Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Н. Енгибарян, Об уравнении свертки с положительным ядром, представленным через знакопеременную меру, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 693–702

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 08:33:46

УДК 517.968.4

Об уравнении свертки с положительным ядром, представленным через знакопеременную меру

Б. Н. Енгибарян

Рассматривается интегральное уравнение свертки на полупрямой или на конечном промежутке с ядром $K(x-t) = \int_a^b e^{-|x-t|s} d\sigma(s)$ со знакопеременной мерой $d\sigma$ при выполнении условий

$$K(x) > 0, \quad \int_a^b \frac{1}{s} |d\sigma(s)| < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 2 \int_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) \leq 1.$$

Строится решение нелинейного уравнения Амбарцумяна

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_a^b \frac{\varphi(p)}{s+p} d\sigma(p),$$

с помощью которого может быть эффективно решено исходное уравнение свертки.

Библиография: 15 названий.

1. Введение. Рассмотрим интегральное уравнение свертки

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t) dt, \quad r \leq \infty, \quad (1)$$

с четной ядерной функцией $K \in L_1(-\infty, \infty)$. Основное внимание будет уделено случаю, когда K представлена через экспоненты

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|s} G(s) ds, \quad (2)$$

или в виде интеграла Стильеса

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s), \quad 0 \leq a < b \leq \infty. \quad (3)$$

Здесь σ – функция локально ограниченной вариации, удовлетворяющая условию

$$\mu := 2 \int_a^b \frac{1}{s} |d\sigma(s)| < +\infty. \quad (4)$$

Работа выполнена при поддержке МНТЦ, грант № А-823.

© Б. Н. Енгибарян, 2007

При $r = +\infty$ (1) представляет собой интегральное уравнение Винера–Хопфа.

Различным классам уравнений (1) посвящены многочисленные исследования (см. [1]–[14]). Уравнения типа (1) с ядром (2) широко применяются в математической физике (см. [1]–[4]). К их числу относится основное интегральное уравнение переноса излучения. Для таких уравнений развиты достаточно точная теория и эффективные методы решения, основанные на применении уравнения В. Амбарцумяна (УА) (см. [1]–[3], [5], [6], [10]–[14]):

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_a^b \frac{\varphi(p)}{s+p} d\sigma(p). \quad (5)$$

С использованием УА удастся эффективно решить не только уравнение Винера–Хопфа, но и уравнение (1) с ядром (2) на конечном промежутке и ряд других уравнений свертки, ассоциированных с ядром K (с суммарно-разностным ядром и др.; см. [6], [10], [15]).

Наиболее точные результаты с применением УА получены в случае положительной меры $d\sigma$. Ряд положений теории уравнения (1) с ядром (3) с положительной мерой $d\sigma$ допускает распространение на случай заряда (неположительной меры) $d\sigma$, когда функция σ немонотонная или убывающая. Уравнения типа (1) с ядром (2) с положительными мерами встречаются в ряде приложений. Такие задачи возникают в теории переноса излучения при анизотропном рассеянии (см. [1]–[3]) или в результате применения метода сдвига альбеда (см. [13], [14]), в задачах фильтрации случайных процессов (см. [6]) и др.

При $\mu \leq 1$ простые итерации для (5) сходятся в соответствующем банаховом пространстве $L(\sigma)$ (см. [5], [6]). В случае, когда мера $d\sigma$ положительна, условие $\mu \leq 1$ является точным: оно необходимо и достаточно для существования (вещественного) решения УА. В случае неположительной меры $d\sigma$ условие $\mu \leq 1$ является достаточно жестким. Поэтому возникает необходимость в разработке математически обоснованных точных методов численно-аналитического решения УА в случае знакопеременной меры $d\sigma$, когда $\mu > 1$.

В настоящей работе получены точные результаты по УА в случае, когда функция K на $(0, \infty)$ является не вполне монотонной, а просто неотрицательной. Считается, что мера $d\sigma$ знакопеременная, а ядерная функция K положительна. Условие $\mu \leq 1$ заменяется более слабым условием

$$K(x) > 0, \quad \mu < +\infty, \quad \lambda := \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 2 \int_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) \leq 1, \quad (6)$$

которое охватывает различные случаи с $\mu > 1$, представляющие прикладной интерес. Заметно расширяется круг уравнений (1), допускающих эффективное решение. Наиболее сложным и интересным является консервативный (неэллиптический) случай $\lambda = 1$. Тогда решение уравнения (5) приводит к новому результату по факторизации необратимого интегрального оператора Винера–Хопфа с вырождающимся символом.

