому, настоящая заметка является первой работой, в которой критерий сходимости распределения суммы S_n к нормальному закону сформулирован в терминах х.ф. слагаемых.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В доказательствах предельных теорем для ф.р. сумм независимых и слабовзависимых с.в. методом х.ф. основное место занимает доказательство того, что х.ф. этих сумм $f_n(t)$ не обращается в нуль в достаточно большой окрестности точки $t = 0$. При применении же метода Стейна–Тихомирова необходимость в последнем отпадает, что выпукло и выгодно выделяет данный метод из других.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соотношения (8) и (11) показывают, что рассуждения, проведенные по ходу доказательства теоремы, позволяют получить оценку скорости сходимости в неклассической ситуации. Точным формулировкам и доказательствам соответствующих утверждений будут посвящены последующие работы автора.

Автор выражает глубокую благодарность Э. Л. Прессману за полезные обсуждения, а также рецензенту, замечания которого способствовали улучшению содержания работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Stein Ch. A bound for error in the normal approximation to the distribution of a sum of dependent random variables // Proc. 6th Berkley Symp. Math. Stat. and Prob. 1972. V. 2. P. 583–602.
- [2] Тихомиров А. Н. О сходимости остаточного члена в центральной предельной теореме для слабовязисимых случайных величин // Теория вероятн. и ее применения. 1980. Т. 25. № 4. С. 800–818.
- [3] Линник Ю. И., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. М.: Наука, 1972.
- [4] Ротарь В. И. К обобщению теоремы Линдберга–Феллера // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 1. С. 129–135.
- [5] Липшер Р. Ш., Ширяев А. Н. Теория мартингалов. М.: Наука, 1986.

Институт математики им. В. И. Романовского
АН Республики Узбекистан, г. Ташкент
E-mail: root@im.tashkent.su

Поступило
25.07.2000
Исправленный вариант
19.07.2001