Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Борисенко, О. В. Лейбина, Абсолютная кривизна Черна–Лашофа комплексных подмногообразий и объем грассманова образа, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 666–675

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3711>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:19:04

Абсолютная кривизна Черна–Лашофа комплексных подмногообразий и объем грассманова образа

А. А. Борисенко, О. В. Лейбина

Вводится аналог абсолютной кривизны Черна–Лашофа для комплексных подмногообразий в комплексном евклидовом пространстве. Получена связь между этой кривизной и объемом грассманова образа комплексного подмногообразия.

Библиография: 7 названий.

1. Пусть $f: F^l \rightarrow E^{l+p}$ – регулярная l -мерная поверхность в евклидовом пространстве, $T_x F^l$ и $N_x F^l$ – касательное и нормальное пространства в точке $x \in F^l$.

Классический гауссов образ для двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве имеет два обобщения в многомерном случае.

1) Рассматривается отображение, сопоставляющее каждой единичной нормали $\xi \in N_x F^l$ в нормальном пространстве точку на единичной сфере S^{l+p-1} .

2) Для поверхности F^l определяется грассманов образ $\Gamma(F^l) \subset G(l, l+p)$: каждой точке $x \in F^l$ сопоставляется касательное пространство $T_x F^l$, параллельно перенесенное в начало координат $O \in E^{l+p}$.

Сфера S^{l+p-1} и многообразие Грассмана $G(l, l+p)$ имеют канонические римановы метрики и можно говорить об $(l+p-1)$ -мерном и l -мерном объемах образов при отображениях 1 и 2 соответственно. Обозначим их $\text{Vol}(1)$ и $\text{Vol}(2)$.

Выберем в точке $x \in F^l$ ортонормированный базис $e_1, \dots, e_l$ касательного пространства $T_x F^l$.

Пусть c_k , $k \geq 0$, – объем единичной сферы S^k , A_ξ – вторая квадратичная форма относительно единичной нормали $\xi \in N_x F^l$.

Абсолютная кривизна Черна–Лашофа в точке $x \in F^l$ определяется следующим образом [1]:

$$\tau(f, x) = \frac{1}{c_{l+p-1}} \int_{S^{p-1}} |\det A_\xi| ds_{p-1},$$

где ds_{p-1} – элемент объема на сфере единичных нормалей S^{p-1} в нормальном пространстве $N_x F^l$.

Полная кривизна поверхности [2]

$$\tau(f) = \frac{1}{c_{l+p-1}} \times \text{Vol}(1) = \int_{F^l} \tau(f, x) \mu,$$

где μ – элемент объема римановой метрики, индуцированной отображением f .

С другой стороны, в [3] доказано, что $\sigma(f) = \frac{2}{c_l} \times \text{Vol}(2) = \int_{F^l} \sigma(f, x) \mu$, где $\sigma(f, x) = \frac{2}{c_l} \sqrt{\det B}$, $B = \sum_{i=1}^p A_{\xi_i}^2$, а $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ – ортонормированный базис $N_x F^l$.

Д. Ферусом доказана

ТЕОРЕМА [1]. Пусть $f: F^l \rightarrow E^{l+p}$ – регулярная поверхность, $l \geq 2$. Тогда

$$\tau(f, x) \leq \sigma(f, x),$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из условий:

- 1) первое нормальное пространство в точке $x \in F^l$ одномерно;
- 2) поверхность двумерна и вектор средней кривизны в точке $x \in F^l$ равен нулю;
- 3) $\det B = 0$, т.е. внешний нуль-индекс в точке $x \in F^l$ отличен от нуля.

Нас будет интересовать аналогичный вопрос в случае неособых комплексных поверхностей в комплексном евклидовом пространстве.

2. Пусть $f: F^l \rightarrow \mathbb{C}^{l+p}$ – неособая l -мерная комплексная поверхность в комплексном евклидовом пространстве, $T_q F^l$ и $N_q F^l$ – касательное и нормальное пространства в точке $q \in F^l$. Рассмотрим два отображения.

1) Сопоставим каждой единичной комплексной нормали $\nu \in N_q F^l$ точку в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{l+p-1}$.

2) Для комплексной поверхности F^l рассмотрим грассманов образ $\Gamma(F^l) \subset \mathbb{C}G(l, l+p)$: каждой точке $q \in F^l$ сопоставим касательное пространство $T_q F^l$, параллельно перенесенное в начало координат $O \in \mathbb{C}^{l+p}$.

