Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, О бордизмах вещественных алгебраических M -многообразий, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 724–732

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3716>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 14:57:44

О бордизмах вещественных алгебраических M -многообразий

В. А. Краснов

Каждый морфизм неособых полных вещественных алгебраических многообразий $F: Y \rightarrow X$ определяет голоморфное отображение множеств комплексных точек $F_{\mathbb{C}}: Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ и дифференцируемое отображение множеств вещественных точек $F_{\mathbb{R}}: Y(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})$. Эти два отображения определяют классы неориентированных бордизмов $[F_{\mathbb{C}}] \in \text{MO}_{2m}(X(\mathbb{C}))$, $[F_{\mathbb{R}}] \in \text{MO}_m(X(\mathbb{R}))$, где $m = \dim Y$. Статья посвящена получению соотношений между этими классами бордизмов.

Библиография: 6 названий.

Формулировка основного результата. Далее X – n -мерное комплексно аналитическое многообразие с антиголоморфной инволюцией $\tau: X \rightarrow X$. Будем называть пару (X, τ) *вещественным голоморфным многообразием*, а саму инволюцию τ *вещественной структурой на голоморфном многообразии* X . Будем предполагать, что многообразие X компактное и связное, а также является M -многообразием. Последнее означает, что неравенство Гарнака–Тома

$$\dim H_*(X^{\tau}; \mathbb{F}_2) \leq \dim H_*(X; \mathbb{F}_2)$$

становится равенством, где $H_*(-; \mathbb{F}_2) = \bigoplus_q H_q(-; \mathbb{F}_2)$, $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов и размерность рассматривается над этим полем. Множество неподвижных точек X^{τ} будем обозначать через $X_{\mathbb{R}}$ и называть *множеством вещественных точек* многообразия (X, τ) . Оно является n -мерным компактным дифференцируемым многообразием, может быть несвязным.

Отображение вещественных голоморфных многообразий $F: (Y, \theta) \rightarrow (X, \tau)$ называется *вещественным голоморфным отображением*, если отображение $F: Y \rightarrow X$ голоморфно, а также коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\theta} & Y \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ X & \xrightarrow{\tau} & X. \end{array}$$

Будем предполагать, что многообразие Y компактное, но не обязательно связное. Вещественное голоморфное отображение $F: (Y, \theta) \rightarrow (X, \tau)$ определяет дифференцируемое отображение $F_{\mathbb{R}}: Y_{\mathbb{R}} \rightarrow X_{\mathbb{R}}$ многообразий вещественных точек.

Отображения $F: X \rightarrow Y$, $F_{\mathbb{R}}: Y_{\mathbb{R}} \rightarrow X_{\mathbb{R}}$ определяют классы неориентированных бордизмов

$$[F] = [F]_{\text{МО}} \in \text{МО}_{2m}(X), \quad [F_{\mathbb{R}}] = [F_{\mathbb{R}}]_{\text{МО}} \in \text{МО}_m(X_{\mathbb{R}}),$$

где $m = \dim Y$. В этой заметке доказывается

ТЕОРЕМА 1. *Если выполняется равенство $[F_{\mathbb{R}}]_{\text{МО}} = 0$, то также справедливо равенство $[F]_{\text{МО}} = 0$.*

Эта теорема является аналогом следующей теоремы о классах гомологий

$$F_*([Y]) \in H_{2m}(X; \mathbb{F}_2), \quad (F_{\mathbb{R}})_*([Y_{\mathbb{R}}]) \in H_m(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{F}_2),$$

где

$$[Y] = [Y]_H \in H_{2m}(Y; \mathbb{F}_2), \quad [Y_{\mathbb{R}}] = [Y_{\mathbb{R}}]_H \in H_m(Y_{\mathbb{R}}; \mathbb{F}_2)$$

– фундаментальные классы гомологий многообразий $Y, Y_{\mathbb{R}}$ соответственно.

ТЕОРЕМА 2. *Если выполняется равенство $(F_{\mathbb{R}})_*([Y_{\mathbb{R}}]_H) = 0$, то также справедливо равенство $F_*([Y]_H) = 0$.*

Заметим, что в этих теоремах вещественное голоморфное многообразие (X, τ) является M -многообразием; в противном случае они не справедливы. Теорема 2 доказана в [1] с помощью эквивариантных когомологий; мы будем доказывать теорему 1 по той же схеме, но с помощью эквивариантных кобордизмов.

