Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Гутерман, Монотонные аддитивные преобразования матриц, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 681–692

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3713>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:11:55

Монотонные аддитивные преобразования матриц

А. Э. Гутерман

Исследуются аддитивные отображения пространства матриц над полем вещественных или комплексных чисел, монотонные относительно произвольного допустимого отношения частичного порядка. Получена характеристика таких отображений. В вещественном случае установлена их линейность и доказано, что ненулевые монотонные отображения биективны. В качестве следствия получена характеристика аддитивных отображений, монотонных относительно ряда классических матричных порядков, в частности, относительно порядка Дрэйзина, левого и правого $*$ -порядков и бриллиантового порядка.

Библиография: 23 названия.

1. Введение

Частичным порядком на множестве S называется бинарное отношение, являющееся одновременно антисимметричным, рефлексивным и транзитивным. В этом случае множество S называется *частично упорядоченным*. Одной из важных областей применения абстрактной теории частично упорядоченных множеств является рассмотрение порядков на матричных пространствах. Существует много различных упорядочиваний пространства $M_{m,n}(\mathbb{F})$ матриц размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$. Например, элементарный порядок ($A \leq B$, если $a_{i,j} \leq b_{i,j}$ для всех i, j) и порядок Левнера ($A \leq B$, если $A - B$ – эрмитова неотрицательно определенная матрица). В последние 30 лет в связи с целым рядом применений в различных областях математики и ее приложений, наряду с указанными порядками, активно исследуются и другие матричные отношения частичного порядка. Среди них порядок Хартвига (известный также как минус-порядок, $A \leq B$, если $\text{rk}(B - A) = \text{rk } B - \text{rk } A$, см. [1], [2]), порядок Дрэйзина, см. ниже определение 1.6, левый и правый $*$ -порядки, определения 3.2 и 3.3, бриллиантовый порядок, определение 3.6, и другие, близкие к ним, отношения порядка. Одним из важных инструментов для изучения порядков на пространстве матриц является характеристика отображений, монотонных относительно данного отношения частичного порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Говорят, что отображение $T: M_{m,n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{F})$ сохраняет отношение порядка $<$ (монотонно относительно порядка $<$), если из $A < B$ следует $T(A) < T(B)$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 05-01-01048, и гранта МК-1417.2005.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Говорят, что отображение $T: M_{m,n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{F})$ строго сохраняет отношение порядка $<$ (строго монотонно относительно порядка $<$), если $A < B$ тогда и только тогда, когда $T(A) < T(B)$.

Изучение монотонных отображений на матрицах относится к общей теории отображений, сохраняющих инварианты, множества и отношения, восходящей к работе Фробениуса [3] и с тех пор активно развивающейся (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Говорят, что отображение $T: M_{m,n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{F})$ сохраняет подмножество $S \subseteq M_{m,n}(\mathbb{F})$, если из $A \in S$ следует $T(A) \in S$.

Впервые классификация линейных монотонных отображений на матрицах была получена в работе Де Пиллиса [5], в которой изучены отображения, сохраняющие порядок Левнера. В статьях [6]–[9] охарактеризованы линейные отображения, сохраняющие минус-порядок, порядок Дрэйзина, другие порядки, упомянутые выше, а также сингулярные порядки и f -порядки. Кроме того, установлена автоматическая биективность таких отображений. В последнее время большое внимание уделяется изучению нелинейных отображений, сохраняющих матричные свойства или инварианты. В частности, П. Овчинников в [10] и П. Шемрл в [11], [12] изучают биективные отображения на множестве идемпотентных матриц, строго монотонных относительно минус-порядка. П. Легиша в [13] поднял этот результат до характеристики биективных отображений пространства всех матриц над полем вещественных или комплексных чисел, строго монотонных относительно этого порядка. Параллельно в работе У.-Л. Чоя и М.-Х. Лима [14] были охарактеризованы аддитивные отображения матриц над произвольным полем, монотонные относительно минус-порядка, без дополнительных предположений о биективности отображения и о строгом сохранении порядка. Более того, в отличие от линейного случая оказывается, что аддитивные отображения, сохраняющие минус-порядок, могут быть несюръективными. Недавно Легиша в [15] получил характеристику сюръективных отображений множества всех матриц над полем вещественных или комплексных чисел в себя, строго сохраняющие порядок Дрэйзина.

В настоящей статье развита принципиально новая техника характеристики монотонных отображений, позволяющая работать не с заданным конкретным порядком, а рассматривать аддитивные отображения, монотонные относительно абстрактных отношений порядка, удовлетворяющих ряду естественных ограничений. В частности доказано, что над полем действительных чисел все такие отображения являются линейными и либо биективны, либо тождественно равны нулевому отображению. В качестве следствия получена полная характеристика аддитивных отображений над полем вещественных или комплексных чисел, сохраняющих каждый из следующих порядков: порядок Дрэйзина, левый и правый $*$ -порядки, бриллиантовый порядок. В сравнении с результатами о минус-порядке, полученными в [14], оказывается, что ненулевые аддитивные отображения, монотонные относительно порядка Дрэйзина, $*$ -порядков, бриллиантового порядка, автоматически биективны. В отличие от результатов [15], мы не требуем биективность и строгую монотонность рассматриваемых отображений, а предполагаем лишь, что монотонное относительно любого допустимого порядка, в частности, порядка Дрэйзина, отображение является аддитивным.