2. О нелинейном уравнении факторизации (НУФ) оператора Винера–Хопфа. В наших дальнейших рассмотрениях существенным образом будет использован метод нелинейных уравнений факторизации (НУФ) Н. Б. Енгибаряна в случае интегральных операторов Винера–Хопфа (см. [5], [6]), включая связь НУФ с уравнением Амбарцумяна.

Пусть I – единичный оператор, а $\hat{K}$ – интегральный оператор Винера–Хопфа с симметрическим ядром:

$$\begin{aligned}\hat{K}f(x) &= \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \\ K &\in L_1(-\infty, \infty), \quad K(-x) = K(x).\end{aligned}\quad (7)$$

Рассмотрим следующую факторизацию Винера–Хопфа:

$$I - \hat{K} = (I - \hat{V}_-)(I - \hat{V}_+), \quad (8)$$

где $\hat{V}_\pm$ суть искомые вольтерровы операторы с одной и той же ядерной функцией V (что обусловлено четностью функции K):

$$\hat{V}_+f(x) = \int_0^x V(x-t)f(t)dt, \quad \hat{V}_-f(x) = \int_x^\infty V(t-x)f(t)dt, \quad V \in L_1(0, \infty).$$

Разложение (8) эквивалентно следующему НУФ относительно V :

$$V(x) = K(x) + \int_0^\infty V(t)V(x+t)dt, \quad x > 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) обладает так называемым *основным решением* V , которое является пределом в $L_1^+ = L_1(0, \infty)$ следующих простых итераций:

$$V_{n+1}(x) = K(x) + \int_0^\infty V_n(t)V_n(x+t)dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad V_0 = 0. \quad (10)$$

Итерации V_n обладают свойствами

$$0 \leq V_n \uparrow V \in L_1^+, \quad \int_0^x V(x)dx = 1 - \sqrt{1 - \lambda}. \quad (11)$$

Функция V является минимальным положительным решением НУФ (9).

В консервативном случае $\lambda = 1$ символ оператора $I - \hat{K}$ вырождается. Тогда необратимыми в пространствах L_p^+ , $p \geq 1$, являются как оператор $I - \hat{K}$, так и операторы $I - \hat{V}_\pm$.

Ниже нами будет изучен итерационный процесс для уравнения (9), отличный от (10). Для этого предварительно рассмотрим следующее линейное интегральное уравнение Вольтерра, именуемое *верхним уравнением восстановления*:

$$f(x) = g(x) + \int_x^\infty W(t-x)f(t)dt$$

или

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty W(t)f(x+t) dt. \quad (12)$$

Предполагается, что

$$W \geq 0, \quad \gamma = \int_0^\infty W(x) dx \leq 1, \quad 0 \leq g \in L_1^+. \quad (13)$$

Приведем некоторые известные свойства уравнения (12) (см. [6]). Пусть C_0^+ – пространство функций, непрерывных на $[0, \infty)$ и стремящихся к 0 в ∞ . Уравнение (12) имеет единственное решение f в $L_1^+ + C_0^+$. Это (основное) решение является минимальным положительным решением уравнения. Если $\gamma < 1$, то $f \in L_1^+$. Решение f монотонно зависит от ядра W : если f_1, f_2 являются основными решениями (12) при $W = W_1$ и $W = W_2$ соответственно и $W_2 \geq W_1$, то $f_2 \geq f_1$.

Вернемся к НУФ (9). Рассмотрим следующую последовательность уравнений вида (12) относительно U_{n+1} :

$$U_{n+1}(x) = K(x) + \int_0^x U_n(t)U_{n+1}(x+t) dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad U_0 = 0, \quad x > 0. \quad (14)$$

В (14) роль ядра W играет U_n . Под U_{n+1} будем подразумевать минимальное решение. С использованием перечисленных выше свойств минимального решения уравнения (12) индукцией по n доказывается, что из соотношений (14) рекуррентно по n определяется последовательность U_n , $0 \leq U_n \uparrow$ по n , $U_n \leq V$, где V – основное уравнение НУФ (9). Согласно теореме Лебега имеем

$$U_n \rightarrow U \leq V \quad \text{в } L_1^+, \quad \alpha := \int_0^\infty U_n(x) dx \leq \gamma. \quad (15)$$

Совершая в (14) предельный переход (см. [6]), получаем, что функция $U \leq V$ является решением НУФ (9). Поскольку V – минимальное положительное решение уравнения (9), то $U = V$, $\alpha_n \rightarrow \gamma$. Нами доказана

ЛЕММА 1. *Итерационный процесс (14) определяет последовательность U_n в L_1^+ , причем $0 \leq U_n \uparrow V$ в L_1^+ .*

Покажем, что последнее неравенство в (15) строгое.