Выберем в точке $q \in F^l$ ортонормированный базис $e_1, \dots, e_l$ касательного пространства $T_q F^l$.

Пусть σ_n , $n \geq 1$, – объем $\mathbb{C}P^n$, A_ν – комплексная вторая квадратичная форма комплексной поверхности F^l относительно единичной нормали $\nu \in N_q F^l$. Для комплексной поверхности F^l аналог кривизны Черна–Лашофа в точке $q \in F^l$ можно определить следующим образом:

$$\tau(f, q) = \frac{1}{\sigma_{l+p-1}} \int_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\det A_\nu|^2 d\sigma_{p-1},$$

где $d\sigma_{p-1}$ – элемент объема на комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{p-1}$.

Действительно, рассмотрим комплексную поверхность $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ как $2l$ -мерную поверхность F^{2l} в евклидовом пространстве $E^{2(l+p)}$, наделенном комплексной структурой J . Для отображения $f_{\mathbb{R}}: F^{2l} \rightarrow \mathbb{E}^{2(l+p)}$ абсолютная кривизна Черна–Лашофа

$$\tau(f_{\mathbb{R}}, q) = \frac{1}{c_{2(l+p)-1}} \int_{S^{2p-1}} |\det A_\xi| ds_{2p-1},$$

где интегрирование ведется по сфере единичных нормалей S^{2p-1} в вещественном нормальном пространстве $N_q F^{2l}$ комплексной поверхности.

Покажем, что подынтегральное выражение инвариантно на слоях S^1 расслоения Хопфа $\pi: S^{2p-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{p-1}$.

Комплексной второй квадратичной форме A_ν соответствуют две вещественные вторые квадратичные формы A_n, A_{Jn} относительно вещественных единичных нормалей $n, Jn \in N_q F^{2l}$. Так как согласно [4] $A_n J = -J A_n = -A_{Jn}$, существует базис,

относительно которого матрицы A_n и A_{Jn} имеют вид

$$A_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & -\lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_l & \\ & & & & -\lambda_l \end{pmatrix}, \quad A_{Jn} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & & & \\ \lambda_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \lambda_l \\ & & & \lambda_l & 0 \end{pmatrix},$$

где остальные элементы матриц равны нулю. Произвольную единичную нормаль из плоскости, натянутой на n, Jn , можно представить в виде $\xi = \cos \varphi n + \sin \varphi Jn$. Тогда $A_\xi = \cos \varphi A_n + \sin \varphi A_{Jn}$. Следовательно, $|\det A_\xi| = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \cdots \lambda_l^2$ и не зависит от φ .

Расслоение Хопфа является римановой субмерсией, а значит, $ds_{2p-1} = d\varphi \wedge d\sigma_{p-1}$ и $c_{2p-1} = 2\pi\sigma_{p-1}$, где $d\varphi$ – элемент длины дуги на S^1 . Следовательно,

$$\tau(f_{\mathbb{R}}, q) = \frac{1}{\sigma_{l+p-1}} \frac{1}{2\pi} \int_{S^{2p-1}} |\det A_\xi| ds_{2p-1},$$

а поскольку $|\det A_\xi| = |\det A_\nu|^2$, то в комплексной форме записи абсолютная кривизна Черна–Лашофа имеет вид

$$\tau(f, q) = \frac{1}{\sigma_{l+p-1}} \int_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\det A_\nu|^2 d\sigma_{p-1}.$$

Тогда полная кривизна комплексной поверхности $\tau(f) = \int_{F^l} \tau(f, q) \mu$, где μ – элемент объема римановой метрики, индуцированной отображением f .

Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$ – ортонормированный базис $N_q F^l$. Пусть $B = \sum_{i=1}^p \bar{A}_{\nu_i} A_{\nu_i}$. Определим

$$\sigma(f, q) = \frac{1}{\sigma_l} \det B.$$

Заметим, что $\det B$ является вещественным и неотрицательным, так как A_{ν_i} – комплексные симметричные матрицы.

Тогда

$$\sigma(f) = \int_{F^l} \sigma(f, q) \mu = \frac{1}{\sigma_l} \times \text{Vol}(\Gamma(F^l)),$$

где $\text{Vol}(\Gamma(F^l))$ – объем грассманова образа комплексной поверхности.

