Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Г. Мощевитин, А. М. Райгородский, О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 733–743

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:20:10

О раскрасках пространства $\mathbb{R}^n$ с несколькими запрещенными расстояниями

Н. Г. Мощевитин, А. М. Райгородский

В настоящей работе рассматривается классическая задача о хроматическом числе метрического пространства, т.е. о минимальном количестве цветов, в которые можно так раскрасить все точки пространства, чтобы величина расстояния (метрики) между одноцветными точками не принадлежала заданному множеству положительных вещественных чисел (множеству *запрещенных расстояний*). В статье получены новые оценки для такого хроматического числа в случаях, когда пространство – это $\mathbb{R}^n$ с метрикой, порожденной некоторой нормой (в частности, l_p), а множество запрещенных расстояний либо конечно, либо образует лакунарную последовательность.

Библиография: 20 названий.

1. Введение. Пусть (X, ρ) – некоторое метрическое пространство и $A \subset \mathbb{R}_+$ – некоторое множество. *Хроматическим числом пространства (X, ρ) с множеством запрещенных расстояний A* называется минимальное число

$$\chi((X, \rho), A)$$

цветов, в которые можно раскрасить пространство X так, чтобы между любыми точками одного цвета не было расстояния в метрике ρ , величина которого принадлежит множеству A . Задача об отыскании и оценках хроматических чисел различных пространств в настоящее время очень популярна (см. обзоры и книги [1]–[7]).

В этой работе мы рассматриваем пространство $X = \mathbb{R}^n$, в котором метрика порождена некоторой нормой, а множество A либо конечно ($A = \{a_1, \dots, a_k\}$), либо представляет собой лакунарную последовательность. Напомним, что последовательность $a_1, \dots, a_i, \dots$ называется *лакунарной*, если при каждом i выполняется условие

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} \geq 1 + \frac{1}{d} \quad (1)$$

с некоторым положительным d . Это d в дальнейшем, для удобства, будем считать целым числом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 06-01-00912, программы “Ведущие научные школы”, грант № НШ-1312.2006.1, гранта Президента РФ, грант № МД-4235.2006.1, и фонда ИНТАС, грант № 03-51-5070.

Для лакунарных последовательностей случай $n = 1$ рассматривали И. Ружа, Ж. Туза и М. Войгт [8], И. Кацнельсон [9], а также Р. К. Ахунжанов и Н. Г. Мощевитин [10]. Так, в [10] доказано, что если бесконечная лакунарная последовательность A удовлетворяет (1), то

$$d \leq \chi((\mathbb{R}, |\cdot|), A) \leq 2^7 \cdot d^2.$$

С другой стороны, И. Кацнельсон и Б. Вайс [11] доказали, что если рассматривается двумерная плоскость с евклидовой метрикой, а множество A неограничено, то *измеримое* хроматическое число $\chi_\mu((\mathbb{R}^2, l_2), A)$ равно бесконечности (когда речь идет об измеримом хроматическом числе, предполагается, что точки, раскрашенные в одинаковый цвет, образуют измеримое по Лебегу множество). Более изящное доказательство более общего утверждения (использующее гармонический анализ) имеется у Ж. Бургейна [12].

Отметим, что в случае, когда речь идет о конечных множествах $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, при произвольном $p \in [1, +\infty)$ известны (см. [13]) оценки

$$(C_1 k)^{C_2 n} \leq \max_{A: |A|=k} \chi((\mathbb{R}^n, l_p), A) \leq (5 + o(1))^{kn}. \quad (2)$$

Здесь нижняя оценка получена А. М. Райгородским, а верхняя оценка фактически принадлежит Дж.-Х. Канг и З. Фюреди [14] (этот результат обобщает неравенство Д. Лармана и К. Роджерса [15])

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a\}) \leq (3 + o(1))^n,$$

из которого сразу вытекает соотношение

$$\max_{A: |A|=k} \chi((\mathbb{R}^n, l_2), A) \leq (3 + o(1))^{kn}; \quad (3)$$

оно понадобится нам в дальнейшем).