ЛЕММА 2. *Имеет место неравенство*

$$\alpha_n < \gamma (\leq 1) \quad \forall n < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем от противного. Обозначим через $m \geq 0$ наибольшее значение n , при котором $\alpha_n < \gamma$. Из леммы 1 и равенства $\alpha_{m+1} = \gamma$ следует $U_{m+1} = V$. Поэтому из (14) имеем

$$V(x) = K(x) + \int_0^\infty U_m(t)V(x+t) dt. \quad (16)$$

Из (9) и (16) получаем

$$\int_0^\infty \delta(t)V(x+t) dt = 0, \quad (17)$$

где $\delta(t) = V(t) - U_m(t) \geq 0$.

Интегрируя равенство (17) по x от 0 до ∞ , получаем

$$\int_0^\infty V(z) dz \int_0^z \delta(t) dt = 0.$$

В силу неотрицательности подынтегральной функции и неравенства $V(z) \geq \delta(z)$ приходим к равенству

$$\frac{d}{dz} \left[\int_0^z \delta(t) dt \right]^2 = 0, \quad z > 0,$$

что приводит к равенству $\delta(t) \equiv 0$, т.е. $\alpha_m = \gamma$. Лемма доказана.

3. Функция Амбарцумяна. Ниже нами будет введена и изучена функция Амбарцумяна независимо от уравнения (5) и представления (4).

Пусть черта над функцией означает переход к преобразованию Лапласа

$$\bar{f}(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx} dx. \quad (18)$$

Если $f \in L_1^+$, то функция $\bar{f}$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ и непрерывна в замкнутой полуплоскости $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Введем функцию Амбарцумяна, ассоциированную с уравнением (1):

$$\varphi(s) = [1 - \bar{V}(s)]^{-1}, \quad \varphi(+\infty) = 1, \quad (19)$$

где V – основное решение уравнения (9) при выполнении условий (7). Из свойств (11) функции V следует, что функция $\varphi(s)$ положительна, непрерывна и убывает на $(0, \infty]$.

Очевидно, если $0 \leq f \leq V$ и $\int_0^\infty f(x) dx < \gamma$, то

$$1 \leq [1 - \bar{f}(s)]^{-1} \leq \varphi(s), \quad s > 0. \quad (20)$$

Для изучения поведения функции φ при $s \rightarrow 0$ в консервативном случае мы воспользуемся следующим простым свойством преобразования Лапласа. Пусть функция V , $0 \leq V \leq L_1^+$, обладает конечным первым моментом ν_1 , т.е.

$$\nu_k = \int_0^\infty x^k V(x) dx < +\infty, \quad k = 0, 1.$$

Тогда имеет место асимптотика

$$\bar{V}(s) = \nu_0 + \nu_1 s + o(s), \quad s \rightarrow 0. \quad (21)$$

Если в консервативном случае исходное ядро K обладает конечным моментом второго порядка:

$$m_2 = 2 \int_0^\infty x^2 K(x) dx < +\infty,$$

то функция V обладает конечным первым моментом (см. [6]):

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{1}{2}m_2} < +\infty.$$

Из (19) и (21) получаем следующую асимптотику в консервативном случае $\gamma = \nu_0 = 1$:

$$\varphi(s) = (\nu_1 s)^{-1} + o\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow 0. \quad (22)$$

Мы пришли к следующей лемме.

ЛЕММА 3. а) Пусть $\gamma < 1$ (т.е. $\lambda < 1$). Тогда

$$\varphi \in C[0, \infty], \quad 1 \leq \varphi(s) \leq (1 - \gamma)^{-1} = (1 - \lambda)^{-1/2}.$$

б) Если $\gamma = 1$, то $\varphi \in C(0, \infty]$, $\varphi(0+) = +\infty$ и имеет место асимптотика (22).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $\nu_1 = +\infty$ асимптотика (22) остается в силе, если считать $\nu_1^{-1} = 0$.