Действительно, рассмотрим комплексное многообразие Грассмана как симметрическое пространство $\mathbb{C}G(l, l+p) = U(l+p)/U(l) \times U(p)$. Тогда lp -мерное касательное пространство к $\mathbb{C}G(l, l+p)$ имеет вид $\mathbf{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -\bar{Z}^T \\ Z & 0 \end{pmatrix} \right\}$, где Z – комплексная $(p \times l)$ -матрица. В дальнейшем будем отождествлять касательные векторы к комплексному многообразию Грассмана $\mathbb{C}G(l, l+p)$ с комплексными $(p \times l)$ -матрицами Z . Сужение на $\mathbf{m}$ скалярного произведения $(A, B) = \frac{1}{2} \text{Tr} A \bar{B}^T$, заданного на $U(l+p)$, задает на $\mathbb{C}G(l, l+p)$ инвариантную метрику $g(Z, W) = \text{Re}(\text{Tr} \bar{W}^T Z)$ [4]. В пространстве $\mathbb{C}^{l+p}$ выберем систему координат так, чтобы точка q совпала с началом координат O , а касательное пространство $T_q F^l$ – с подпространством $z^1, \dots, z^l$. Комплексную поверхность F^l в окрестности точки q можно задать явно, в виде

$z^{l+\alpha} = f^\alpha(z^1, \dots, z^l)$, $\alpha = 1, \dots, p$, где f^α – голоморфные функции многих комплексных переменных $z^j = x^j + iy^j$ и $f^\alpha(0) = \partial f^\alpha / \partial z^i|_0 = 0$, $i = 1, \dots, l$. Элементы матриц комплексных вторых квадратичных форм A_{ν_α} относительно нормалей ν_α комплексной поверхности F^l в точке q будут иметь вид $a_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial z^i \partial z^j}|_0$, $\alpha = 1, \dots, p$. Касательным пространством к грассманову образу $\Gamma(F^l) \subset \mathbb{C}G(l, l+p)$ в точке $\Gamma(q) = 0$ является l -мерное комплексное линейное пространство, натянутое на векторы Z_i , $i = 1, \dots, l$, с элементами $(Z_i)_{\alpha\beta} = a_{\beta i}^\alpha$ [5]. Значит, вдоль грассманова образа

$$g(Z_i, Z_j) = \operatorname{Re}(Tr \bar{Z}_j^T Z_i) = \operatorname{Re} \sum_{\beta=1}^l \sum_{\alpha=1}^p \bar{a}_{\beta j}^\alpha a_{\beta i}^\alpha,$$

$$g(Z_i, iZ_j) = -\operatorname{Re}(iTr \bar{Z}_j^T Z_i) = \operatorname{Im}(Tr \bar{Z}_j^T Z_i) = \operatorname{Im} \sum_{\beta=1}^l \sum_{\alpha=1}^p \bar{a}_{\beta j}^\alpha a_{\beta i}^\alpha.$$

Матрица коэффициентов первой квадратичной формы грассманова образа имеет вид

$$g_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} g^1 & g^2 \\ -g^2 & g^1 \end{pmatrix},$$

где g^1 – симметричная $(l \times l)$ -матрица с элементами $g_{ij}^1 = g(Z_i, Z_j)$, g^2 – кососимметричная $(l \times l)$ -матрица с элементами $g_{ij}^2 = g(Z_i, iZ_j)$. Следовательно, $\sqrt{\det g_{\mathbb{R}}} = \det B$, поскольку матрица $g_{\mathbb{R}}$ является о веществлении матрицы $B = \sum_{i=1}^p \bar{A}_{\nu_i} A_{\nu_i}$ с элементами $b_{ij} = \sum_{\beta=1}^l \sum_{\alpha=1}^p \bar{a}_{\beta j}^\alpha a_{\beta i}^\alpha$. Таким образом, элемент объема грассманова образа имеет вид $\det B \mu$, что и требовалось доказать.

Для комплексной поверхности F^l определяется комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q)$ в точке q . Он равен максимальной размерности подпространства $L(q)$ касательного пространства $T_q F^l$ такого, что $A_\nu y = 0$ для любого вектора $y \in L(q)$ и для любой нормали $\nu \in N_q F^l$. Если рассматривать комплексную поверхность $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ как $2l$ -мерную поверхность F^{2l} в евклидовом пространстве $E^{2(l+p)}$, наделенном комплексной структурой J , то подпространство вещественного касательного пространства $T_q F^{2l}$, аннулирующее вещественные вторые квадратичные формы, будет инвариантным относительно J . Следовательно, вещественный нуль-индекс $\mu_{\mathbb{R}}(q) = 2\mu_{\mathbb{C}}(q)$. Почти комплексная структура на комплексной поверхности $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ индуцирует почти комплексную структуру на $\Gamma(F^l) \subset \mathbb{C}G(l, l+p)$. Если на всей комплексной поверхности $\mu_{\mathbb{C}} = 0$, то грассманов образ $\Gamma(F^l)$ будет регулярным l -мерным комплексным подмногообразием в $\mathbb{C}G(l, l+p)$.