В работе [2] было введено понятие GM -многообразия, которое является обобщением понятия M -многообразия. Для произвольного вещественного голоморфного многообразия (X, τ) выполняется следующее неравенство Бореля–Свана:

$$\dim H_*(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H_*(X; \mathbb{F}_2)),$$

где $G = \{1, \tau\}$ – группа второго порядка, порожденная инволюцией τ и действующая на многообразии X , $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ – поле из двух элементов. Если неравенство Бореля–Свана становится равенством, то вещественное голоморфное многообразие (X, τ) называется GM -многообразием. В [3] доказано следующее обобщение теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. *Если вещественное голоморфное многообразие (X, τ) является GM -многообразием и выполняется равенство $(F_{\mathbb{R}})_*([Y_{\mathbb{R}}]_H) = 0$, то также справедливо соотношение $F_*([Y]_H) \in (1 + \tau_*)H_{2m}(X; \mathbb{F}_2)$.*

В этой заметке мы покажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Если вещественное голоморфное многообразие (X, τ) является GM -многообразием и выполняется равенство $[F_{\mathbb{R}}]_{\text{МО}} = 0$, то также справедливо соотношение $[F]_{\text{МО}} \in (1 + \tau_*)\text{МО}_{2m}(X)$.*

Заметим наконец, что вещественные голоморфные отображения возникают из морфизмов неособых вещественных алгебраических многообразий. А именно, если рассматривать вещественные алгебраические многообразия как схемы над полем $\mathbb{R}$, то каждый морфизм неособых вещественных алгебраических многообразий $F: Y \rightarrow X$ определяет голоморфное отображение множеств комплексных точек

$F_{\mathbb{C}}: Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ и дифференцируемое отображение множеств вещественных точек $F_{\mathbb{R}}: Y(\mathbb{R}) \rightarrow X(\mathbb{R})$. На множествах комплексных точек $X(\mathbb{C}), Y(\mathbb{C})$ определены антиголоморфные инволюции комплексного сопряжения $\tau: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C}), \theta: Y(\mathbb{C}) \rightarrow Y(\mathbb{C})$, относительно которых голоморфное отображение $F_{\mathbb{C}}: Y(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ является вещественным.

1. Эquivariantные неориентированные кобордизмы. Благодаря двойственности Пуанкаре

$$\mathrm{MO}_k(X) = \mathrm{MO}^{2n-k}(X), \quad \mathrm{MO}_k(X_{\mathbb{R}}) = \mathrm{MO}^{n-k}(X_{\mathbb{R}})$$

определены классы кобордизмов $[F]^* \in \mathrm{MO}^{2n-2m}(X), [F_{\mathbb{R}}]^* \in \mathrm{MO}^{n-m}(X_{\mathbb{R}})$. Кроме этих классов кобордизмов имеется также equivariantный класс кобордизмов $[F]_G^* \in \mathrm{MO}_G^{2n-2m}(X)$, который связывает между собой классы кобордизмов $[F]^* \in \mathrm{MO}^{2n-2m}(X), [F_{\mathbb{R}}]^* \in \mathrm{MO}^{n-m}(X_{\mathbb{R}})$. Прежде чем определить equivariantный класс кобордизмов $[F]_G^*$, напомним, как по схеме Бореля (см. [4]) определяются группы equivariantных неориентированных кобордизмов $\mathrm{MO}_G^q(X)$. Пусть S^∞ – бесконечномерная сфера с антиподальной инволюцией $p \mapsto -p$; тогда рассмотрим на произведении $X \times S^\infty$ диагональную инволюцию $g(x, p) = (\tau(x), -p)$. Если теперь $G = \{1, g\}$ – группа второго порядка, то факторпространство $(X \times S^\infty)/G$ обозначим через X_G и по определению положим

$$\mathrm{MO}_G^q(X) = \mathrm{MO}^q(X_G).$$

Так как факторпространство $X_G = (X \times S^\infty)/G$ является бесконечномерным пространством, его группы кобордизмов определяются как проективный предел групп кобордизмов конечномерных пространств

$$\mathrm{MO}^q(X_G) = \varprojlim_k \mathrm{MO}^q((X \times S^k)/G).$$

Перейдем теперь к определению equivariantного класса кобордизмов

$$[F]_G^* \in \mathrm{MO}_G^{2n-2m}(X).$$

Для этого рассмотрим equivariantное отображение произведений

$$F \times 1: Y \times S^k \rightarrow X \times S^k;$$

после факторизации из него получаем дифференцируемое отображение компактных дифференцируемых многообразий $F_k: (Y \times S^k)/G \rightarrow (X \times S^k)/G$. Это отображение определяет класс кобордизмов $[F_k]^* \in \mathrm{MO}^{2n-2m}((X \times S^k)/G)$. Тогда по определению полагаем

