Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Коломойцев, Полнота тригонометрической системы в классах $\varphi(L)$, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 707–712

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3714>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:04:01

Полнота тригонометрической системы в классах $\varphi(L)$

Ю. С. Коломойцев

Получено необходимое и достаточное условие полноты тригонометрической системы с пропусками в классах $\varphi(L)$.

Библиография: 13 названий.

Введение. Пусть Φ – совокупность четных, неотрицательных, конечных и неубывающих на $[0, \infty)$ функций φ таких, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi(\infty) = \infty$. Далее будем всюду предполагать, что для функции φ выполнены следующие условия: $\varphi \in \Phi$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$ и $\varphi \in C[0, \infty)$.

Через $\varphi(L)$ обозначим множество всех тех измеримых 2π -периодических функций f , для которых

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(t)|) dt < \infty,$$

где $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ – единичная окружность.

Если функции f и g принадлежат классу $\varphi(L)$, то величину

$$\rho_{\varphi}(f, g) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(t) - g(t)|) dt$$

условно назовем *φ -расстоянием*. Положим также $\rho_{\varphi}(f) := \rho_{\varphi}(f, 0)$. Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ из класса $\varphi(L)$ назовем *сходящейся по φ -расстоянию* к функции $f \in \varphi(L)$, если $(f - f_n) \in \varphi(L)$ для $n \geq n_0$ при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\varphi}(f - f_n) = 0$.

Классы $\varphi(L)$ систематически изучаются в работах П. Л. Ульянова. Например, в [1] показано, что класс $\varphi(L)$ сепарабелен в смысле сходимости по φ -расстоянию тогда и только тогда, когда φ удовлетворяет условию $\varphi(t+1) = O\{\varphi(t)\}$ при $t \rightarrow \infty$.

В настоящей статье изучается вопрос о полноте тригонометрической системы с пропусками, т.е. системы вида $\{e_k\}_{k \in A}$ ($e_k = e^{ikx}$), где $A \subset \mathbb{Z}$ и $A \neq \mathbb{Z}$ в классах $\varphi(L)$.

Прежде всего отметим, что тригонометрическая система с пропусками не полна в пространстве L . Поэтому из интегрального неравенства Иенсена (см. ниже лемму 1) следует, что данная система также не полна в пространстве $\varphi(L)$, если φ выпуклая вниз функция. То же самое о данной системе можно сказать, если предположить, что функция φ удовлетворяет Δ_2 -условию (т.е. $\varphi(2t) = O\{\varphi(t)\}$ при $t \rightarrow \infty$) и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t > 0$. Это следует из работ В. И. Иванова [2; теорема 2] и В. И. Филиппова [3; теорема 1.2].

Отметим также, что задача о полноте системы $\{e_k\}_{k \in A}$ при $A \subset \mathbb{Z}$ и $A \neq \mathbb{Z}$ в пространствах L_p , $0 < p < 1$, и $\varphi(L)$ исследовалась в работах [4]–[9]. В [4], по-видимому, впервые доказывается существование бесконечного множества $B \subset \mathbb{Z}$ такого, что

система $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus B}$ полна в L_p при $0 < p < 1$. В работах [5]–[9] получены достаточные условия полноты тригонометрической системы с пропусками. В [7] предложен подход для получения необходимых и достаточных условий полноты, а в [8] получено одно необходимое условие полноты: система $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus B}$ не является полной в L_p при любом $0 < p < 1$, если B – бесконечная в обе стороны арифметическая прогрессия. В [10] осуществляется распространение результатов работы [8] на некоторые классы $\varphi(L)$.

1. Прежде, чем перейти к основному результату статьи, сформулируем вспомогательные леммы. Мы будем часто использовать интегральное неравенство Иенсена.