2. Формулировка результатов.

ТЕОРЕМА 1. *Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ норму $F(\mathbf{x})$ такую, что область $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \leq 1\}$ представляет собой центрально-симметричный многогранник с $2g$ гипергранями. Пусть $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Тогда*

1) *если задано конечное множество $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, то*

$$\chi((\mathbb{R}^n, f), A) \leq (4k)^g;$$

2) *если задано бесконечное множество $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots\}$, представляющее собой лакунарную последовательность, и выполнено (1), то*

$$\chi((\mathbb{R}^n, f), A) \leq (2^7 d^2)^g.$$

Из теоремы 1 и верхней оценки из (2) сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Выполнено неравенство*

$$\max_{A: |A|=k} \chi((\mathbb{R}^n, l_1), A) \leq \min\{(4k)^{2^{n-1}}; (5 + o(1))^{kn}\};$$

кроме того, если множество $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots\}$ есть лакунарная последовательность с условием (1), то

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_1), A) \leq (2^7 d^2)^{2^{n-1}}.$$

Как отмечалось во введении, для конечного множества A имеются оценки снизу на максимальное хроматическое число $\chi((\mathbb{R}^n, l_p), A)$. Следующая теорема устанавливает оценку снизу в том случае, когда конечное множество A является лакунарной последовательностью, причем коэффициент лакунарности (величина отношения соседних элементов последовательности) оценивается и сверху, и снизу. Доказательство этого результата использует предложенный Райгородским метод альтернирования [16].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p \in \{1, 2\}$. Каково бы ни было d , найдется такой набор чисел $a_1 > 0, \dots, a_k > 0$, удовлетворяющих условию

$$1 + \frac{1}{d} \leq \frac{a_i}{a_{i-1}} \leq 1 + \frac{1}{c \log d} \quad \forall i = 2, \dots, k,$$

при некотором постоянном $c > 0$, что

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_p), \{a_1, \dots, a_k\}) \geq (c_1 d)^{c_2 n},$$

где $c_1, c_2 > 0$ – абсолютные константы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ниже мы приводим подробное доказательство теоремы 2 в случае $p = 2$. Ничего по сути не изменится, если мы будем работать не с евклидовой метрикой, а с метрикой l_1 . Потребуется лишь осуществить незначительный пересчет параметров (разбиение на случаи), модифицировать полиномы в случае 2, грубо говоря, попросту заменяя в них скалярные произведения векторов расстояниями между ними, и в случае 4 брать вместо шара ортаэдр. Кроме того, всюду, где в доказательстве используется оценка (3), надо применять вместо нее верхнюю оценку из (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если бы в теореме 2 речь шла об измеримом хроматическом числе, то результат ее был бы тривиален. Однако если дополнительно предположить, что $k \ll d$ (а так оно в доказательстве и получится), то утверждение нетривиально в любом случае.

3. Доказательство теоремы 1. Сформулируем некоторые необходимые нам простые факты из теории диофантовых приближений.

ЛЕММА 1. Для произвольного набора положительных вещественных чисел $a_1, \dots, a_k$ таких, что $a_i \geq 1 \quad \forall i$, найдется вещественное α такое, что

$$\|\alpha a_j\| \geq \frac{1}{4k}, \quad j = 1, \dots, k.$$

(Здесь через $\|\cdot\|$ обозначено расстояние до ближайшего целого.)

Для того, чтобы убедиться в справедливости леммы, достаточно заметить, что мера множества $J_i = \{x \in [0, 1] : \|a_i x\| < 1/(4k)\}$ меньше $1/k$ и, следовательно, мера объединения $\bigcup_{1 \leq i \leq k} J_i$ меньше единицы.

Отметим, что с леммой 1 связана интересная задача. В случае, когда все a_i целые, имеется гипотеза о существовании α , для которого выполнено

$$\|\alpha a_i\| \geq \frac{1}{k+1}.$$

Современное состояние этого вопроса отражено в работе [17].