$$[F]_G^* = \varprojlim_k [F_k]^*.$$

Перейдем к формулировке связей между классами кобордизмов $[F]^*, [F_{\mathbb{R}}]^*, [F]_G^*$. Прежде всего заметим, что определены следующие канонические гомоморфизмы:

$$\alpha: \mathrm{MO}_G^q(X) \rightarrow \mathrm{MO}^q(X), \quad \beta: \mathrm{MO}_G^q(X) \rightarrow \mathrm{MO}_G^q(X_{\mathbb{R}}).$$

Первый из них является гомоморфизмом забывания вещественной структуры и возникает благодаря вложению $X \hookrightarrow X_G$ как слоя расслоения $\pi: X_G \rightarrow P_{\mathbb{R}}^{\infty}$. Данное расслоение возникает из тривиального расслоения $X \times S^{\infty} \rightarrow S^{\infty}$ после факторизации. Гомоморфизм β является гомоморфизмом ограничения и индуцирован отображением вложения $(X_{\mathbb{R}}, 1) \hookrightarrow (X, \tau)$. (Заметим, что на $X_{\mathbb{R}}$ инволюция τ действует тривиально.) Так как $(X_{\mathbb{R}} \times S^{\infty})/G = X_{\mathbb{R}} \times P_{\mathbb{R}}^{\infty}$, то выполняются равенства

$$\mathrm{MO}_G^q(X_{\mathbb{R}}) = \prod_{k \leq q} t^{q-k} \cdot \mathrm{MO}^k(X_{\mathbb{R}}) = \prod_{k \leq q} \mathrm{MO}^k(X_{\mathbb{R}}),$$

где элемент $t \in \mathrm{MO}^1(RP^{\infty})$ определяется вложением гиперплоскости в $P_{\mathbb{R}}^{\infty}$.

Заметим, что с помощью эквивариантных кобордизмов удобно определять полный квадрат Стиррода

$$\mathrm{Sq}: \mathrm{MO}^q(X_{\mathbb{R}}) \rightarrow \prod_{k \leq 2q} \mathrm{MO}^k(X_{\mathbb{R}}).$$

Пусть элемент $a \in \mathrm{MO}^q(X_{\mathbb{R}})$ представлен дифференцируемым отображением $A: Z \rightarrow X_{\mathbb{R}}$, где Z – компактное дифференцируемое многообразие размерности $n - q$. Тогда рассмотрим эквивариантное отображение

$$A \times A: (Z \times Z, \delta) \rightarrow (X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}, \delta),$$

где δ – инволюция, переставляющая сомножители. Это отображение определяет эквивариантный класс кобордизмов $[A \times A]_G^* \in H_G^{2q}(X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}})$. Ограничим этот класс на диагональ произведения $X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}$; тогда получим полный квадрат Стиррода

$$\mathrm{Sq}(a) \in \prod_{k \leq 2q} \mathrm{MO}^k(X_{\mathbb{R}}).$$

В следующем утверждении сформулированы связи между классами кобордизмов $[F]^*$, $[F_{\mathbb{R}}]^*$, $[F]_G^*$.

ЛЕММА 1. *Справедливы равенства $\alpha([F]_G^*) = [F]^*$, $\beta([F]_G^*) = \mathrm{Sq}([F_{\mathbb{R}}]^*)$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству аналогичного утверждения для когомологий (см., например, [5]), поэтому мы его не приводим. Заметим, что для ее справедливости не нужно предполагать, чтобы вещественное голоморфное многообразие (X, τ) было M -многообразием.

Для эквивариантных кобордизмов существует несколько спектральных последовательностей, сходящихся к ним. Первая спектральная последовательность

$$I_r^{p,q} \Longrightarrow \mathrm{MO}_G^{p+q}(X)$$

является спектральной последовательностью Лере для отображения $p: X_G \rightarrow X/G$, которое возникает из проекции $X \times S^{\infty} \rightarrow X$. Расслоение $\pi: X_G \rightarrow P_{\mathbb{R}}^{\infty}$ со слоем X определяет вторую спектральную последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, \mathrm{MO}^q(X)) \Longrightarrow \mathrm{MO}_G^{p+q}(X).$$

Спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха

$$E_2^{p,q} = H^p(X_G; \text{MO}^q(\text{pt})) \implies \text{MO}^{p+q}(X_G)$$

дает третью спектральную последовательность

$$\text{III}_2^{p,q} = H_G^p(X; \text{MO}^q(\text{pt})) \implies \text{MO}_G^{p+q}(X),$$

где $H_G^p(X; \text{MO}^q(\text{pt})) = H_G^p(X; \mathbb{F}_2) \otimes \text{MO}^q(\text{pt})$ – группа эквивариантных когомологий и pt – одноточечное пространство.

