Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Т. Билалов, Об аппроксимационных теоремах Стоуна и Бишопа, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 660–665

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 05:44:27

Об аппроксимационных теоремах Стоуна и Бишопа

Б. Т. Билалов

В работе получены некоторые обобщения теорем Стоуна–Вейерштрасса и Бишопа об аппроксимации. По заданной алгебре строится подпространство непрерывных функций, которое совпадает с замыканием этой алгебры. Найдены аналоги этих результатов в случае, когда рассматриваемое множество функций не является алгеброй, но замыкание его связано с некоторой алгеброй.

Библиография: 3 названия.

Хорошо известны аппроксимационные теоремы Стоуна–Вейерштрасса и Бишопа относительно равномерных алгебр (см., например, [1], [2]). Во многих случаях, особенно при изучении базисных свойств (полнота, минимальность и т.д.) систем собственных функций некоторых дифференциальных операторов, приходится изучать аппроксимативные свойства множества функций, которое не образует алгебру. Например, в работе [3] изучена полнота системы функций вида

$$\{\operatorname{Re}[W(t)]^n; \operatorname{Im}[W(t)]^n\}_{n \geq 0} \quad (1)$$

в пространстве непрерывных функций, линейная оболочка которых не является алгеброй, и, таким образом, названные теоремы не могут быть применены в подобных ситуациях. Но нетрудно заметить, что линейная оболочка этих функций каким-то образом связана с некоторой комплексной алгеброй. Поэтому возникает необходимость обобщить названные теоремы в соответствующем направлении.

1. Прежде введем необходимые обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем:

‘ $\equiv$ ’ – по определению;

‘ $\implies$ ’ – следует;

‘ $\iff$ ’ – тогда и только тогда;

‘ $\rightrightarrows$ ’ – равномерно сходится;

‘ $\circ$ ’ – знак композиции;

$\mathbb{R} \equiv (-\infty, +\infty)$; $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость;

M – основное множество, на котором определены рассматриваемые функции;

$f|_K$ – сужение функции f на $K \subset M$;

$C_c(M)$ – класс всех комплекснозначных непрерывных функций на M с суп-нормой;

$C_r(M)$ – класс всех вещественных непрерывных функций на M с суп-нормой;

$C_K^\circ(M) \equiv \{f \in C_c(M) : f|_K \equiv 0\}$;

$L_f(x) \equiv \{y \in M : f(y) = f(x)\}$;

$K_\Phi(x) \equiv \bigcap_{f: f \in \Phi} L_f(x)$;

$N_f \equiv \{x \in M : f(x) = 0\}$;

$C_\Phi(M) \equiv \{f \in C_c(M) : f|_{K_\Phi(x)} \equiv f(x)\}$; $N_\Phi \equiv \bigcap_{f \in \Phi} N_f$;

$A \equiv A(M)$ – алгебра непрерывных на M функций;

$\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(M)$ – равномерное замыкание алгебры $A(M)$ на M ;

$\bar{L} \equiv M \setminus L$, $L \subset M$;

$\bar{f}$ – комплексное сопряжение от f ;

$\bar{A} \equiv \bar{A}(M) \equiv \{f : \bar{f} \in A\}$;

$A_c \equiv A_c(M) \equiv \{\varphi : \varphi = f + \bar{g}; f, g \in A\}$;

P – некоторое поле;

$\mathcal{B}_c$ – равномерное замыкание A_c ;

$\operatorname{Re} A \equiv \{\varphi : \varphi = \operatorname{Re} f; f \in A\}$;

$\operatorname{Im} A \equiv \{\varphi : \varphi = \operatorname{Im} f; f \in A\}$;

$A^r \equiv A^r(M)$ – вещественная алгебра (состоит только из вещественных функций);

$\mathcal{B}^r \equiv \mathcal{B}^r(M)$ – равномерное замыкание A^r ;

$\mathcal{B}_r$ – равномерное замыкание $\operatorname{Re} A$;

$\mathcal{B}_i$ – равномерное замыкание $\operatorname{Im} A$.

Далее в случае вещественных алгебр рассматриваем только вещественные непрерывные функции.

2. В предыдущих обозначениях теорему Стоуна–Вейерштрасса можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА С-В. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ – компакт и выполняются условия:

а) A^r разделяет точки множества M ;

б) A^r не исчезает ни в одной точке M .