Для бесконечной лакунарной последовательности $a_1, \dots, a_k, \dots$ нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть последовательность a_k удовлетворяет (1) с $d \geq 3$. Тогда найдется вещественное α такое, что

$$\|\alpha a_k\| \geq \frac{1}{27d^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 2 доказана в [10]; она представляет собой усиление результата де Матана–Поллингтона [18], [19].

Опишем теперь устройство раскрасок.

Всюду ниже вещественное α берется из леммы 1, если речь идет об утверждении о конечном числе запрещенных расстояний, и из леммы 2, если речь идет об утверждении о бесконечном количестве запрещенных расстояний, образующих лакунарную последовательность.

Для доказательства теоремы о норме F нужно поступить так. Возьмем прямую ℓ , проходящую через центр O многогранника $\mathcal{F}$, не параллельную ни одной $(n-1)$ -мерной грани многогранника $\mathcal{F}$. Пусть она пересекает плоскости $\pm\pi_n u$ граней многогранника $\mathcal{F}$ в точках $\pm R_\nu$ и пусть евклидово расстояние на прямой ℓ от точки O до ближайшей из точек $\pm R_\nu$ есть ρ_ν . Рассмотрим g штук раскрасок прямой ℓ в q цветов $\Omega_1, \dots, \Omega_q$ так, чтобы в ν -й раскраске расстояния $\rho_\nu a_i$ были бы на этой прямой запрещены (q берется равным $4k$, если доказывается утверждение 1) теоремы, и $2^7 d^2$, если – утверждение 2)). Все пространство мы будем раскрашивать q^g цветами $(\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_g}), j_\nu = 1, \dots, q$.

Мы хотим раскрасить точку $\mathbf{x}$. Для этого спроецируем ее параллельно плоскости каждой грани многогранника $\mathcal{F}$ на прямую ℓ . Пусть получившиеся проекции суть точки $x(\nu) \in w$. Тогда, если $x(\nu) \in \Omega_{j_\nu}$ в ν -й раскраске прямой ℓ , то точку $\mathbf{x}$ красим в цвет $(\Omega_{j_1}, \dots, \Omega_{j_g})$. При такой раскраске пространства две точки $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ одного цвета не могут находиться на расстоянии a_i друг от друга в норме F , поскольку в противном случае $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in a_i \mathcal{F}$ и, значит, евклидово расстояние на прямой ℓ между точками $x(\nu^*), y(\nu^*)$ равно $\rho_{\nu^*} a_i$ (здесь ν^* обозначает номер плоскости той грани многогранника $\mathcal{F}$, которую пересекает прямая, порожденная вектором $\mathbf{x} - \mathbf{y}$). Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2 в случае $p = 2$. Мы хотим показать, что, каково бы ни было d , найдется такой набор чисел $a_1 > 0, \dots, a_k > 0$, удовлетворяющих

условию

$$1 + \frac{1}{d} \leq \frac{a_i}{a_{i-1}} \leq 1 + \frac{1}{c \log d} \quad \forall i = 2, \dots, k,$$

при некотором постоянном $c > 0$, что

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_1, \dots, a_k\}) \geq (c_1 d)^{c_2 n},$$

где $c_1, c_2 > 0$ – абсолютные константы. Для этого зафиксируем достаточно большое значение размерности $n > n_0$ (в дальнейшем будет видно, насколько большой может оказаться величина n_0) и рассмотрим четыре случая.

Случай 1. Пусть $d \leq 2^{10002}$. Тогда мы положим $k = 2$ и возьмем в качестве a_1, a_2 произвольные положительные вещественные числа, отношение которых лежит в нужных пределах. Ясно, что

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_1, a_2\}) \geq \chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{1\}),$$

а стало быть (см. [20]),

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_1, a_2\}) \geq (1.239)^n = (\nu_1 d)^{\mu_1 n}.$$

Последнее равенство выполнено, так как в рамках нашего случая d не превосходит некоторой константы, и все в порядке.