ЛЕММА 1 [11; с. 45]. Пусть φ – выпуклая вверх функция, f и q – интегрируемые положительные функции, причем $q(x) \neq 0$ на $\mathbb{T}$. Тогда

$$\frac{\int_{\mathbb{T}} \varphi(f(x))q(x) dx}{\int_{\mathbb{T}} q(x) dx} \leq \varphi\left(\frac{\int_{\mathbb{T}} f(x)q(x) dx}{\int_{\mathbb{T}} q(x) dx}\right).$$

ЛЕММА 2 [2; теорема 5]. Пусть $\varphi(L) \not\subset L$. Тогда если система $\{g_k\}_{k \geq 1}$ полна в $\varphi(L)$, то для каждого $N \geq 1$ система $\{g_k\}_{k \geq N}$ также полна в $\varphi(L)$.

Отметим также, что если функция φ удовлетворяет Δ_2 -условию, то из работ Иванова [2; теорема 2] и Филиппова [3; теорема 1.2] следует, что условие $\varphi(L) \not\subset L$ эквивалентно $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = 0$.

Мы будем использовать следующие обозначения:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

– коэффициенты Фурье интегрируемой функции f ,

$$\text{спес } f = \{n \in \mathbb{Z}: \hat{f}(n) \neq 0\}$$

– спектр функции f .

Главным результатом статьи является

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция φ выпуклая вверх, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = 0$ и $A \subset \mathbb{Z}$. Система $\{e_k\}_{k \in A}$ полна в $\varphi(L)$ тогда и только тогда, когда для любого тригонометрического полинома T найдется функция $f \in L_2(\mathbb{T})$ такая, что $\hat{f}(n) = \hat{T}(n)$ для всех $n \in \mathbb{Z} \setminus A$ и

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}\right|\right) dx = 0. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. В силу свойств функции φ достаточно рассмотреть случай $T = e_m$, где $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Пусть для функции $f \in L_2$ выполнено условие (1), $\hat{f}(m) = 1$ и $\text{спес } f \subset A \cup \{m\}$. Введем вспомогательную функцию

$$g_\delta(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2i \sin m\delta}.$$

Определим ядро типа Валле Пуссена, положив $K_n = \sum_{k=-2n}^{2n} v(k/n) e_k$, где $v \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $v(x) = 1$ при $|x| \leq 1$ и $v(x) = 0$ при $|x| \geq 2$. Очевидно, что полином

$$T_{n,\delta}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(x-t) g_\delta(t) dt = K_n * g_\delta(x), \quad n \geq |m|$$

удовлетворяет соотношениям $\hat{T}_{n,\delta}(m) = 1$ и $\text{спес } T_{n,\delta} \subset A \cup \{m\}$.

Покажем, что для любого $\delta > 0$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi(|T_{n,\delta}(x)|) dx \leq \int_{\mathbb{T}} \varphi(|g_\delta(x)|) dx.$$

Используя лемму 1 с функцией $q(x) \equiv 1/(2\pi)$, а также полуаддитивность выпуклой вверх функции φ (см., например, [2; с. 19]), находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \varphi(|T_{n,\delta}(x)|) dx - \int_{\mathbb{T}} \varphi(|g_\delta(x)|) dx &\leq \int_{\mathbb{T}} \varphi(|T_{n,\delta}(x) - g_\delta(x)|) dx \\ &\leq 2\pi\varphi\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |T_{n,\delta}(x) - g_\delta(x)| dx\right), \end{aligned}$$

но так как известно, что для каждой интегрируемой функции h выполняется соотношение $\|K_n * h - h\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то при достаточно малом δ получим

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} \varphi(|T_{n,\delta}(x)|) dx &\leq \int_{\mathbb{T}} \varphi(|g_\delta(x)|) dx = \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{2i \sin m\delta}\right|\right) dx \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\frac{f(x+\delta) - f(x-\delta)}{\delta}\right|\right) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточность в теореме доказана.

Необходимость. Пусть далее T – некоторый фиксированный тригонометрический полином порядка не выше M_0 . Можно предположить также, что $\hat{T}(0) = 0$.