Первым нормальным пространством $N_1(q)$ комплексной поверхности F^{2l} в точке q называется ортогональное дополнение к подпространству $\{n \in N_q F^{2l} \mid A_n = 0\}$ в вещественном нормальном пространстве $N_q F^{2l}$, где A_n – вторая квадратичная форма относительно вещественной нормали $n \in N_q F^{2l}$. Очевидно, что комплексная размерность $\dim_{\mathbb{C}} N_1(q)$ первого нормального пространства равна размерности пространства комплексных вторых квадратичных форм комплексной поверхности F^l в точке q , а вещественная размерность $\dim_{\mathbb{R}} N_1(q) = 2 \dim_{\mathbb{C}} N_1(q)$.

Для комплексных поверхностей справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f: F^l \rightarrow \mathbb{C}^{l+p}$ – неособая комплексная поверхность, $l \geq 2$. Тогда

$$\tau(f, q) \leq \sigma(f, q), \quad (1)$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере одно из условий:

- 1) первое нормальное пространство $N_1(q)$ комплексной поверхности F^l в точке q одномерно ($\dim_{\mathbb{C}} N_1(q) = 1$);
- 2) $\det B = 0$, т.е. комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q)$ в точке $q \in F^l$ отличен от нуля.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f: F^l \rightarrow \mathbb{C}^{l+p}$ – неособая комплексная поверхность, $l \geq 2$. Если для любой точки $q \in F^l$ комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q) = 0$ и $\tau(f, q) = \sigma(f, q)$, то F^l является комплексной гиперповерхностью в $\mathbb{C}^{l+1} \subset \mathbb{C}^{l+p}$.

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим l -мерную комплексную поверхность $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ как $2l$ -мерную поверхность в евклидовом пространстве $E^{2(l+p)}$, наделенном комплексной структурой J . Комплексной второй квадратичной форме $A_{\nu} = C + iD$, где C и D – вещественные $(l \times l)$ -матрицы, будут соответствовать две вещественные вторые квадратичные формы относительно нормалей $\xi, J\xi \in N_q F^{2l}$:

$$A_{\xi} = \begin{pmatrix} C & -D \\ -D & -C \end{pmatrix}, \quad A_{J\xi} = \begin{pmatrix} D & C \\ C & -D \end{pmatrix}.$$

Согласно неравенству Адамара для вещественных матриц

$$|\det A_{\xi}| \leq (A_{\xi}e'_1, A_{\xi}e'_1)^{1/2} \cdots (A_{\xi}e'_l, A_{\xi}e'_l)^{1/2} (A_{\xi}Je'_1, A_{\xi}Je'_1)^{1/2} \cdots (A_{\xi}Je'_l, A_{\xi}Je'_l)^{1/2},$$

где $e'_1, e'_2, \dots, e'_l, Je'_1, Je'_2, \dots, Je'_l$ – ортонормированный базис относительно эрмитова скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ в вещественном касательном пространстве $T_q F^{2l}$ (для любых $X, Y \in T_q F^{2l}$ имеем $(X, Y) = (JX, JY)$).

Так как $A_{\xi}J + JA_{\xi} = 0$, то $(A_{\xi}Je'_k, A_{\xi}Je'_k) = (A_{\xi}e'_k, A_{\xi}e'_k)$, $k = 1, \dots, l$. Значит,

$$|\det A_{\xi}| \leq (A_{\xi}e'_1, A_{\xi}e'_1) \cdots (A_{\xi}e'_l, A_{\xi}e'_l).$$

Очевидно, что $e'_k = \begin{pmatrix} e_k \\ 0 \end{pmatrix}$, где $e_1, \dots, e_l$ – ортонормированный базис комплексного касательного пространства $T_q F^l$.