Пусть далее $\mathbb{F}$ обозначает поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ или поле вещественных чисел $\mathbb{R}$. Рассматривается пространство $M_{m,n}(\mathbb{F})$, состоящее из $m \times n$ матриц над

полем $\mathbb{F}$, $M_n(\mathbb{F}) = M_{nn}(\mathbb{F})$, $GL_n(\mathbb{F})$ – полная линейная группа порядка n и $U_n(\mathbb{F})$ – группа всех унитарных или, соответственно, ортогональных матриц порядка n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Будем говорить, что частичный порядок $\prec_1$, определенный на $M_{mn}(\mathbb{F})$, слабее частичного порядка $\prec_2$, если для всех $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ из $A \prec_2 B$ следует $A \prec_1 B$. В этом случае говорят, что $\prec_2$ сильнее $\prec_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Частичный порядок $\prec$ на $M_{mn}(\mathbb{F})$ называется *унитарно инвариантным*, если для произвольных матриц $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ неравенство $A \prec B$ эквивалентно $UAV \prec UBV$ для всех $U \in U_n(\mathbb{F})$, $V \in U_m(\mathbb{F})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Порядком Дрэйзина $A \prec^* B$ на $M_{mn}(\mathbb{F})$ (см. [16]) называется следующее отношение:

для $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ говорят, что $A \prec^* B$, если

$$A^*A = A^*B, \quad AA^* = BA^*, \quad (1.1)$$

где A^* – транспонированная, комплексно-сопряженная матрица к матрице A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Порядок $\prec$ на $M_{mn}(\mathbb{F})$ называется *допустимым*, если

- (i) порядок $\prec$ унитарно инвариантен;
- (ii) порядок $\prec$ слабее порядка Дрэйзина;
- (iii) если $A \prec B$, то $\text{rk } A \leq \text{rk } B$;
- (iv) если $A \prec B$ и $\text{rk } A = \text{rk } B$, то $A = B$.

2. Монотонность относительно допустимых порядков

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\prec$ – допустимый частичный порядок, $T: M_{m,n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{F})$ – аддитивное преобразование, монотонное относительно порядка $\prec$. Тогда T сохраняет множество матриц, ранг которых меньше или равен 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем матрицу $Z \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ такую, что выполнены одновременно следующие два условия: $\text{rk } Z = 1$ и для всех $X \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, удовлетворяющих условию $\text{rk } X = 1$, справедливо $\text{rk } T(X) \leq \text{rk } T(Z)$.

Пусть $Z = \zeta U_Z E_{1,1} V_Z$ – сингулярное разложение Z . Тогда U_Z, V_Z – унитарные матрицы, $\zeta \in \mathbb{R}$. Определим отображение $K_T^Z: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ следующим образом:

$$K_T^Z(X) = T(\zeta U_Z X V_Z) \quad \text{для всех } X \in M_n(\mathbb{F}).$$

В силу выбора Z для любой матрицы $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\text{rk } A = 1$, получаем $\text{rk } K_T^Z(A) \leq \text{rk } K_T^Z(E_{1,1})$.

Поскольку матрица Z фиксированная, T – аддитивное отображение, а порядок $\prec$ унитарно инвариантен, отображение K_T^Z является аддитивным и монотонным относительно $\prec$.

Проверим, что K_T^Z сохраняет множество матриц, ранг которых не превышает 1.

Обозначим $\text{rk } K_T^Z(E_{1,1}) = s$. Предположим противное, $s \geq 2$. Так как

$$E_{1,1} \prec^* E_{1,1} + E_{2,2} \prec^* \dots \prec^* E_{1,1} + E_{2,2} + \dots + E_{n,n},$$

получаем

$$E_{1,1} \prec E_{1,1} + E_{2,2} \prec \dots \prec E_{1,1} + E_{2,2} + \dots + E_{n,n};$$

следовательно,

$$K_T^Z(E_{1,1}) \prec K_T^Z(E_{1,1} + E_{2,2}) \prec \cdots \prec K_T^Z(E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{n,n}).$$

Используя условие (iii) из определения допустимого порядка, получим

$$s = \text{rk } K_T^Z(E_{1,1}) \leq \text{rk } K_T^Z(E_{1,1} + E_{2,2}) \leq \cdots \leq \text{rk } K_T^Z(E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{n,n}) \leq n.$$

Так как $s \geq 2$, существует натуральное число r , $2 \leq r \leq n$, такое, что

$$\text{rk } K_T^Z(E_{1,1} + \cdots + E_{r-1,r-1}) = \text{rk } K_T^Z(E_{1,1} + \cdots + E_{r-1,r-1} + E_{r,r}).$$

Тогда из условия (iv) следует $K_T^Z(E_{r,r}) = 0$.