Имеет место следующая легко проверяемая лемма.

ЛЕММА 4. Пусть последовательность $f_n \in L_1^+$ обладает свойством $0 \leq f_n \uparrow V$ в L_1^+ . Тогда $\bar{f}_n(s) \in C[0, \infty]$, $\bar{f}_n(s) \uparrow \bar{V}(s)$ равномерно. Если $\gamma < 1$, то $\psi_n(s) := [1 - \bar{f}_n(s)]^{-1} \in C[0, \infty]$, $\psi_n \rightarrow \varphi$ равномерно на $[0, \infty]$. Если же $\gamma = 1$, то $\psi_n(s) \in C(0, \infty]$, $\psi_n \rightarrow \varphi$ равномерно на $[\varepsilon, \infty]$ $\forall \varepsilon > 0$.

4. Уравнение (5) в случае знакопеременной меры $d\sigma$ при положительном K . Пусть функция K представлена в виде (3), где мера $d\sigma$ удовлетворяет условию (6). Тогда K бесконечно дифференцируема на $(0, \infty)$ и может иметь слабую (интегрируемую) особенность в нуле. Если $a > 0$, то K экспоненциально убывает в бесконечности. В случае положительной меры $d\sigma$ функция K вполне монотонна на $(0, \infty)$. Мы потребуем от K всего лишь положительности.

Рассмотрим уравнение Амбарцумяна (5). Его решение будем искать в банаховом пространстве $L(\sigma)$ функций с нормой

$$\|\varphi\|_L = \int_a^b \frac{1}{s} |\varphi| |d\sigma(s)| < +\infty. \quad (23)$$

Рассмотрим следующие два итерационных процесса для УА (5):

$$\varphi_{n+1}(s) = 1 + \varphi_n(s) \int_a^b \frac{\varphi_n(p)}{s+p} d\sigma(p), \quad n = 0, 1, \dots, \quad \varphi_0 = 0, \quad (24)$$

$$\psi_{n+1}(s) = 1 + \psi_{n+1}(s) \int_a^b \frac{\psi_n(p)}{s+p} d\sigma(p), \quad n = 0, 1, \dots, \quad \varphi_0 = 0. \quad (25)$$

Обе итерации широко применяются в теории переноса излучения и в математической теории уравнения Амбарцумяна. Ниже будут изучены некоторые свойства

последовательностей φ_n, ψ_n в случае знакопеременной меры при выполнении условий (6).

При $\mu \leq 1$ простые итерации (24) сходятся в $L(\sigma)$ (см. [6]). Однако ничего неизвестно о сходимости этих итераций в случае, когда $\mu > 1$, $\lambda \leq 1$. Нашей основной целью является доказательство сходимости ψ_n при $\lambda \leq 1$. При этом мы воспользуемся связью этой последовательности с итерациями (14) для НУФ.

Пусть $C = C[a, b]$ – банахово пространство функций, непрерывных на компакте $[a, b]$ (включая случай $b = +\infty$). Из определения нормы (23) следует, что банахово пространство $C = C[a, b]$ вложено в пространство $L = L(\sigma)$, в котором ищется решение УА (5). Имеет место неравенство

$$\|\varphi\|_L \leq \frac{\mu}{2} \|\varphi\|_C.$$

Если $\varphi \in C$, $\psi \in L$, то $\varphi\psi \in L$.

Рассмотрим интегральный оператор T , фигурирующий в уравнении (5):

$$h(s) = T\varphi(s) = \int_a^b \frac{1}{s+p} \varphi(p) d\sigma(p).$$

Оператор T переводит $L(\sigma)$ в $C[0, \infty]$. Имеет место неравенство

$$\|T\|_C \leq \frac{1}{2} \|\mu\|.$$

Пусть тильда над функцией означает переход к преобразованию вида

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_a^b e^{-xs} \varphi(s) d\sigma(s), \quad x > 0. \quad (26)$$

Если $\varphi \in L(\sigma)$, то

$$\tilde{\varphi} \in L_1^+, \quad \int_0^\infty |\tilde{\varphi}(x)| dx \leq \|\varphi\|_L.$$