2. Доказательство основного результата и его обобщения. Перейдем к доказательству теоремы 1. Сначала будет доказана

ЛЕММА 2. *Если вещественное голоморфное многообразие (X, τ) является M -многообразием, то гомоморфизм ограничения*

$$\beta: \text{MO}_G^q(X) \rightarrow \text{MO}_G^q(X(\mathbb{R}))$$

является мономорфизмом при каждом q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм третьих спектральных последовательностей

$$\text{III}_2^{p,q}(X) = H_G^p(X; \text{MO}^q(\text{pt})) \rightarrow \text{III}_2^{p,q}(X_{\mathbb{R}}) = H_G^p(X_{\mathbb{R}}; \text{MO}^q(\text{pt})).$$

Так как для M -многообразия гомоморфизм ограничения

$$H_G^p(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H_G^p(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{F}_2)$$

является мономорфизмом при каждом p (см. [2]), то гомоморфизм

$$\begin{aligned} H_G^p(X; \text{MO}^q(\text{pt})) &= H_G^p(X; \mathbb{F}_2) \otimes \text{MO}^q(\text{pt}) \\ &\rightarrow H_G^p(X_{\mathbb{R}}; \text{MO}^q(\text{pt})) = H_G^p(X_{\mathbb{R}}; \mathbb{F}_2) \otimes \text{MO}^q(\text{pt}) \end{aligned}$$

также будет мономорфизмом. Следовательно, гомоморфизм

$$\beta: \text{MO}_G^q(X) \rightarrow \text{MO}_G^q(X_{\mathbb{R}})$$

будет мономорфизмом при каждом q . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $[F_R] = 0$; тогда $[F_R]^* = 0$ и, следовательно, $\text{Sq}([F_R]^*) = 0$. Применим леммы 1, 2; тогда получим равенства $[F_R]_G^* = 0$, $[F]^* = \alpha([F_R]_G^*) = 0$, $[F] = 0$. Теорема доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4, но сначала покажем, что справедлива

ЛЕММА 3. *Если вещественное голоморфное многообразие (X, τ) является GM -многообразием и элемент $[F]_G^*$ принадлежит ядру гомоморфизма ограничения*

$$\beta: \text{MO}_G^q(X) \rightarrow \text{MO}_G^q(X_{\mathbb{R}}),$$

то элемент $[F]^$ принадлежит группе $(1 + \tau^*) \text{MO}^q(X)$.*

Аналогичная лемма для когомологий GM -многообразия доказана в [3], но нельзя сказать, что доказательство леммы 3 аналогично рассуждению в [3] для когомологий. Покажем сначала, что при каждом q образ гомоморфизма забывания вещественной структуры

$$\alpha: \text{MO}_G^q(X) \rightarrow \text{MO}^q(X)$$

равен группе $\text{MO}^q(X)^G$.

Группа $\text{MO}^q(X)$ является конечномерным векторным пространством над полем $\mathbb{F}_2$. Будем оценивать размерность образа гомоморфизма забывания вещественной структуры $\alpha(\text{MO}_G^q(X))$. Так как всегда имеет место вложение

$$\alpha(\text{MO}_G^q(X)) \subset \text{MO}^q(X)^G,$$

для любого вещественного голоморфного многообразия (X, τ) выполняется неравенство

$$\dim \alpha(\text{MO}_G^q(X)) \leq \dim \text{MO}^q(X)^G.$$

Покажем, что для GM -многообразия выполняется также противоположное неравенство.