Построим ряд вида $T + \sum_{k \in A, |k| > M_0} a_k e_k$, для которого существует подпоследовательность частных сумм, которая сходится к нулю по φ -расстоянию. Фиксируем некоторое $\varepsilon_1 > 0$. Так как по лемме 2 система $\{e_k\}_{k \in A, |k| > M_0}$ будет полна в $\varphi(L)$, найдется тригонометрический полином $p_{N_1} = \sum_{k \in A, M_0 < |k| \leq N_1} a_k e_k$ такой, что $\rho_\varphi(T + p_{N_1}) < \varepsilon_1$. Далее фиксируем $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и положим $M_1 = N_1^5$. Рассуждая по аналогии с предыдущим, получим, что найдется полином $p_{N_2} = \sum_{k \in A, M_1 < |k| \leq N_2} a_k e_k$ такой, что $\rho_\varphi(T + p_{N_1} + p_{N_2}) < \varepsilon_2$.

Таким образом, зафиксировав некоторую последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k \downarrow 0$, мы можем по индукции построить ряд

$$\sum_{k \in A \cup \text{spec } T} a_k e_k = T + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\substack{k \in A \\ M_{j-1} < |k| \leq N_j}} a_k e_k,$$

где $M_j = N_j^5$ для всех $j \in \mathbb{N}$, такой, что для его частных сумм $S_{N_j} = \sum_{k=-N_j}^{N_j} a_k e_k$ (полагаем $a_k = 0$, если $k \notin A \cup \text{spec } T$) выполняется соотношение $\rho_\varphi(S_{N_j}) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Используя еще замечание к лемме 13 из [2], можно считать, что $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим далее формально проинтегрированный ряд $\sum_k (a_k/k) e_k$. По теореме Рисса–Фишера найдется функция $f \in L_2$ такая, что ряд $\sum_k (a_k/k) e_k$ является ее рядом Фурье. Так как отсутствие одной гармоники $\{e_0\}$ не влияет на ответ, то в силу произвольности полинома T для доказательства теоремы достаточно показать выполнимость соотношения (1) для функции f .

Из полуаддитивности функции φ находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}\right|\right) dx &\leq 2 \int_{\mathbb{T}} \varphi(|S_{N_j}(x)|) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} - 2iS_{N_j}(x)\right|\right) dx. \end{aligned}$$

Так как первый интеграл стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$, то для доказательства теоремы достаточно показать, что существует сходящаяся к нулю последовательность $\{h_j\}$, для которой второй интеграл будет также стремиться к нулю. Используя лемму 1, неравенство Коши–Буняковского, а также очевидное соотношение

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \sim 2i \sum_k \frac{\sin kh}{kh} a_k e^{ikx},$$

получим, что второй интеграл не превосходит

$$2\pi\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\sum_k \frac{\sin kh}{kh} a_k e_k - S_{N_j}\right\|_2\right).$$

Покажем, что выражение, стоящее под функцией φ при $h = 1/N_j^2$, будет стремиться к нулю, если $j \rightarrow \infty$. Применяя равенство Парсеваля, а также неравенство $(1 - \sin x/x) \leq x^2$, $x \in \mathbb{R}$, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left\| \sum_k \frac{\sin kh}{kh} a_k e_k - S_{N_j} \right\|_2^2 &= \sum_{k=-N_j}^{N_j} \left(\frac{\sin kh}{kh} - 1 \right)^2 |a_k|^2 + \sum_{|k| > N_j^5} \left(\frac{\sin kh}{kh} \right)^2 |a_k|^2 \\ &= O\left(\sum_{k=1}^{N_j} (kh)^4 + \sum_{k > N_j^5} \frac{1}{(kh)^2} \right) \\ &= O\left(\frac{1}{N_j^8} \sum_{k=1}^{N_j} k^4 + N_j^4 \sum_{k > N_j^5} \frac{1}{k^2} \right) = O\left(\frac{1}{N_j} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