Из сказанного выше следует, что итерации (24) определяют последовательность $\varphi_n \in C[a, b]$, причем

$$\|\varphi_{n+1}\|_C \leq 1 + \frac{\mu}{2} \|\varphi_n\|_C^2.$$

Имеет место следующая простая связь между итерациями (24) и итерациями (10) для НУФ (см. [7], [8]):

$$V_n(x) = \int_a^b e^{-xs} \varphi_n(s) d\sigma(s), \quad n = 0, 1, \dots$$

Ниже будет установлена аналогичная связь между U_n и ψ_n . Пусть $\varphi, \psi \in L(\sigma)$. Рассмотрим функцию

$$\rho(s) = \varphi(s) \int_a^b \frac{1}{s+p} \psi(p) d\sigma(p) \in L(\sigma). \quad (27)$$

Если $\varphi \in C[a, b]$, то $\rho \in C[a, b]$.

Используя равенство

$$\frac{1}{s+p} = \int_0^\infty e^{-(x+p)t} dt, \quad s, p > 0,$$

из (27) получаем

$$\rho(s) = \int_0^\infty \varphi(s) e^{-st} \tilde{\psi}(t) dt. \quad (28)$$

Умножая обе части (27) на e^{-sx} и интегрируя по мере $d\sigma(s)$, приходим к искомой формуле

$$\tilde{\rho}(x) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(x+t) \tilde{\psi}(t) dt. \quad (29)$$

Равенство (14) является прямым следствием формулы (29).

ЛЕММА 5. Итерационный процесс (25) определяет последовательность $\psi_n \in C[a, b]$, обладающую свойствами: $0 \leq \psi_n \uparrow$ по n , $\psi_n(s) \downarrow$ по s . Имеют место соотношения

$$U_n(x) = \tilde{\psi}_n(x) = \int_a^b e^{-xp} \psi_n(p) d\sigma(p), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (30)$$

$$\psi_{n+1}(s) = [1 - \bar{U}_n(s)]^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (31)$$

и неравенство

$$\psi_n(s) \leq \varphi(s). \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по n . Для $n = 0$ равенство (30) очевидно ($0 = 0$). Пусть утверждения леммы имеют место до некоторого $n \geq 0$. Применяя к (30) преобразование Лапласа, с учетом неравенства (32) будем иметь

$$\bar{U}_n(s) = \int_a^b \frac{1}{s+p} \psi_n(p) d\sigma(p) \leq \alpha_n < 1, \quad [1 - \bar{U}_n(s)]^{-1} \in C[a, b].$$

Поэтому из (25) получаем формулу (32). Применяя к равенству (25) формулу (29) с учетом (30) получаем

$$\tilde{\psi}_{n+1}(x) = K(x) + \int_0^\infty U_n(t) \tilde{\psi}_{n+1}(x+t) dt,$$

т.е. функции $\tilde{\psi}_{n+1}$ и U_{n+1} удовлетворяют одному и тому же уравнению (14). Поскольку уравнение (14) имеет единственное решение в L_1^+ (см. п. 2), мы приходим к равенству (30), в котором n заменено на $n+1$. Монотонность последовательности ψ_n следует из формулы (31) и монотонности U_n (см. лемму 1). Неравенство (32) следует из формул (19), (31) и леммы 1. Лемма доказана.

Обратим внимание на то интересное обстоятельство, что, хотя мера $d\sigma$ знакопеременная, итерации ψ_n положительны, монотонны и являются монотонными функциями.

5. О сходимости итераций (25). Займемся вопросом сходимости итераций ψ_n и законности предельного перехода в соотношениях (25), (30). Пусть, как и раньше, V – основное решение НУФ (9), которое является пределом итераций (10) в L_1^+ . Рассмотрим функцию Амбарцумяна φ , заданную по формуле (19). Последовательность ψ_n , определяемая согласно (31), удовлетворяет условиям леммы 4, в которой роль f_n играет U_n . Поэтому имеет место

ЛЕММА 6. Пусть выполнено условие $\lambda < 1$ или $a > 0$ (a – нижний предел интегрирования в представлении (3)). Тогда итерации ψ_n , определяемые из (25), равномерно сходятся к функции φ .