Тогда $\mathcal{B}^r = C_r(M)$.

Отметим, что метод доказательства этой теоремы может быть применен и в более общих случаях. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A(M)$ не исчезает ни в одной точке множества M . Тогда

а) если $K_A(x) = \{x\} \quad \forall x \in M$ и $x_1 \neq x_2: x_1, x_2 \in M; c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, если $A = A^r$), то $\exists f \in A(M): f(x_i) = c_i, i = 1, 2$;

б) если $x_1 \neq x_2: x_1, x_2 \in M$ такие, что $\{x_1, x_2\} \cap K_A(x) \neq \{\emptyset\} \quad \forall x \in M$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, если $A = A^r$), то $\exists f \in A(M): f(x_i) = c_i, i = 1, 2$;

в) если $\{x_1, x_2\} \subset K_A(x_0)$ при некотором $x_0 \in M$ и $c \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные ($c \in \mathbb{R}$, если $A = A^r$), то $\exists f \in A(M): f(x_i) = c, i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай в) тривиален. Так как по определению $K_A(x_0)$ для $\forall f \in A(M): f(x_i) = f(x_0), i = 1, 2$. Из того, что $A(M)$ не исчезает на M следует, что $\exists g \in A(M): g(x_0) \neq 0$. Тогда

$$f(x) \equiv \frac{c}{g(x_0)} \cdot g(x)$$

– искомая функция.

В случае б) хотя бы одна из точек x_1, x_2 не принадлежит множеству $K_A(x) \quad \forall x \in M$. Это означает, что $\exists g \in A(M): g(x_1) \neq g(x_2)$. Так как в противном случае получили бы включение $\{x_1, x_2\} \subset K_A(x_1)$. Ясно, что $\exists h \in A(M): h(x_1) \neq 0$. Далее доказательство проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 7.29 из [1; с. 182].

В случае а) $A(M)$ разделяет точки M . Так как в противном случае имели бы $\{x_1, x_2\} \subset K_A(x_1)$. Значит, имеют место все условия теоремы 7.29. Теорема доказана.

Используя теорему 1, можно доказать следующее обобщение теоремы Стоуна.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ – компакт, $A^r(M)$ не исчезает ни в одной точке M . Тогда $\mathcal{B}^r = C_{A^r}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На самом деле, фиксируя точку $x \in M$, возьмем $\forall f \in C_{A^r}(M)$. Из определения класса $C_{A^r}(M)$ следует, что для $\forall y \in M \exists g \in A^r: g(x) = f(x)$ и $g(y) = f(y)$.

Далее доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 7.30 из [1; с. 182].

Из этой теоремы непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть имеют место условия теоремы 2 и $K_{A^r}(x) = \{x\} \quad \forall x \in M$. Тогда $\mathcal{B}^r = C_r(M)$.

Это и есть теорема Стоуна. Аналогичные результаты справедливы в более общем случае.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ – компакт, $A^r(M)$ – алгебра ($P = \mathbb{R}$). Тогда $\mathcal{B}^r(M) = C_{N_{A^r}}^\circ(M) \cap C_{A^r}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения этой теоремы следует из теоремы 2 и из включения $\mathcal{B}^r(M) \subset C_{N_{A^r}}^\circ(M)$.

Отметим, что в отличие от теоремы Бишоп (см., например, [2; с. 137]) не требуется, чтобы алгебра A^r содержала все постоянные.

3. До сих пор мы рассматривали действительные алгебры, и причем существенно использовали это при доказательстве соответствующих теорем. А теперь рассмотрим случай, когда $P = \mathbb{C}$. Нетрудно заметить, что в этом случае $\mathcal{B}_r = \mathcal{B}_i$. Справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть M – некоторое множество. Тогда $\mathcal{B}_c(M) = C_c(M) \iff \mathcal{B}_r(M) = C_r(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\mathcal{B}_c(M) = C_c(M)$. Возьмем $\forall \varphi \in C_r(M)$. Ясно, что $\varphi \in C_c(M)$. Значит, $\exists \{f_n\} \subset A_c(M): f_n \rightrightarrows \varphi$. Отсюда следует, что $\operatorname{Re} f_n \rightrightarrows \varphi$. Легко заметить, что $\operatorname{Re} f_n \in A_r$. Наоборот, пусть $\mathcal{B}_r = C_r(M)$. Возьмем $\forall \varphi \in C_c(M)$. Тогда $\exists \{f_n^r\}, \{g_n^i\} \subset A_r: f_n^r \rightrightarrows \operatorname{Re} \varphi, g_n^i \rightrightarrows \operatorname{Im} \varphi$. В итоге $f_n^r + ig_n^i \rightrightarrows \varphi$. Далее утверждение теоремы следует из очевидных соотношений:

$$f_n^r = \operatorname{Re} f_n = \frac{1}{2}(f_n + \overline{f_n}), \quad g_n^i = \operatorname{Im} g_n = \frac{1}{2i}(g_n + \overline{g_n}), \quad f_n + g_n \in A_c.$$