Предположим теперь, что A – такая $(s \times s)$ -подматрица $K_T^Z(E_{1,1})$, что $\det A \neq 0$. B – подматрица $K_T^Z(E_{1,r} + E_{r,1})$, расположенная на пересечении тех же строк и столбцов, что и A . Существуют обратимые матрицы $S, T \in M_{s,s}(\mathbb{C})$ такие, что $\det(ST) = 1$ и $SAT = E_{1,1} + \cdots + E_{s-1,s-1} + (\det A)E_{s,s}$. Так как

$$\det(lA + B) = \det(\text{diag}(l, \dots, l, l \det A) + SBT) = l^s \det A + \cdots$$

является полиномом степени s , существуют ненулевые натуральные числа $l_1 \neq l_2$ такие, что $\det(l_i A + B) \neq 0$ и, следовательно, $\text{rk } K_T^Z(l_i E_{1,1} + E_{1,r} + E_{r,1}) \geq s$, $i = 1, 2$. Для любого натурального числа l имеем

$$lE_{1,1} + E_{1,r} + E_{r,1} + \frac{1}{l}E_{r,r} <^* \left(l + \frac{1}{l}\right)E_{1,1} + \left(l + \frac{1}{l}\right)E_{r,r}.$$

Следовательно,

$$lE_{1,1} + E_{1,r} + E_{r,1} + \frac{1}{l}E_{r,r} \prec \left(l + \frac{1}{l}\right)E_{1,1} + \left(l + \frac{1}{l}\right)E_{r,r}.$$

Так как K_T^Z монотонно относительно $\prec$, получаем

$$K_T^Z\left(lE_{1,1} + E_{1,r} + E_{r,1} + \frac{1}{l}E_{r,r}\right) \prec K_T^Z\left(\left(l + \frac{1}{l}\right)E_{1,1} + \left(l + \frac{1}{l}\right)E_{r,r}\right).$$

Следовательно, так как $K_T^Z(E_{r,r}) = 0$,

$$\begin{aligned} K_T^Z(lE_{1,1} + E_{1,r} + E_{r,1}) &= K_T^Z\left(lE_{1,1} + E_{1,r} + E_{r,1} + \frac{1}{l}E_{r,r}\right) \\ &\prec K_T^Z\left(\left(l + \frac{1}{l}\right)E_{1,1} + \left(l + \frac{1}{l}\right)E_{r,r}\right) = K_T^Z\left(\left(l + \frac{1}{l}\right)E_{1,1}\right), \end{aligned}$$

а значит,

$$\text{rk } K_T^Z(lE_{1,1} + E_{1,r} + E_{r,1}) \leq \text{rk } K_T^Z\left(\left(l + \frac{1}{l}\right)E_{1,1}\right) = s,$$

откуда получаем $K_T^Z(l_i E_{1,1} + E_{1,r} + E_{r,1}) = K_T^Z\left(\left(l_i + \frac{1}{l_i}\right)E_{1,1}\right)$; следовательно, $K_T^Z(E_{1,r} + E_{r,1}) = \frac{1}{l_i} K_T^Z(E_{1,1})$, $i = 1, 2$. Так как $l_1 \neq l_2$, получаем, что $K_T^Z(E_{1,1}) = 0$, – противоречие с $s \geq 2$. Отсюда $s \leq 1$.

В силу выбора Z справедливо $\text{rk } K_T^Z(X) \leq 1$ для всех X таких, что $\text{rk } X \leq 1$.

$T(Y) = K_T^Z(\zeta^{-1}U_Z^{-1}YV_Z^{-1})$ для всех $Y \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Следовательно, если $\text{rk } Y \leq 1$, то $\text{rk}(\zeta^{-1}U_Z^{-1}YV_Z^{-1}) \leq 1$, а значит, $\text{rk } T(Y) \leq 1$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\prec$ является допустимым порядком. Предположим, что $T: M_{m,n}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{F})$ является аддитивным преобразованием, монотонным относительно $\prec$. Тогда T имеет один из следующих видов:

- 1) $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, где $\phi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ – эндоморфизм поля, P, Q – обратимые матрицы подходящих размеров;
- 2) если $m = n$, $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]^t Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{F})$, где $\phi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ – эндоморфизм поля, $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, Y^t обозначает транспонированную матрицу к матрице Y ;
- 3) $T([x_{i,j}]) = 0$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1 оператор T не увеличивает ранг 1. Тогда в силу [17; теорема 2.1] мы находимся в условиях одного из двух случаев, разбираемых ниже.

1. $\text{Im}(T) \subseteq \{A \in M_{m,n}(\mathbb{F}) \mid \text{rk } A \leq 1\}$.

Если при этом $\text{Im}(T) = \{0\}$, то мы получим случай 3). В противном случае существует такая матрица $X \in M_{m,n}(\mathbb{F})$, что $T(X) \neq 0$. Так как по условию отображение T аддитивно, а каждая матрица является суммой матриц ранга 1, существует матрица Y , $\text{rk } Y = 1$, такая, что $T(Y) \neq 0$. Пусть $Y = \lambda U E_{1,1} V$ – сингулярное разложение матрицы Y . Для определенных таким образом U и V легко убедиться, что $Y \prec^* Y + U E_{2,2} V$. Следовательно, $Y \prec Y + U E_{2,2} V$, откуда $T(Y) \prec T(Y + U E_{2,2} V)$. По условию нашего случая $\text{rk } T(Y + U E_{2,2} V) = 1$. Тогда в силу допустимости порядка $\prec$ из условий (iii), (iv) получаем, что $T(U E_{2,2} V) = 0$. Непосредственная проверка показывает, что для любого натурального l справедливо неравенство

$$lY + U E_{1,2} V + U E_{2,1} V + \frac{1}{l} U E_{2,2} V \prec^* \left(l + \frac{1}{l}\right) Y + \left(l + \frac{1}{l}\right) U E_{2,2} V,$$