2. В этом пункте мы получим следствия из теоремы 1. Сначала докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 3. Пусть φ – выпуклая вверх функция и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = 0$. Если функция f имеет конечное изменение на $\mathbb{T}$ и $f'(x) = 0$ п.в., то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\left|\frac{f(x+h) - f(x-h)}{h}\right|\right) dx = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $g_{h_i}(x) := (f(x+h_i) - f(x-h_i))/h_i$, где $h_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Выберем $\varepsilon > 0$ и положим $E_i = \{x \in \mathbb{T} : |g_{h_i}(x)| > \varepsilon\}$. Взяв в лемме 1 в качестве функции q характеристическую функцию множества E_i , находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \varphi(|g_{h_i}(x)|) dx &= \int_{\mathbb{T} \setminus E_i} \varphi(|g_{h_i}(x)|) dx + \int_{E_i} \varphi(|g_{h_i}(x)|) dx \\ &\leq 2\pi\varphi(\varepsilon) + |E_i| \varphi\left(\frac{1}{|E_i|} \int_{\mathbb{T}} \left|\frac{f(x+h_i) - f(x-h_i)}{h_i}\right| dx\right) \\ &\leq 2\pi\varphi(\varepsilon) + |E_i| \varphi\left(\frac{V(f)}{|E_i|}\right), \end{aligned}$$

где $V(f)$ – полная вариация функции f на $\mathbb{T}$, а $|E|$ – мера Лебега множества E . На последнем шаге мы применили известный результат Харди и Литтлвуда (см., например, [13; теорема 4.6.14]). Из произвольности выбора $\varepsilon > 0$ и того факта, что $|E_i| \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, получим доказательство нашей леммы.

Следующее следствие в частном случае пространств L_p при $0 < p < 1$ было получено А. Б. Александровым [7; теорема 8.2].

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть φ – выпуклая вверх функция, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = 0$ и $A \subset \mathbb{Z}$. Тогда, если для каждого $n \in \mathbb{Z}$ найдется $a \in \mathbb{N}$ такое, что

$$([-a - n, -a + n] \cup [a - n, a + n]) \cap \mathbb{Z} \subset A,$$

то система $\{e_k\}_{k \in A}$ будет полна в $\varphi(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ подбираем бесконечную последовательность $\{n_{m,j}\}_{j=0}^\infty \subset \mathbb{N}$, которая обладает следующими свойствами: $m = n_{m,0}$, $n_{m,j+1}/n_{m,j} \geq 3$ при всех $j \in \mathbb{Z}_+$, $\pm m + \varepsilon_1 n_{m,1} + \dots + \varepsilon_k n_{m,k} \in A$ и $|m| < |\varepsilon_1 n_{m,1} + \dots + \varepsilon_k n_{m,k}|$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, где $\varepsilon_j \in \{-1, 0, 1\}$.

Рассмотрим функцию

$$f_m(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^x \prod_{j=0}^k (1 + \cos n_{m,j} t) dt.$$

Данная функция является сингулярной (см., например, [11; с. 334]). Но тогда и функция $g_m^\pm(x) = m(f_m(x + \pi/(2m)) \pm i f_m(x))$ будет сингулярной функцией; кроме того, $\hat{g}_m^\pm(\pm m) = 1$ и $\text{spc } g_m^\pm \subset A \cup \{\pm m\}$. Таким образом, используя лемму 3 и теорему 1, докажем следствие 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть φ – выпуклая вверх функция, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = 0$, $B = \{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, $n_{k+1} - 2n_k + n_{k-1} \geq 0$ и $n_{-k} = -n_k$ при $k \in \mathbb{N}$. Система $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus B}$ полна в $\varphi(L)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{k \rightarrow \infty} (n_{k+1} - n_k) = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность сразу следует из следствия 1. Докажем необходимость. Предположим противное, а именно: существует число $q \in \mathbb{N}$ такое, что $n_{k+1} - n_k \leq q$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу выпуклости B получим, что для всех $k \geq k_0$ выполняется равенство $n_{k+1} - n_k = q$; следовательно, $n_{k_0+l} = lq + n_{k_0}$, $l \in \mathbb{N}$. Значит множество B содержит некоторую бесконечную арифметическую прогрессию. Используя результат В. И. Иванова и В. А. Юдина [8; теорема 4] (см., также [10; теорема 4]), получим, что система $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z} \setminus B}$ не полна в $\varphi(L)$. Это противоречие. Следствие доказано.