Заметим сначала, что гомоморфизм забывания вещественной структуры для когомологий

$$\alpha: H_G^q(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X; \mathbb{F}_2)$$

в случае GM -многообразия имеет образ, равный $H^q(X, \mathbb{F}_2)^G$, так как тогда вторая спектральная последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(X; \mathbb{F}_2)) \implies H_G^{p+q}(X; \mathbb{F}_2)$$

вырождается, а гомоморфизм

$$\alpha: H_G^q(X; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X, \mathbb{F}_2)^G$$

равен краевому гомоморфизму этой спектральной последовательности (см., например, [2]). Следовательно, образ гомоморфизма

$$\alpha: H_G^{q+k}(X; \text{MO}^{-k}(\text{pt})) \rightarrow H^{q+k}(X; \text{MO}^{-k}(\text{pt}))$$

равен

$$H^{q+k}(X, \text{MO}^{-k}(\text{pt}))^G = H^{q+k}(X, \mathbb{F}_2)^G \otimes \text{MO}^{-k}(\text{pt})$$

при любом $k \geq 0$. Так как третья спектральная последовательность

$$\Pi_2^{q+k, -k} = H_G^{q+k}(X; \text{MO}^{-k}(\text{pt})) \implies \text{MO}_G^q(X)$$

вырождается, выполняется неравенство

$$\dim \alpha(\text{MO}_G^q(X)) \geq \sum_k \dim H^{q+k}(X; \mathbb{F}_2)^G \otimes \text{MO}^{-k}(\text{pt}).$$

А из спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха

$$E_2^{q+k, -k} = H^{q+k}(X; \text{MO}^{-k}(\text{pt})) \implies \text{MO}^q(X)$$

получаем неравенство

$$\sum_k \dim H^{q+k}(X, \mathbb{F}_2)^G \otimes \mathrm{MO}^{-k}(\mathrm{pt}) \geq \dim \mathrm{MO}^q(X)^G.$$

В итоге получаем требуемое неравенство

$$\dim \alpha(\mathrm{MO}_G^q(X)) \geq \dim \mathrm{MO}^q(X)^G.$$

Эпиморфность краевого гомоморфизма

$$\alpha: \mathrm{MO}_G^q(X) \rightarrow \mathrm{MO}^q(X)^G$$

при каждом q означает, что равны нулю дифференциалы $d_r^{0,q}$ во второй спектральной последовательности

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, \mathrm{MO}^q(X)) \implies \mathrm{MO}_G^{p+q}(X).$$

С помощью умножения на степени элемента $t \in \mathrm{MO}_G^1(\mathrm{pt})$ мы будем устанавливать, что все дифференциалы в этой спектральной последовательности нулевые. Вторая спектральная последовательность определяет возрастающую фильтрацию

$$\cdots \subset F^0 \mathrm{MO}_G^q(X) \subset F^1 \mathrm{MO}_G^q(X) \subset \cdots \subset F^{q-1} \mathrm{MO}_G^q(X) \subset F^q \mathrm{MO}_G^q(X) = \mathrm{MO}_G^q(X).$$

Группа $F^{q-1} \mathrm{MO}_G^q(X)$ равна ядру гомоморфизма забывания вещественной структуры

$$\alpha: \mathrm{MO}_G^q(X) \rightarrow \mathrm{MO}^q(X).$$

Поэтому группа $F^0 \mathrm{MO}_G^1(\mathrm{pt})$ равна группе $\mathrm{MO}_G^1(\mathrm{pt})$, так как группа $\mathrm{MO}^1(\mathrm{pt})$ равна нулю. Таким образом, элемент $t \in \mathrm{MO}_G^1(\mathrm{pt})$ принадлежит группе $F^0 \mathrm{MO}_G^1(\mathrm{pt})$ и определяет элемент

$$\tilde{t} \in \Pi_\infty^{1,0}(\mathrm{pt}) = H^1(G, \mathrm{MO}^0(\mathrm{pt})),$$

который равен образу t при проекции

$$F^0 \mathrm{MO}_G^1(\mathrm{pt}) \rightarrow F^0 \mathrm{MO}_G^1(\mathrm{pt}) / F^{-1} \mathrm{MO}_G^1(\mathrm{pt}) = \Pi_\infty^{1,0}(\mathrm{pt}).$$

Так как $\Pi_\infty^{1,0}(\mathrm{pt}) = \Pi_r^{1,0}(\mathrm{pt}) = H^1(G, \mathbb{F}_2)$ при любом $r \geq 2$, элемент $\tilde{t}$ является образующей группы $H^1(G; \mathbb{F}_2)$. Равенство нулю дифференциалов $d_r^{p,q}$ при $p > 0$ и $r = 2, 3, \dots$ вытекает тогда из последовательного рассмотрения коммутативных диаграмм

$$\begin{array}{ccc} \Pi_r^{0,q}(X) & \xrightarrow{d_r^{0,q}} & \Pi_r^{r,q-r+1} \\ \cup \tilde{t}^p \downarrow & & \downarrow \cup \tilde{t}^p \\ \Pi_r^{p,q}(X) & \xrightarrow{d_r^{p,q}} & \Pi_r^{p+r,q-r+1} \end{array}$$

при $r = 2, 3, \dots$, так как левый гомоморфизм $\cup \tilde{t}^p$ в них является эпиморфизмом.