откуда

$$lY + U E_{1,2} V + U E_{2,1} V + \frac{1}{l} U E_{2,2} V \prec \left(l + \frac{1}{l}\right) Y + \left(l + \frac{1}{l}\right) U E_{2,2} V,$$

$$T\left(lY + U E_{1,2} V + U E_{2,1} V + \frac{1}{l} U E_{2,2} V\right) \prec T\left(\left(l + \frac{1}{l}\right) Y + \left(l + \frac{1}{l}\right) U E_{2,2} V\right).$$

Тогда

$$T(lY + U E_{1,2} V + U E_{2,1} V) \prec T\left(\left(l + \frac{1}{l}\right) Y\right).$$

Отсюда в силу условия (iii)

$$\text{rk}(T(lY + U E_{1,2} V + U E_{2,1} V)) \leq \text{rk}\left(T\left(\left(l + \frac{1}{l}\right) Y\right)\right) \leq 1. \quad (2.1)$$

В силу аддитивности T имеем для натурального l

$$T(lY + U E_{1,2} V + U E_{2,1} V) = lT(Y) + T(U E_{1,2} V) + T(U E_{2,1} V).$$

Так как $\text{rk } T(Y) = 1$, существуют $l_1 \neq l_2$, для которых $\text{rk } T(lY + U E_{1,2} V + U E_{2,1} V) = 1$. Тогда в силу условия (iv) из неравенства (2.1) следует, что

$$T(l_i Y + U E_{1,2} V + U E_{2,1} V) = T\left(\left(l_i + \frac{1}{l_i}\right) Y\right), \quad i = 1, 2.$$

Следовательно, $T(Y) = 0$, – противоречие.

2. Существуют ненулевые матрицы $P, Q \in M_n(\mathbb{F})$ и кольцевой гомоморфизм $\phi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ такой, что $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ или, в случае $m = n$, $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]^t Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{F})$. Остается доказать, что P, Q обратимы. Предположим противное; тогда $\text{Im}(T) \subseteq \{A \in M_{m,n}(\mathbb{F}) \mid \text{rk } A < n\}$. Так как $P \neq 0$ и $Q \neq 0$, существует такая матрица X , что $T(X) \neq 0$. Тогда в силу аддитивности отображения T , существует матрица Y ранга 1, для которой $T(Y) \neq 0$. Пусть $Y = \alpha U E_{11} V$ – сингулярное разложение матрицы Y . Тогда

$$Y \prec Y + U E_{22} V \prec \dots \prec Y + U \left(\sum_{i=2}^n E_{ii} \right) V.$$

Следовательно,

$$T(Y) \prec T(Y + U E_{22} V) \prec \dots \prec T\left(Y + U \left(\sum_{i=2}^n E_{ii} \right) V\right).$$

Поскольку $\text{rk } T(Y + U(\sum_{i=2}^n E_{ii})V) < n$, получаем, что существует i : $T(U E_{ii} V) = 0$. Тогда, рассматривая неравенство

$$lY + U E_{1,i} V + U E_{i,1} V + \frac{1}{l} U E_{i,i} V \prec \left(l + \frac{1}{l}\right) Y + \left(l + \frac{1}{l}\right) U E_{i,i} V$$

для произвольного натурального l , получаем, как раньше, что

$$T(l_j Y + U E_{1,i} V + U E_{i,1} V) = T\left(\left(l_j + \frac{1}{l_j}\right) Y\right), \quad j = 1, 2.$$

Следовательно, $T(Y) = 0$, – противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $\prec$ является допустимым порядком. Предположим, что $T: M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ является аддитивным преобразованием, монотонным относительно $\prec$. Тогда T линейно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.2 отображение T или тождественно нулевое (в этом случае оно линейно), или имеет один из видов 1), 2). Отсюда, поскольку единственный ненулевой гомоморфизм $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – тождественное отображение, отображение T является линейным.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть $\prec$ является допустимым порядком. Предположим, что $T: M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ является аддитивным преобразованием, монотонным относительно $\prec$. Тогда T или биективно, или является тождественно нулевым отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вытекает из следствия 2.3.

3. Приложения

3.1. Порядок Дрэйзина.

ТЕОРЕМА 3.1. Аддитивное преобразование $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ является монотонным относительно порядка Дрэйзина тогда и только тогда, когда или $T \equiv 0$, или существуют $U, V \in U_n(\mathbb{C})$ и $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ такие, что T имеет один из следующих видов:

- 1) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[x_{i,j}]V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 2) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[\overline{x_{i,j}}]V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 3) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[x_{i,j}]^t V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 4) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[\overline{x_{i,j}}]^t V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Легко проверяется, что все перечисленные выше преобразования сохраняют порядок Дрэйзина.

2. Пусть T – монотонное относительно порядка Дрэйзина отображение. Так как порядок Дрэйзина является допустимым (см. [7; предложение 4.1]), можно применять теорему 2.2. Если $T \equiv 0$, то доказывать нечего. Остается еще два случая. Рассмотрим вначале случай $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$, где $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – гомоморфизм поля, $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$.