Аналог теоремы 1 справедлив и в этом случае.

ТЕОРЕМА 5. Пусть M – некоторое множество, A – алгебра на M . Тогда

- если $x \in N_A$, то $f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{B}_r(M)$;
- пусть $x_1 \neq x_2: x_1, x_2 \in \overline{N_A}$ такие, что $\{x_1, x_2\} \cap \overline{K_A}(x) \neq \{\emptyset\} \quad \forall x \in \overline{N_A}$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные; тогда $\exists f \in A_r(M): f(x_i) = c_i, i = 1, 2$;
- если $\{x_1, x_2\} \subset K_A(x_0)$ при некотором $x_0 \in \overline{N_A}$ и $c \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная, то $\exists f \in A_r(M): f(x_i) = c, i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай а) тривиален, так как $N_A = N_{\operatorname{Re} A} \cap N_{\operatorname{Im} A}$.

Пусть имеет место случай в). Нетрудно заметить, что A не исчезает на $\overline{N_A}$, т.е. для $\forall x \in \overline{N_A} \exists g \in A: g(x) \neq 0$. Тогда $\exists \varphi \in A: \varphi(x_0) \neq 0$ и

$$f(x) = \operatorname{Re} \left[\frac{c}{\varphi(x_0)} \cdot \varphi(x) \right]$$

– искомая функция.

Опять же в случае б) хотя бы одна из точек x_1, x_2 не принадлежит множеству $K_A(x) \forall x \in M$. По теореме 1 $\exists \varphi \in A: \varphi(x_i) = c_i, i = 1, 2$. Очевидно, что $f(x) = \operatorname{Re} \varphi(x)$ – искомая функция.

В дальнейшем нам понадобится

ЛЕММА 1. Пусть A – алгебра над полем $P = \mathbb{C}$. Тогда $K_A(x) = K_{A_r}(x) \forall x \in M$ и $N_A = N_{A_r}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение $N_A = N_{A_r}$ очевидно. Далее нужно учесть, что если $f(y) = f(x)$, то $\operatorname{Re} f(y) = \operatorname{Re} f(x)$; и наоборот, если $f(y) \neq f(x)$, то либо $\operatorname{Re} f(y) \neq \operatorname{Re} f(x)$, либо $\operatorname{Im} f(y) \neq \operatorname{Im} f(x)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ – компакт и $\mathcal{B}_c$ образует алгебру ($P = \mathbb{C}$). Тогда $\mathcal{B}_r = C_{N_A}^\circ(M) \cap C_A(M)$ (правая часть содержит только действительные функции).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде отметим, что если A – самосопряженная алгебра, т.е. $A = \overline{A}$, и она состоит из ограниченных функций, то $\mathcal{B}_c$ является равномерно замкнутой алгеброй.

Итак, пусть $\mathcal{B}_c$ – алгебра. Значит, $f^n \cdot \overline{f}^m \in \mathcal{B}_c \forall n, m \in \mathbb{N}$ и $\forall f \in A$. Из

$$[\operatorname{Re} f]^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n C_k^n f^n \cdot \overline{f}^{n-k}$$