Таким образом, для GM -многообразия эта спектральная последовательность вырождается.

Доказательство леммы 3 вытекает из вырождения второй спектральной последовательности. Соответствующее рассуждение для когомологий проведено в [1]. Доказательство для кобордизмов аналогично, но предварительно требуется доказать утверждения, аналоги которых для когомологий были доказаны в [2]. Поэтому мы проведем полное рассуждение.

Прежде всего заметим, что справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. При $N > 2n$ гомоморфизм

$$\cup t: \text{MO}_G^N(X) \rightarrow \text{MO}_G^{N+1}(X)$$

является изоморфизмом.

Оно вытекает из равенств $\text{MO}^q(X) = 0$ при $q > 2n$ после применения второй спектральной последовательности. Таким образом, если рассмотреть мультипликативную систему $S = \{t^k \mid k \geq 0\} \subset \text{MO}_G^*(\text{pt})$, то канонический гомоморфизм

$$\text{MO}_G^N(X) \rightarrow S^{-1} \text{MO}_G^*(X)$$

при $N > 2n$ является изоморфизмом. Из общей локализационной теоремы вытекает, что гомоморфизм ограничения

$$\beta: S^{-1} \text{MO}_G^*(X) \rightarrow S^{-1} \text{MO}_G^*(X_{\mathbb{R}})$$

является изоморфизмом (см., например, [6]). Следовательно, гомоморфизм ограничения

$$\beta: \text{MO}_G^N(X) \rightarrow \text{MO}_G^N(X_{\mathbb{R}})$$

является изоморфизмом при $N > 2n$. Из этих двух утверждений следует, что ядро гомоморфизма ограничения

$$\beta: \text{MO}_G^q(X) \rightarrow \text{MO}_G^q(X_{\mathbb{R}})$$

совпадает с ядром гомоморфизма умножения на большую степень элемента t

$$\cup t^N: \text{MO}_G^q(X) \rightarrow \text{MO}_G^{q+N}(X).$$

Этот гомоморфизм индуцирует гомоморфизм

$$\cup \tilde{t}^N: \Pi_{\infty}^{0,q}(X) \rightarrow \Pi_{\infty}^{N,q}(X).$$

Так как вторая спектральная последовательность для X вырождается, этот гомоморфизм совпадает с проекцией

$$\text{MO}^q(X)^G \rightarrow \text{MO}^q(X)^G / (1 + \tau^*) \text{MO}^q(X).$$

Поэтому ядро гомоморфизма $\cup \tilde{t}^N$ равно группе $(1 + \tau^*) \text{MO}^q(X)$. Пусть элемент $a \in \text{MO}_G^q(X)$ принадлежит ядру гомоморфизма $\cup t^N$; тогда элемент $\alpha(a) \in \text{MO}^q(X)$ принадлежит ядру гомоморфизма $\cup \tilde{t}^N$, т.е. группе $(1 + \tau^*) \text{MO}^q(X)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Применим леммы 1, 3. Тогда из равенств $[F_{\mathbb{R}}]^* = 0$, $\beta([F]_G^*) = \text{Sq}([F_{\mathbb{R}}]^*) = 0$ получим соотношение

$$[F]^* = \alpha([F]_G^*) \in (1 + \tau^*) \text{MO}^{2n-2m}(X),$$

что и требовалось доказать в теореме 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Краснов, “Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 716–746.
- [2] В. А. Краснов, “Изв. АН СССР. Сер. матем.”, **47**:2 (1983), 268–297.
- [3] В. А. Краснов, “Алгебраические циклы на вещественном алгебраическом GM -многообразии и их приложения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:4 (1993), 153–173.
- [4] У. И. Сян, *Когомологическая теория топологических групп преобразований*, Мир, М., 1979.
- [5] В. А. Краснов, “Вещественные алгебраические GM -многообразия”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 39–66.
- [6] Т. том Дик, *Группы преобразований и теория представлений*, Мир, М., 1982.

В. А. Краснов

Ярославский государственный университет

E-mail: krasnov@uniyar.ac.ru

Поступило

12.01.2004

Исправленный вариант

24.08.2006