Покажем, что $(A_{\xi}e'_k, A_{\xi}e'_k) = \langle A_{\nu}e_k, A_{\nu}e_k \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – эрмитово скалярное произведение в комплексном касательном пространстве $T_q F^l$. Действительно,

$$A_{\xi}e'_k = \begin{pmatrix} Ce_k \\ -De_k \end{pmatrix}, \quad (A_{\xi}e'_k, A_{\xi}e'_k) = \langle Ce_k, Ce_k \rangle + \langle De_k, De_k \rangle.$$

Рассмотрев правую часть

$$\langle A_{\nu}e_k, A_{\nu}e_k \rangle = \langle (C + iD)e_k, (C + iD)e_k \rangle = \langle Ce_k, Ce_k \rangle + \langle De_k, De_k \rangle,$$

получаем требуемое.

Следовательно, поскольку $|\det A_{\xi}| = |\det A_{\nu}|^2$, получаем

$$|\det A_{\nu}|^2 \leq \langle A_{\nu}e_1, A_{\nu}e_1 \rangle \cdots \langle A_{\nu}e_l, A_{\nu}e_l \rangle. \quad (2)$$

Тогда

$$\int_{CP^{p-1}} |\det A_{\nu}|^2 d\sigma_{p-1} \leq \int_{CP^{p-1}} \langle A_{\nu}e_1, A_{\nu}e_1 \rangle \cdots \langle A_{\nu}e_l, A_{\nu}e_l \rangle d\sigma_{p-1}.$$

Пусть $\|\cdot\|_n - L^n$ -норма на $\mathbb{C}P^{p-1}$. Используя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\det A_\nu|^2 d\sigma_{p-1} &\leq \int_{\mathbb{C}P^{p-1}} \langle A_\nu e_1, A_\nu e_1 \rangle \cdots \langle A_\nu e_l, A_\nu e_l \rangle d\sigma_{p-1} \\ &\leq \|\langle A_\nu e_1, A_\nu e_1 \rangle\|_l \cdots \|\langle A_\nu e_l, A_\nu e_l \rangle\|_l. \end{aligned} \quad (3)$$

С помощью унитарного преобразования выберем ортонормированный базис нормалей $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p$ в $N_q F^l$ так, чтобы $\langle A_{\nu_i} e_1, A_{\nu_j} e_1 \rangle = 0$ для всех $i \neq j$. Тогда $\langle A_\nu e_1, A_\nu e_1 \rangle = \sum_{i=1}^p |\alpha^i|^2 \lambda_i$, где $\alpha^i = \langle \nu, \nu_i \rangle$, $\lambda_i = \langle A_{\nu_i} e_1, A_{\nu_i} e_1 \rangle \geq 0$.

По определению $B = \sum_{i=1}^p \bar{A}_{\nu_i} A_{\nu_i}$. Следовательно,

$$\langle B e_1, e_1 \rangle = \sum_{i=1}^p \langle \bar{A}_{\nu_i} A_{\nu_i} e_1, e_1 \rangle = \sum_{i=1}^p \langle A_{\nu_i} e_1, A_{\nu_i} e_1 \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i,$$

так как A_{ν_i} — симметричные матрицы.

Используя неравенство Минковского, получаем, что

$$\|\langle A_\nu e_1, A_\nu e_1 \rangle\|_l = \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i |\alpha^i|^2 \right\|_l \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \|\alpha^i\|_l^2. \quad (4)$$

Так как $\|\alpha^i\|_l^2 = \|\alpha^j\|_l^2$ для всех $i, j = 1, \dots, p$, то

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \|\alpha^i\|_l^2 = \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \right) \|\alpha^1\|_l^2 = \langle B e_1, e_1 \rangle \|\alpha^1\|_l^2.$$

Покажем, что

$$\|\alpha^1\|_l^2 = \left(\int_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\alpha^1|^{2l} d\sigma_{p-1} \right)^{1/l} = \left(\frac{\sigma_{l+p-1}}{\sigma_l} \right)^{1/l}.$$

Действительно,

$$\int_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\alpha^1|^{2l} d\sigma_{p-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^{2p-1}} |\alpha^1|^{2l} ds_{2p-1}.$$

В комплексном пространстве $\mathbb{C}^p$, рассматриваемом как вещественное евклидово пространство E^{2p} , можно задать единичную сферу S^{2p-1} следующим образом:

$$S^{2p-1} = \left\{ (z_1, \dots, z_p) \mid \sum_{i=1}^p |z_i|^2 = 1 \right\}.$$

Тогда

$$\begin{cases} z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \\ \dots\dots\dots \\ z_p = r_p e^{i\varphi_p}, \end{cases}$$