Рассмотрим следующие матрицы: $A = E_{i,i}$, $B = E_{i,i} + E_{j,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Легко проверить, что $A \stackrel{*}{<} B$. Следовательно, поскольку $\phi(0) = 0$ и $\phi(1) = 1$,

$$PE_{i,i}Q \stackrel{*}{<} P(E_{i,i} + E_{j,j})Q.$$

По определению получаем

$$PE_{i,i}QQ^*E_{i,i}P^* = P(E_{i,i} + E_{j,j})QQ^*E_{i,i}P^*;$$

следовательно, так как матрица P обратима,

$$E_{i,i}QQ^*E_{i,i} = (E_{i,i} + E_{j,j})QQ^*E_{i,i}.$$

Обозначим $QQ^* = G = [g_{i,j}]$. Из предыдущего уравнения получаем

$$g_{i,i}E_{i,i} = g_{i,i}E_{i,i} + g_{j,i}E_{j,i}.$$

Следовательно, $g_{j,i} = 0$ для всех $1 \leq i \neq j \leq n$, откуда $G = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$ является диагональной матрицей.

Рассмотрим теперь матрицы $A = E_{i,j} + E_{i,j+1} + E_{i+1,j} + E_{i+1,j+1}$ и $B = 2E_{i,j} + 2E_{i+1,j+1}$, $1 \leq i, j < n$. Тогда $A \stackrel{*}{<} B$. Заметим, что $\phi(A) = A$ и $\phi(B) = B$. Тогда для $G = QQ^* = [g_{i,j}]$ по определению порядка Дрэйзина получаем

$$\begin{aligned} & (E_{i,j} + E_{i,j+1} + E_{i+1,j} + E_{i+1,j+1})G(E_{j,i} + E_{j+1,i} + E_{j,i+1} + E_{j+1,i+1}) \\ &= (2E_{i,j} + 2E_{i+1,j+1})G(E_{j,i} + E_{j+1,i} + E_{j,i+1} + E_{j+1,i+1}), \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} & (g_j + g_{j+1})(E_{i,i} + E_{i,i+1} + E_{i+1,i} + E_{i+1,i+1}) \\ &= 2g_jE_{i,i} + 2g_jE_{i,i+1} + 2g_{j+1}E_{i+1,i} + 2g_{j+1}E_{i+1,i+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $g_j = g_{j+1}$ для всех j , т.е. $QQ^* = G$ – скалярная матрица. Тогда $Q = \beta V$, где V – унитарная матрица.

3. Аналогично из $(PAQ)^*PAQ = (PAQ)^*PBQ$ получаем $P = \gamma U$, где U – унитарная матрица.

4. Обозначим $\xi = \beta\gamma$. Тогда для любой матрицы X имеем $T([x_{i,j}]) = \xi U[\phi(x_{i,j})]V$. Рассмотрим преобразование $X \rightarrow \xi UXV$. Это преобразование строго сохраняет порядок Дрэйзина и, следовательно, преобразование $[x_{i,j}] \rightarrow [\phi(x_{i,j})]$ тоже сохраняет порядок Дрэйзина.

Рассмотрим произвольный элемент $z \in \mathbb{C}$ и матрицы

$$C = zE_{i,j} + E_{i,j+1} + E_{i+1,j} + \frac{1}{z}E_{i+1,j+1}, \quad D = \left(z + \frac{1}{\bar{z}}\right)E_{i,j} + \left(\bar{z} + \frac{1}{z}\right)E_{i+1,j+1}.$$

Легко проверить, что $C <^* D$. Соответственно, $\phi(C) <^* \phi(D)$, откуда следует, что $\phi(C)\phi(C)^* = \phi(D)\phi(C)^*$. Получаем

$$\begin{aligned} \phi(C)\phi(C)^* &= (|\phi(z)|^2 + 1)E_{i,i} + \left(\phi(z) + \frac{1}{\phi(z)}\right)E_{i,i+1} \\ &\quad + \left(\overline{\phi(z)} + \frac{1}{\phi(z)}\right)E_{i+1,i} + \left(1 + \frac{1}{|\phi(z)|^2}\right)E_{i+1,i+1} \\ &= \left(|\phi(z)|^2 + \frac{\phi(z)}{\phi(\bar{z})}\right)E_{i,i} + \left(\phi(z) + \frac{1}{\phi(\bar{z})}\right)E_{i,i+1} \\ &\quad + \left(\phi(\bar{z}) + \frac{1}{\phi(z)}\right)E_{i+1,i} + \left(\frac{\phi(\bar{z})}{\phi(z)} + \frac{1}{|\phi(z)|^2}\right)E_{i+1,i+1} \\ &= \phi(D)\phi(C)^*. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Сравнивая (i, i) -коэффициенты этих матриц, получаем, что $\phi(\bar{z}) = \overline{\phi(z)}$, т.е. ϕ отображает поле вещественных чисел в себя. Следовательно, ϕ является либо тождественным преобразованием, либо сопряжением.

5. Аналогично рассматривается случай $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]^t Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$.

3.2. Левый и правый $*$ -порядки. Пусть $\mathcal{M}(A)$ обозначает линейную оболочку столбцов матрицы $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$.