(C_k^n – биномиальные коэффициенты) следует, что $[\operatorname{Re} f]^n \in \mathcal{B}_r$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall f \in A$. А теперь возьмем $\forall f \in A$ и обозначим

$$a = \sup_M |\operatorname{Re} f|.$$

По теореме Вейерштрасса $\exists \{P_n(y)\}$:

$$P_n(y) = \sum_{i=1}^n C_i y^i \rightrightarrows |y|,$$

если $|y| \leq a$, где коэффициенты $\{C_i\}$, вообще говоря, зависят от номера n . Таким образом, $P_n(\operatorname{Re} f) \rightrightarrows |\operatorname{Re} f| \forall f \in A$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{B}_r$ – линейное подпространство $C(M)$. Тогда из $P_n(\operatorname{Re} f) \in \mathcal{B}_r$ следует $|\operatorname{Re} f| \in \mathcal{B}_r$ и в результате $\max(\operatorname{Re} f, \operatorname{Re} g), \min(\operatorname{Re} f, \operatorname{Re} g) \in \mathcal{B}_r \forall f, g \in A$. Возьмем любую действительную функцию $f \in C_{N_A}^\circ \cap C_A$. Пусть $x \in M$ и $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Тогда по теореме 5 для $\forall y \in M \exists h_y \in A_r: h_y(x) = f(x), h_y(y) = f(y)$. Далее доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 7.30 из [1; с. 182].

Отметим некоторые следствия, которые непосредственно вытекают из этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть имеют место все условия теоремы 6 и $A(M)$ – самосопряженная алгебра. Тогда $\mathcal{B}_r = C_{N_A}^\circ \cap C_A(M)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть M – компакт, A не исчезает ни в одной точке M и разделяет его точки. Если $\mathcal{B}_c$ – алгебра, то $\mathcal{B}_r = C_r(M)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $M \subset \mathbb{C}$ – компакт, A – самосопряженная алгебра, которая не исчезает ни в одной точке M и разделяет его точки. Тогда $\mathcal{B}_r = C_r(M)$ ($\mathcal{B}_c = C_c(M)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathcal{B}_c$ не образует алгебру, то утверждение теоремы 6, вообще говоря, не верно. Например, в качестве A возьмем линейную оболочку системы экспонент ($M = [0, 2\pi]$) $\{e^{int}\}_{n \geq 1}$ над полем $P = \mathbb{C}$. Нетрудно заметить, что в данном случае $\mathcal{B}_c$ не является алгеброй и утверждение теоремы не имеет места, так как система $\{e^{int}\}$, $n = 0, \pm 1, \dots$, минимальна в $C_A([0, 2\pi])$, но $\mathcal{B}_c$ не содержит постоянные.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Интересно сравнить теорему 6 с теоремой Бишопа [2; с. 137]. Пусть A – замкнутая линейная оболочка системы $\{e^{int}\}_{n \geq 0}$ над полем $P = \mathbb{C}$ и $M = [0, 2\pi]$. Ясно, что A содержит все постоянные и разделяет точки $M \setminus \{0\}$. То есть в данном случае $N_A = \{\emptyset\}$ и $K_A(0) = K_A(2\pi) = \{0, 2\pi\}$, $K_A(x) = \{x\}$ $\forall x \in (0, 2\pi)$. По теореме 1 для $\forall f \in C_A(M)$ и $\forall x \in M$ $\exists g \in A$: $g(x) = f(x)$. Если все действительные функции из A разделяли бы точки интервала $(0, 2\pi)$, то имели бы место все условия теоремы Бишопа. Но так как данная система не полна в $C_A([0, 2\pi])$, значит вещественные функции из A не разделяют точки $(0, 2\pi)$. Этот пример показывает, что нахождение максимальных множеств антисимметрии алгебры не простая задача. Более того, эта теорема не применима, если вместо системы экспонент взять систему $\{t^n\}_{n \geq 1}$ на $M = [0, 1]$.

4. Следующий шаг – установление факта, по которому можно определить, является ли $\mathcal{B}_c$ алгеброй.

Пусть $M, S \subset \mathbb{C}$ – компакты, $\omega: M \leftrightarrow S$ – некоторый изоморфизм, A – алгебра непрерывных функций на M над полем P . Введем следующий класс:

$$A^\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{f : f \text{ Circ } \omega \in A\},$$

$\omega^{-1}: S \rightarrow M$ – обратное к ω отображение. Нетрудно показать, что A^ω образует алгебру на S над полем P . Введем

$$\overline{A^\omega} = \{f : f = \bar{g}, g \text{ Circ } \omega \in A\}.$$

Через $\mathcal{B}_c^\omega$ обозначим замыкание множества $A^\omega + \overline{A^\omega}$ в $C_c(S)$: ($P = \mathbb{C}$),

$$A^\omega + \overline{A^\omega} = \{\varphi : \varphi = f + \bar{g}, f \text{ Circ } \omega, g \text{ Circ } \omega \in A\}.$$