где $r_i = |z_i| \geq 0$, $0 \leq \varphi_i < 2\pi$, $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_p^2 = 1$. Следовательно, r_i , $i = 1, \dots, p$, можно представить в виде

$$\begin{cases} r_1 = \sin \psi_{p-1} \sin \psi_{p-2} \cdots \sin \psi_2 \sin \psi_1, \\ r_2 = \sin \psi_{p-1} \sin \psi_{p-2} \cdots \sin \psi_2 \cos \psi_1, \\ r_3 = \sin \psi_{p-1} \sin \psi_{p-2} \cdots \cos \psi_2, \\ \dots\dots\dots \\ r_p = \cos \psi_{p-1}, \end{cases}$$

где $0 \leq \psi_i \leq \pi/2$, так как $r_i \geq 0$. В вещественных координатах параметрическое задание сферы S^{2p-1} имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos \varphi_1, \\ y_1 = r_1 \sin \varphi_1, \\ \dots\dots\dots \\ x_p = r_p \cos \varphi_p, \\ y_p = r_p \sin \varphi_p. \end{cases}$$

Во введенной системе координат ненулевые элементы матрицы $\tilde{G}$ первой квадратичной формы сферы S^{2p-1} будут следующими:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= \sin^2 \psi_{p-1} \sin^2 \psi_{p-2} \cdots \sin^2 \psi_2, \\ \tilde{g}_{22} &= \sin^2 \psi_{p-1} \sin^2 \psi_{p-2} \cdots \sin^2 \psi_3, \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{p-2\ p-2} &= \sin^2 \psi_{p-1}, \\ \tilde{g}_{p-1\ p-1} &= 1, \\ \tilde{g}_{p+k-1\ p+k-1} &= r_k^2, \quad k = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Элемент объема сферы S^{2p-1} имеет вид

$$ds_{2p-1} = \sqrt{\det \tilde{G}} d\varphi_1 \cdots d\varphi_p d\psi_1 \cdots d\psi_{p-1},$$

где $\sqrt{\det \tilde{G}} = \sin^{p-2} \psi_{p-1} \sin^{p-3} \psi_{p-2} \cdots \sin^2 \psi_3 \sin \psi_2 r_1 r_2 \cdots r_p$.

Не ограничивая общности, можем считать, что модуль первой координаты комплексной единичной нормали ν на единичной сфере S^{2p-1} равен $|\alpha^1| = r_p$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{S^{2p-1}} |\alpha^1|^{2l} ds_{2p-1} &= \frac{1}{2\pi} \int_{S^{2p-1}} r_p^{2l} ds_{2p-1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{S^{2p-3}} \cos^{2l+1} \psi_{p-1} \sin^{2p-3} \psi_{p-1} ds_{2p-3} d\psi_{p-1} d\varphi_p \\ &= c_{2p-3} \int_0^{\pi/2} \cos^{2l+1} \psi_{p-1} \sin^{2p-3} \psi_{p-1} d\psi_{p-1}, \end{aligned}$$

где c_{2p-3} — объем единичной сферы S^{2p-3} . Объем $\mathbb{C}P^{l+p-1}$

$$\sigma_{l+p-1} = \int_{\mathbb{C}P^{l+p-1}} d\sigma_{l+p-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^{2(l+p)-1}} ds_{2(l+p)-1}.$$

Выберем систему координат так, чтобы радиус-вектор точки на сфере $S^{2(l+p)-1}$ имел вид

$$\vec{\mathbf{r}} = \cos \alpha \vec{\mathbf{r}}_1 + \sin \alpha \vec{\mathbf{r}}_2,$$

$\alpha \in [0, \pi/2]$, $\vec{\mathbf{r}}_1$ и $\vec{\mathbf{r}}_2$ — радиус-векторы точек на сферах S^{2l+1} и S^{2p-3} , расположенных в ортогональных непересекающихся подпространствах E^{2l+2} и E^{2p-2} соответственно. Тогда первая квадратичная форма сферы $S^{2(l+p)-1}$ примет вид

$$d\zeta^2 = d\alpha^2 + \cos^2 \alpha d\zeta_1^2 + \sin^2 \alpha d\zeta_2^2,$$

где $d\zeta_1^2$ и $d\zeta_2^2$ – первые квадратичные формы сфер S^{2l+1} и S^{2p-3} соответственно. Элемент объема сферы $S^{2(l+p)-1}$ будет следующим:

$$ds_{2(l+p)-1} = \cos^{2l+1} \alpha \sin^{2p-3} \alpha d\alpha ds_{2l+1} ds_{2p-3}.$$