Следующее утверждение иным способом было получено Ивановым (см. теорему 8 и лемму 14 в [9]).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть φ – выпуклая вверх функция и $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t)/t = 0$. Существует последовательность $C = \{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ такая, что $\lim_{|k| \rightarrow \infty} (n_{k+1} - n_k) = \infty$ и система $\{e_k\}_{k \in C}$ полна в $\varphi(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для того чтобы построить множество C , воспользуемся следующей процедурой. Рассмотрим последовательность тригонометрических полиномов

$$t_1^{(0)}, \quad t_1^{(\pm 1)}, \quad t_2^{(\pm 1)}, \quad t_2^{(0)}, \quad t_1^{(\pm 2)}, \quad t_2^{(\pm 2)}, \quad t_3^{(\pm 2)}, \quad t_3^{(0)}, \quad t_3^{(\pm 1)}, \quad t_1^{(\pm 3)}, \quad \dots,$$

где

$$t_N^{(m)}(x) := e^{imx} \prod_{j=1}^N (1 + \cos m_{N,j} x).$$

В данных полиномах последовательности $\{m_{N,j}\}$ ($m_{N,j+1} \geq 3m_{N,j}$) выбираем таким образом, чтобы $\hat{t}_N^{(m)}(m) = 1$ и множество $C = \cup_m \cup_N (\text{spec } t_N^{(m)} \setminus \{m\})$ удовлетворяло бы условиям нашего утверждения (т.е. разность соседних элементов множества C стремится к бесконечности). Доказательство следствия мы получим из того факта, что для каждого фиксированного $m \in \mathbb{Z}$ $\rho(t_N^{(m)}) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Последнее соотношение можно получить из доказательства леммы 3 и теоремы 7.6 из [11; гл. 5].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] П. Л. Ульянов, “Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ ”, *УМН*, **27**:2 (1972), 3–52.
- [2] В. И. Иванов, “Представление функций рядами в метрических симметричных пространствах без линейных функционалов”, *Всесоюзная школа по теории функций* (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН, **189**, Наука, М., 1989, 34–77.
- [3] V. I. Filippov, “Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_φ ”, *Anal. Math.*, **27**:4 (2001), 239–260.
- [4] А. А. Талалян, “Представление функций классов $L_p[0, 1]$, $0 < p < 1$, ортогональными рядами”, *Acta Math. Academ. Sci. Hungar.*, **21**:1–2 (1970), 1–9.
- [5] K. de Leeuw, “The failure of spectral analysis in L_p for $0 < p < 1$ ”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **82**:1 (1976), 111–114.
- [6] J. H. Shapiro, “Subspaces of $L_p(G)$ spanned by characters: $0 < p < 1$ ”, *Israel J. Math.*, **29**:2–3 (1978), 248–264.
- [7] А. В. Александров, “Essays on non locally convex Hardy classes”, *Complex analysis and spectral theory* (Leningrad, 1979/1980), Lecture Notes in Math., **864**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1–89.
- [8] В. И. Иванов, В. А. Юдин, “О тригонометрической системе в L_p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. заметки*, **28**:6 (1980), 859–868.
- [9] В. И. Иванов, “Представление измеримых функций кратными тригонометрическими рядами”, *Ортогональные ряды и приближение функций*, Посв. 100-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Лузина, Тр. МИАН, **164**, Наука, М., 1983, 100–123.
- [10] Д. Я. Спиваковская, “О тригонометрической системе в метрических пространствах L_Ψ ”, *Вестн. Днепротетр. нац. ун-та. Матем.*, 2001, № 6, 101–115.
- [11] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 1, 2, Мир, М., 1965.
- [12] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Физматгиз, М., 1958.
- [13] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.

Ю. С. Коломойцев

Донецкий национальный университет, Донецк, Украина

E-mail: kolomus1@mail.ru

Поступило

24.01.2006

Исправленный вариант

05.10.2006