Имеет место

ТЕОРЕМА 7. $\mathcal{B}_c(M)$ и $\mathcal{B}_c^\omega(S)$ изоморфны, т.е.

$$g \in \mathcal{B}_c^\omega(S) \iff g \text{ Circ } \omega \in \mathcal{B}_c(M).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На самом деле, пусть $g \in \mathcal{B}_c^\omega(S)$. Следовательно, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f, \varphi \in A^\omega$:

$$|g(w) - (f + \bar{\varphi})(w)| < \varepsilon \quad \forall w \in S.$$

Делая замену переменных $w = \omega(t)$, имеем

$$|(g \text{ Circ } \omega)(t) - ((f + \bar{\varphi}) \text{ Circ } \omega)(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in M.$$

Так как $f \text{ Circ } \omega, \varphi \text{ Circ } \omega \in A$, отсюда следует, что $g \text{ Circ } \omega \in \mathcal{B}_c(M)$.

Наоборот, пусть $g \text{ Circ } \omega \in \mathcal{B}_c(M)$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f, g \in A_c(M)$:

$$|(g \text{ Circ } \omega)(t) - (f + \bar{g})(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in M.$$

Обозначим $f_1(w) = (f \text{ Circ } \omega^{-1})(w)$, $g_1(w) = (g \text{ Circ } \omega^{-1})(w)$. Нетрудно видеть, что $f_1, g_1 \in A^\omega$ и

$$|g(w) - (f_1 + \bar{g}_1)(w)| < \varepsilon \quad \forall w \in S.$$

В результате $g \in \mathcal{B}_c^\omega(S)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. При сделанных выше предположениях имеем $\mathcal{B}_c(M)$ – алгебра $\iff \mathcal{B}_c^\omega(S)$ – алгебра.

Для иллюстрации полученных результатов рассмотрим следующие примеры.

ПРИМЕР 1. Пусть A^Γ – линейная оболочка системы $\{[x(1-x)]^n\}_{n \geq 1}$ над полем $P = \mathbb{R}$, определенная на $M = [0, 1]$. Применяя теорему 6, имеем, что эта система полна в пространстве

$$C_{1/2}(M) = \left\{ f \in C[0, 1] : f(0) = f(1) = 0, \right. \\ \left. f(x) = f\left(\frac{1}{2} + \left|\frac{1}{2} - x\right| \cdot \text{sign}\left(\frac{1}{2} - x\right)\right) \quad \forall x \in (0, 1) \right\}.$$

ПРИМЕР 2. Пусть Γ – жорданова кривая, т.е. непрерывно взаимно-однозначный образ единичной окружности на комплексной плоскости. Ясно, что $\Gamma \subset \mathbb{C}$ – компакт и линейная оболочка $A(\Gamma)$ системы $\{w|_\Gamma^n\}_{n \geq 0}$ над полем $P = \mathbb{C}$ образует алгебру на Γ . Если через K обозначить единичную окружность, то понятно, что Γ и K изоморфны. Тогда из следствия 5 вытекает, что $\mathcal{B}_c(\Gamma)$ образует алгебру. В результате, применяя следствие 3, получим $\mathcal{B}_r(\Gamma) = C_r(\Gamma)$. Если Γ параметрически представить в виде $\Gamma = w\{[a, b]\}$, $w(a) = w(b)$, где $[a, b]$ – некоторый отрезок, то ясно, что $C_r(\Gamma)$ изоморфно классу

$$C^\circ[a, b] = \{f \in C[a, b] : f(a) = f(b)\}.$$

Если теперь учесть, что $\mathcal{B}_r(\Gamma)$ изоморфно к замкнутой линейной оболочке системы (1) над полем $P = \mathbb{R}$ в $C[a, b]$, то будем иметь, что (1) полна в $C^\circ[a, b]$. Этот результат установлен в работе [3] в случае, когда $w(t)$ имеет ограниченную вариацию.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] У. Рудин, *Основы математического анализа*, Мир, М., 1976.
- [2] У. Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
- [3] Ю. А. Казьмин, “Замыкание линейной оболочки некоторой системы функций”, *Сиб. матем. журн.*, 18:4 (1977), 799–805.

Б. Т. Биалов

Институт математики и механики НАН Азербайджана

E-mail: b_bilalov@mail.ru

Поступило

15.12.2003

Исправленный вариант

05.10.2006