Левый $*$ -порядок и правый $*$ -порядок $A* < B$ и $A < *B$ на $M_{mn}(\mathbb{C})$ были введены Дж. Баксалари и С. Митрой в [18] следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Для $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ говорят, что $A* < B$, если

$$A^*A = A^*B, \quad \mathcal{M}(A) \subseteq \mathcal{M}(B).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Для $A, B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ говорят, что $A < *B$, если

$$AA^* = BA^*, \quad \mathcal{M}(A^*) \subseteq \mathcal{M}(B^*).$$

Легко видеть, что соответствующие определения над полем вещественных чисел также приводят к понятиям частичного порядка.

ТЕОРЕМА 3.4. Аддитивное преобразование $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ является монотонным относительно $< *$ -порядка тогда и только тогда, когда либо $T \equiv 0$, либо существуют матрицы $U \in U_n(\mathbb{C})$, $M \in GL_n(\mathbb{C})$ такие, что T имеет один из следующих видов:

- 1) $T([x_{i,j}]) = M[x_{i,j}]U$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 2) $T([x_{i,j}]) = M[\bar{x}_{i,j}]U$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 3) $T([x_{i,j}]) = M[x_{i,j}]^t U$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 4) $T([x_{i,j}]) = M[\bar{x}_{i,j}]^t U$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Непосредственно проверяется, что все указанные преобразования сохраняют $< *$ -порядок.

2. Пусть T является монотонным относительно $< *$ -порядка. Поскольку в силу определения и [7; предложение 5.1] порядок $<$ является допустимым, применим теорему 2.2.

Если $T \neq 0$, то рассмотрим случай $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]Q$. Рассуждение, повторяющее п. 2 теоремы 3.1, показывает, что $T([x_{i,j}]) = P'[\phi(x_{i,j})]U$, где U – унитарная матрица, $P' = \beta P$ обратимая, $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – кольцевой гомоморфизм. Так как преобразование $X \rightarrow P'XU$ строго сохраняет $< *$ -порядок, то и преобразование $[x_{i,j}] \rightarrow [\phi(x_{i,j})]$ тоже его сохраняет. Рассмотрим матрицы C и D из п. 4 теоремы 3.1. Тогда справедливы равенства (3.1), откуда получаем, что ϕ является либо тождественным преобразованием, либо сопряжением. Случай $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]^t Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$ рассматривается полностью аналогично.

Из симметрии задачи получаем

ТЕОРЕМА 3.5. *Аддитивное преобразование $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ монотонно относительно $* <$ -порядка тогда и только тогда, когда либо $T \equiv 0$, либо существуют матрицы $U \in U_n(\mathbb{C})$, $M \in GL_n(\mathbb{C})$ такие, что T имеет один из следующих видов:*

- 1) $T([x_{i,j}]) = U[x_{i,j}]M$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 2) $T([x_{i,j}]) = U[\overline{x_{i,j}}]M$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 3) $T([x_{i,j}]) = U[x_{i,j}]^t M$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 4) $T([x_{i,j}]) = U[\overline{x_{i,j}}]^t M$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$.

3.3. Бриллиантовый порядок. Следующий порядок на $M_{mn}(\mathbb{C})$ был введен в [19] Дж. Баксалари и Я. Хауке, для получения матричной версии теоремы Кочрейна из математической статистики (см. [20]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6 [19]. Для $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ говорят, что $A \overset{\diamond}{<} B$, если $\text{Im}(A) \subseteq \text{Im}(B)$, $\text{Im}(A^*) \subseteq \text{Im}(B^*)$, и $AA^*A = AB^*A$. Этот порядок называют *бриллиантовым*.

ТЕОРЕМА 3.7. *Аддитивное преобразование $T: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ является монотонным относительно $\overset{\diamond}{<}$ -порядка тогда и только тогда, когда либо $T \equiv 0$, либо существуют матрицы $U, V \in U_n(\mathbb{C})$ и $0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ такие, что T имеет один из следующих видов:*

- 1) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[x_{i,j}]V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 2) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[\overline{x_{i,j}}]V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 3) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[x_{i,j}]^t V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$;
- 4) $T([x_{i,j}]) = \alpha U[\overline{x_{i,j}}]^t V$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Легко видеть, что все описанные преобразования сохраняют бриллиантовый порядок.

2. Так как $\overset{\diamond}{<}$ -порядок является унитарно-инвариантным, слабее порядка Дрэйзина (см. [19; часть 4]) и удовлетворяет условиям (iii), (iv) (см. [7; предложение 6.1]), мы можем использовать теорему 2.2. Рассмотрим $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$, где $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ является кольцевым гомоморфизмом, $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$.

Для любых матриц A, B из неравенства $A \overset{\diamond}{<} B$ следует

$$P\phi(A)QQ^*\phi(A)^*P^*P\phi(A)Q = P\phi(A)QQ^*\phi(B)^*P^*P\phi(A)Q.$$

Обозначим $[g_{i,j}] = G = QQ^*$, $[f_{i,j}] = F = P^*P$. Получаем,

$$\phi(A)G\phi(A)^*F\phi(A) = \phi(A)G\phi(B)^*F\phi(A).$$

3. Рассмотрим матрицы $A = E_{i,i}$ и $B = E_{i,i} + E_{j,j}$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Так как $A \overset{\diamond}{<} B$, то

$$E_{i,i}GE_{i,i}FE_{i,i} = g_{i,i}f_{i,i}E_{i,i} = g_{i,i}f_{i,i}E_{i,i} + g_{i,j}f_{j,i}E_{i,i} = E_{i,i}G(E_{i,i} + E_{j,j})FE_{i,i}.$$

Следовательно, $g_{i,j}f_{j,i} = 0$, $1 \leq i \neq j \leq n$.