Рассмотрим теперь случай $\lambda = 1$, $a = 0$. Наложим следующее условие на исходную меру $d\sigma$:

$$\int_a^b \frac{1}{s^3} |d\sigma(s)| < +\infty. \quad (33)$$

Из формулы (3) видно, что условие (33) обеспечивает конечность второго момента ядра K . Имеет место неравенство

$$m_2 \leq 4 \int_a^b \frac{1}{s^3} |d\sigma(s)|$$

(которое обращается в равенство в случае положительной меры $d\sigma$). Функция φ непрерывна на $(0, b]$ (см. лемму 3) и обладает асимптотикой (22), где

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{1}{2}m_2} < +\infty.$$

Отсюда и из сходимости интеграла (33) легко следует, что $\varphi \in L(\sigma)$. Поскольку $0 \leq \psi_n \leq \varphi$, то ψ_n образует (монотонную и) ограниченную сверху последовательность в $L(\sigma)$. Ее пределом служит φ , поскольку согласно лемме 4 $\psi_n \rightarrow \varphi$ равномерно на $[\varepsilon, \infty]$ $\forall \varepsilon > 0$.

Нам остается совершить предельный переход в соотношениях (30), (31) и (25), откуда будет следовать, что функция φ удовлетворяет УА (5). Нами доказана

ТЕОРЕМА. Пусть ядро уравнения (1) представлено в виде (3), причем выполнены условия (6). Тогда итерации (25) определяют возрастающую последовательность убывающих функций $\psi_n \in C[0, \infty]$. Если $\lambda < 1$ или $a > 0$, то ψ_n равномерно сходится к минимальному решению φ уравнения Амбарцумяна (5). Если $\lambda = 1$, $a = 0$ и выполняется условие (33), то $\psi_n \rightarrow \varphi$ в пространстве $L(\sigma)$. Функция φ обладает свойствами, перечисленными в лемме 3. Имеет место формула

$$V(x) = \int_a^b e^{-xp} \varphi(p) d\sigma(p),$$

где V – основное решение нелинейного уравнения факторизации (9).

Формула (30) дает возможность заменить итерационный процесс (10) итерациями (25), которые реализуются значительно проще. Дело в том, что приближенная

замена функции σ кусочно-постоянной (ступенчатой) функцией сводит уравнение Амбарцумяна (5) к уравнению относительно конечного числа неизвестных (значений функции φ в узлах квадратуры).

Вопросы применения полученных результатов к решению (1) мы в настоящей работе затрагивать не будем.

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за ценные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Амбарцумян, *Научные труды*, т. 1, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1960.
- [2] С. Чандрасекар, *Перенос лучистой энергии*, ИЛ, М., 1953.
- [3] В. В. Соболев, *Рассеяние света в атмосферах планет*, Наука, М., 1972.
- [4] С. Cercignani, *Theory and Application of the Boltzmann Equation*, Scott. Acad. Press, Edinburgh–London, 1975.
- [5] Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, “Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения”, *Матем. сб.*, **97 (139)**:1 (5) (1975), 35–58.
- [6] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техники. Матем. анализ*, **22**, ВИНТИ, М., 1984, 175–244.
- [7] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения*, Наука, М., 1971.
- [8] Л. А. Сахнович, “Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке”, *УМН*, **35**:4 (1980), 69–129.
- [9] J. Casti, R. Kalaba, *Imbedding Methods in Applied Mathematics*, Addison–Wesley Publ., Mass.–London–Amsterdam, 1973.
- [10] Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, “Об одном интегральном уравнении с разностным ядром”, *Матем. заметки*, **19**:6 (1976), 927–932.
- [11] Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, “Интегральное уравнение свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром”, *Матем. сб.*, **187**:10 (1996), 53–72.
- [12] Б. Н. Енгибарян, “О многократной факторизации интегральных операторов”, *ЖВМ и МФ*, **37**:4 (1997), 447–458.
- [13] V. V. Ivanov, G. B. Rybicky, A. M. Kasaurov, *Albedo Shifting*, preprint ser. no. 3478, Harvard–Smithsonian Center for Astrophysics, 1992.
- [14] Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, “О методе сдвига Альбеда”, *Астрофизика*, **38**:3 (1995), 417–431.
- [15] А. Х. Хачатрян, А. Н. Афан, “Об аналитическом и численном решении задач переноса излучения при наличии отражающей поверхности”, *ЖВМ и МФ*, **41**:8 (2001), 1217–1228.

Б. Н. Енгибарян

Институт математики НАН РА, г. Ереван

E-mail: bagrat@eif.am

Поступило

26.12.2005

Исправленный вариант

28.09.2006