Значит, объем сферы $S^{2(l+p)-1}$ равен

$$c_{2(l+p)-1} = c_{2p-3} c_{2l+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2l+1} \alpha \sin^{2p-3} \alpha d\alpha.$$

Следовательно,

$$c_{2p-3} \int_0^{\pi/2} \cos^{2l+1} \alpha \sin^{2p-3} \alpha d\alpha = \frac{c_{2(l+p)-1}}{c_{2l+1}} = \frac{\sigma_{l+p-1}}{\sigma_l},$$

так как $c_{2k+1} = 2\pi\sigma_k$.

Применяя аналогичные рассуждения к каждому сомножителю в (3), получаем

$$\int_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\det A_\nu|^2 d\sigma_{p-1} \leq \frac{\sigma_{l+p-1}}{\sigma_l} \langle Be_1, e_1 \rangle \cdots \langle Be_l, e_l \rangle.$$

Выбирая в касательном пространстве $T_q F^l$ базис из собственных векторов $e_1, \dots, e_l$ матрицы B , получаем, что

$$\frac{1}{\sigma_{l+p-1}} \int_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\det A_\nu|^2 d\sigma_{p-1} \leq \frac{1}{\sigma_l} \det B.$$

Следовательно, $\tau(f, q) \leq \sigma(f, q)$. Таким образом, неравенство (1) доказано.

Пусть $\tau(f, q) = \sigma(f, q)$. Тогда в неравенствах (2), (3) и (4) также должно быть равенство. Пусть $\det B > 0$ и $e_1, \dots, e_l$ – собственные векторы матрицы B . Равенство в неравенстве Минковского (4) выполняется тогда и только тогда, когда любые две из функций $\lambda_i |\alpha^i|^2 = \lambda_i |\langle \nu, \nu_i \rangle|^2$ пропорциональны с положительными коэффициентами. Следовательно, существует нормаль ζ_1 такая, что $\langle A_\nu e_1, A_\nu e_1 \rangle = \sum_{i=1}^p \lambda_i |\alpha^i|^2 = |\langle \nu, \zeta_1 \rangle|^2$. Аналогично, существуют нормали ζ_k , $k = 2, \dots, l$, такие, что $\langle A_\nu e_k, A_\nu e_k \rangle = |\langle \nu, \zeta_k \rangle|^2$. Тогда равенство в неравенстве Гёльдера (3) примет вид

$$\int_{\mathbb{C}P^{p-1}} |\langle \nu, \zeta_1 \rangle|^2 \cdots |\langle \nu, \zeta_l \rangle|^2 d\sigma_{p-1} = \| |\langle \nu, \zeta_1 \rangle|^2 \|_l \cdots \| |\langle \nu, \zeta_l \rangle|^2 \|_l$$

и будет выполняться тогда и только тогда, когда любые две из функций $|\langle \nu, \zeta_i \rangle|^2$, $i = 1, \dots, l$, пропорциональны с положительными коэффициентами. То есть существуют такие константы $\theta_k > 0$, $k = 2, \dots, l$, что $\langle \nu, \zeta_k \rangle \langle \nu, \zeta_k \rangle = \theta_k \langle \nu, \zeta_1 \rangle \langle \nu, \zeta_1 \rangle$. В координатах получаем

$$\sum_i \nu^i \bar{\zeta}_k^i \sum_j \bar{\nu}^j \zeta_k^j = \theta_k \sum_i \nu^i \bar{\zeta}_1^i \sum_j \bar{\nu}^j \zeta_1^j,$$

т.е.

$$\sum_{i,j} \nu^i \bar{\nu}^j (\bar{\zeta}_k^i \zeta_k^j - \theta_k \bar{\zeta}_1^i \zeta_1^j) = 0$$

для произвольной единичной комплексной нормали ν . Значит, для всех $i, j = 1, \dots, l+p$ имеем $\bar{\zeta}_k^i \zeta_k^j = \theta_k \bar{\zeta}_1^i \zeta_1^j$. Следовательно, $\zeta_k^j / \zeta_1^j = \zeta_k^m / \zeta_1^m$, т.е. координаты

векторов ζ_k и ζ_1 пропорциональны и векторы коллинеарны. Значит, все векторы $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_l$ расположены на некоторой комплексной прямой. Тогда, если нормаль ν ортогональна этой прямой, то

$$\langle A_\nu e_k, A_\nu e_k \rangle = |\langle \nu, \zeta_k \rangle|^2 = 0$$

для всех $k = 1, \dots, l$. Значит, $A_\nu = 0$. Следовательно, получаем условие 1 в формулировке теоремы. Очевидно, что выполнение условия 2 влечет за собой равенство в (1).

4. Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 следует, что в произвольной точке $q \in F^l$ комплексная размерность первого нормального пространства $N_1(q)$ комплексной поверхности $\dim_{\mathbb{C}} N_1(q) = 1$.

Пусть $NF^{2l} = \bigcup_{q \in F^{2l}} N_q F^{2l}$ – вещественное нормальное расслоение комплексной поверхности $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ как подмногообразия F^{2l} в евклидовом пространстве $E^{2(l+p)}$.

Векторное подрасслоение $E \subset NF^{2l}$ называется *параллельным* относительно нормальной связности $\nabla^\perp$, если

$$\forall \xi \in E(q), \quad \forall X \in T_q F^{2l} \quad \text{выполнено условие} \quad \nabla_X^\perp \xi \in E(q).$$

ЛЕММА [6]. Пусть $F^l \subset \mathbb{C}^{l+p}$ – неособая комплексная поверхность, $l \geq 2$. Если для любой точки $q \in F^l$ комплексная размерность первого нормального пространства $\dim_{\mathbb{C}} N_1(q) = 1$ и комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q) \leq l - 2$, то вещественное подрасслоение $\bigcup_{q \in F^{2l}} N_1(q)$ параллельно относительно нормальной связности в вещественном нормальном расслоении NF^{2l} .

Так как $l \geq 2$ и комплексный внешний нуль-индекс $\mu_{\mathbb{C}}(q) = 0$, то, применяя лемму, получаем, что $\bigcup_{q \in F^{2l}} N_1(q)$ – параллельное вещественное подрасслоение вещественного нормального расслоения NF^{2l} .

Теорема Эрбахера [7] утверждает, что если первое нормальное пространство $N_1(q)$ связного n -мерного подмногообразия M^n в $(n+m)$ -мерном римановом многообразии $M_{\tilde{c}}^{n+m}$ постоянной секционной кривизны $\tilde{c}$ параллельно относительно нормальной связности и постоянна размерность N_1 равна k , то существует вполне геодезическое подмногообразие N^{n+k} в $M_{\tilde{c}}^{n+m}$ размерности $n+k$ такое, что $M^n \subset N^{n+k}$. Это означает, что коразмерность вложения может быть редуцирована к k .

Поскольку в рассматриваемом случае в произвольной точке $q \in F^l$ вещественная размерность первого нормального пространства комплексной поверхности

$$\dim_{\mathbb{R}} N_1(q) = 2,$$

то из теоремы Эрбахера следует, что вещественная коразмерность вложения может быть редуцирована к 2. Так как F^l – комплексное подмногообразие, получаем, что F^l – комплексная гиперповерхность в $\mathbb{C}^{l+1} \subset \mathbb{C}^{l+p}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Ferus, “On the volume of the generalized Gauss map”, *Geom. Dedicata*, **14**:3 (1983), 237–242.
- [2] D. Ferus, *Totale Absolutkrümmung in Differentialgeometrie und -topologie*, Lecture Notes in Math., **66**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1968.

- [3] K. Leichtweiss, “Über eine Art von Krümmungsinvarianten beliebiger Untermannigfaltigkeiten des n -dimensionalen euklidischen Raums”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **26** (1963/64), 155–190.
- [4] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, т. 2, Наука, М., 1969.
- [5] А. А. Борисенко, О. В. Лейбина, “Классификация точек двумерных и трехмерных комплексных поверхностей по грассманову образу”, *Матем. физика, анализ, геометрия*, **9**:4 (2002), 572–594.
- [6] О. В. Лейбина, “О комплексных подмногообразиях с максимальной голоморфной кривизной грассманова образа”, *Матем. заметки*, **81**:4 (2007), 561–568.
- [7] J. Erbacher, “Reduction of the codimension of an isometric immersion”, *J. Differential Geom.*, **5** (1971), 333–340.

А. А. Борисенко

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

E-mail: borisenk@univer.kharkov.ua

Поступило

13.02.2004

Исправленный вариант

23.05.2005

О. В. Лейбина

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина

E-mail: leybina@univer.kharkov.ua