4. Рассмотрим матрицы $E_{i,i} \overset{\diamond}{<} E_{i,i} + E_{j,j} + E_{j,i}$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Получаем

$$\begin{aligned} E_{i,i}GE_{i,i}FE_{i,i} &= g_{i,i}f_{i,i}E_{i,i} = g_{i,i}f_{i,i}E_{i,i} + g_{i,j}f_{j,i}E_{i,i} \\ &= E_{i,i}G(E_{i,i} + E_{j,j} + E_{j,i})FE_{i,i}. \end{aligned}$$

Следовательно, $g_{i,j} = 0$, $1 \leq i \neq j \leq n$ (все $f_{i,i} > 0$, так как $F = P^*P$). Аналогично, рассматривая $E_{i,i} \overset{\diamond}{<} E_{i,i} + E_{j,j} + E_{j,i}$, получаем $f_{i,j} = 0$, $1 \leq i \neq j \leq n$. Следовательно, матрицы F , G являются диагональными.

5. Легко установить, что $\frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{i,j+1}) \overset{\diamond}{<} E_{i,j} + E_{i+1,j+1}$, $1 \leq i, j \leq n$. Так как $\phi(1/2) = 1/2$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(E_{i,j} + E_{i,j+1})G(E_{j,i} + E_{j+1,i})F(E_{i,j} + E_{i,j+1}) &= \frac{1}{8}f_{i,i}(g_{j,j} + g_{j+1,j+1})(E_{i,j} + E_{i,j+1}) \\ &= \frac{1}{4}g_{j,j}f_{i,i}(E_{i,j} + E_{i,j+1}) = \frac{1}{4}(E_{i,j} + E_{i,j+1})G(E_{j,i} + E_{j+1,i+1})F(E_{i,j} + E_{i,j+1}), \end{aligned}$$

откуда $g_{j,j} = g_{j+1,j+1}$, $1 \leq j \leq n-1$. Аналогично из $\frac{1}{2}(E_{i,j} + E_{i+1,j}) \overset{\diamond}{<} E_{i,j} + E_{i+1,j+1}$ получаем $f_i = f_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Следовательно, матрицы F и G являются скалярными, и $P = \beta U$, $Q = \gamma V$, где U, V – унитарные матрицы. Так как домножение на унитарные и скалярные матрицы строго сохраняет $\overset{\diamond}{<}$ -порядок, получаем, что ϕ его тоже сохраняет. Рассматривая матрицы C и D , введенные в п. 4 теоремы 3.1, получаем, что равенства (3.1) справедливы, откуда ϕ является либо тождественным преобразованием, либо сопряжением.

Аналогично рассматривается случай $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]^tQ$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{C})$.

3.4. Сингулярные порядки и f -порядки. Символы $\sigma(A)$ и $\sigma_1(A)$ обозначают ненулевые сингулярные значения (квадратные корни из собственных значений матрицы AA^*) и, соответственно, максимальное сингулярное значение комплексных и вещественных матриц.

В [21] был определен *сингулярный порядок* $A \overset{\sigma}{<} B$ на $M_{mn}(\mathbb{C})$. Мы будем рассматривать его вместе с соответствующим вещественным аналогом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Для $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ говорят, что $A \overset{\sigma}{<} B$, если

$$A \preceq B \quad \text{и} \quad \sigma(A) \subseteq \sigma(B).$$

Ю. Гросс [22] определил σ_1 -порядок $A \overset{\sigma_1}{<} B$ на $M_{mn}(\mathbb{C})$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.9. Для $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ говорят, что $A \overset{\sigma_1}{<} B$, если

$$A \preceq B \quad \text{и} \quad \sigma_1(A) \leq \sigma_1(B).$$

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть аддитивное отображение $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\overset{\sigma}{\prec}$ - или $\overset{\sigma_1}{\prec}$ -порядка. Тогда или $T \equiv 0$, или существуют матрицы $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$ и ненулевой эндоморфизм $\phi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ такие, что отображение T имеет один из следующих видов:

- 1) $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{F})$;
- 2) $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]^t Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сингулярные порядки являются допустимыми (см. [7; предложения 7.1, 7.2 и 7.4]), поэтому применима теорема 2.2.

Определяемые ниже f -порядки были введены в [23]. Пусть $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – монотонная биективная функция. Пусть $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ и $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)V$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, – сингулярное разложение матрицы A . Матрица $f(A)$ определяется следующим образом: $f(A) = U \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))V$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.11. Пусть $\prec$ – произвольный частичный порядок на $M_{m,n}(\mathbb{C})$. Для $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ говорят, что $A \prec_f B$, если $f(A) \prec f(B)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Пусть $\prec$ – допустимый порядок на $M_{m,n}(\mathbb{F})$ и монотонная функция f биективна. Тогда $\prec_f$ также допустим на $M_{m,n}(\mathbb{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из [6; предложения 13–15].

ТЕОРЕМА 3.13. Пусть $f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – биективная монотонная функция, отображение $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ монотонно относительно $\prec_f$ -порядка для некоторого допустимого порядка $\prec$. Тогда или $T \equiv 0$, или существуют матрицы $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$ и ненулевой эндоморфизм $\phi: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ такие, что T имеет один из следующих видов:

- 1) $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{F})$;
- 2) $T([x_{i,j}]) = P[\phi(x_{i,j})]^t Q$ для всех $X = [x_{i,j}] \in M_n(\mathbb{F})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из предложения 3.12 в силу теоремы 2.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.14. Заметим, что в отличие от других результатов этого параграфа, теоремы 3.10 и 3.13 не являются критериями, а именно, существуют отображения видов 1) и 2), которые не сохраняют $\overset{\sigma}{\prec}$ - и $\overset{\sigma_1}{\prec}$ -порядки, f -порядки.

ПРИМЕР 3.15. Рассмотрим отображение $T: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, заданное по формуле $T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X$ для всех $X \in M_2(\mathbb{F})$. Заметим, что $E_{1,1} \overset{\sigma}{\prec} E$ и $E_{1,1} \overset{\sigma_1}{\prec} E$.

Однако непосредственная проверка показывает, что $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_{1,1} \overset{*}{\not\prec} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Следовательно, так как порядок Дрэйзина слабее каждого из сингулярных порядков, $E_{1,1} \overset{\sigma}{\not\prec} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $E_{1,1} \overset{\sigma_1}{\not\prec} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. рассматриваемое отображение T не сохра-

няет сингулярные порядки. Аналогично, оно не сохраняет, например, $\overset{*}{\prec}_f$ порядок для тождественного отображения f .

Автор благодарен А. А. Алиевой и А. В. Михалеву за интересные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. E. Hartwig, “How to partially order regular elements”, *Math. Japon.*, **25**:1 (1980), 1–13.

- [2] K. S. S. Nambooripad, "The natural partial order on a regular semigroup", *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **23**:3 (1980), 249–260.
- [3] G. Frobenius, "Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen", *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, Berlin, 1897, 994–1015.
- [4] S. Pierce, "General introduction", *A survey of linear preserver problems*, Linear Multilinear Algebra, **33**, 1–2, Gordon and Breach Science Publ., Yverdon, 1992, 3–5.
- [5] J. de Pillis, "Linear Transformations which preserve Hermitian and positive semidefinite operators", *Pacific J. Math.*, **23** (1967), 129–137.
- [6] А. А. Алиева, "Обратимость линейных отображений, сохраняющих f -порядки", *Фундамент. и прикл. матем.*, **9**:3 (2003), 3–11.
- [7] A. Alieva, A. Guterman, "Monotone linear transformations on matrices are invertible", *Comm. Algebra*, **33**:9 (2005), 3335–3352.
- [8] A. Guterman, "Linear preservers for Drazin star partial order", *Comm. Algebra*, **29**:9 (2001), 3905–3917.
- [9] A. Guterman, "Linear preservers for matrix inequalities and partial orderings", *Linear Algebra Appl.*, **331**:1–3 (2001), 75–87.
- [10] P. G. Ovchinnikov, "Automorphisms of the poset of skew projections", *J. Funct. Anal.*, **115**:1 (1993), 184–189.
- [11] P. Šemrl, "Order-preserving maps on the poset of idempotent matrices", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **69**:3–4 (2003), 481–490.
- [12] P. Šemrl, "Hua's fundamental theorem of the geometry of matrices", *J. Algebra*, **272**:2 (2004), 801–837.
- [13] P. Legiša, "Automorphisms of M_n , partially ordered by rank subtractivity ordering", *Linear Algebra Appl.*, **389** (2004), 147–158.
- [14] W.-L. Chooi, M.-H. Lim, "Additive preservers of rank-additivity on matrix spaces", *Linear Algebra Appl.*, **402** (2005), 291–302.
- [15] P. Legiša, "Automorphisms of M_n , partially ordered by the star order", *Linear Multilinear Algebra*, **54**:3 (2006), 157–188.
- [16] M. P. Drazin, "Natural structures on semigroups with involution", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**:1 (1978), 139–141.
- [17] B. Kuzma, "Additive mappings decreasing rank one", *Linear Algebra Appl.*, **348**:1–3 (2002), 175–187.
- [18] J. K. Baksalary, S. K. Mitra, "Left-star and right-star partial orderings", *Linear Algebra Appl.*, **149** (1991), 73–89.
- [19] J. K. Baksalary, J. Hauke, "A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings", *Linear Algebra Appl.*, **127** (1990), 157–169.
- [20] W. G. Cochran, "The distribution of quadratic forms in a normal system, with applications to the analysis of covariance", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **30** (1934), 178–191.
- [21] J. K. Baksalary, J. Hauke, "Partial orderings on matrices referring to singular values or eigenvalues", *Linear Algebra Appl.*, **96** (1987), 17–26.
- [22] J. Groß, "A note on rank-subtractivity ordering", *Linear Algebra Appl.*, **289**:1–3 (1999), 151–160.
- [23] J. Hauke, A. Markiewicz, T. Szulc, "Inter- and extrapolatory properties of matrix partial orderings", *Linear Algebra Appl.*, **332–334** (2001), 437–445.

А. Э. Гутерман

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: guterman@list.ru

Поступило

07.06.2006

Исправленный вариант

22.11.2006