Случай 2. Пусть $2^{10002} < d \leq 2^{102} n^2$ ($n > n_0$). Тогда мы положим $k = [d/4]$ и введем некоторые дополнительные параметры, а именно:

$$r = \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 k \right\rfloor - 100, \quad t = \left\lfloor \frac{n}{2^r} \right\rfloor.$$

Понятно, что $r \leq [\log_2 n]$ и, значит, $t \geq 1$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{R}_{2^r t} = \{1, \dots, 2^r t\} \subset \mathfrak{R}_n = \{1, \dots, n\}$$

и разобьем его на произвольные 2^r частей мощности t :

$$\mathfrak{R}_{2^r t} = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_{2^r}, \quad |A_i| = t.$$

Каждому такому разбиению поставим в соответствие вектор

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(A_1, \dots, A_{2^r}) \in \mathbb{R}^n$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(A_1, \dots, A_{2^r}) = (x_1, \dots, x_n) : \quad & \{i : x_i = 1\} = A_1, \quad \{i : x_i = 2\} = A_2, \quad \dots, \\ & \{i : x_i = 2^r\} = A_{2^r}, \quad \{i : x_i = 0\} = \mathfrak{R}_n \setminus \mathfrak{R}_{2^r t}. \end{aligned}$$

Наконец, положим

$$\Sigma = \bigcup \mathbf{x}(A_1, \dots, A_{2^r}),$$

где объединение берется по всем возможным разбиениям множества $\mathfrak{A}_{2^r t}$ на 2^r частей мощности t , причем разбиения считаются различными, даже если все их элементы в совокупности одинаковы, но записаны в разном порядке, например:

$$\{A, B, A_3, \dots, A_{2^r}\} \neq \{B, A, A_3, \dots, A_{2^r}\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$|\Sigma| \geq 2^{rn/2-2n} = (\alpha_1 d)^{\beta_1 n}.$$

Пусть

$$a = \left\lfloor \frac{n}{2^r} \right\rfloor \frac{2^r(2^r + 1)(2^{r+1} + 1)}{6}$$

(заметим, что, на самом деле, $a = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ для любого вектора $\mathbf{x} \in \Sigma$), а p есть наименьшее нечетное простое число такое, что $p > a/k$. Тогда в силу известного постулата Бертрана $p \leq 2a/k$ (здесь мы пользуемся тем, что $n > n_0$, для обоснования неравенства $a/k > 3$). Определим, далее, величины

$$b_1 = a - p, \quad b_2 = a - 2p, \quad \dots, \quad b_k = a - kp$$

и каждому вектору $\mathbf{x} \in \Sigma$ поставим в соответствие многочлен $P_{\mathbf{x}} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]$ следующего вида:

$$P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \prod_{i \not\equiv a \pmod{p}} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad y_i \times (y_i - 1) \times \dots \times (y_i - 2^r) = 0.$$

Имеется в виду, что после раскрытия скобок в выражении

$$\prod_{i \not\equiv a \pmod{p}} (i - (\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

мы к каждой переменной y_i применяем условие

$$y_i \times (y_i - 1) \times \dots \times (y_i - 2^r) = 0$$

до тех пор, пока это не перестанет быть возможным, т.е. пока степень этой переменной не сделается меньше 2^r . Значит, всякий многочлен $P_{\mathbf{x}}$ имеет степень $p - 1$, и любая переменная входит в этот многочлен в степени, не превосходящей величины 2^r . Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Каково бы ни было семейство векторов*

$$Q = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset \Sigma$$

с условием $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \notin \{b_1, \dots, b_k\}$, для величины $s = |Q|$ может быть получена оценка

$$s \leq \sum_{l=0}^p C_n^l 2^{rl} < 2^{rp+n} = (\alpha_2 d)^{\beta_2 n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно убедиться в том, что многочлены $P_{\mathbf{x}_1}, \dots, P_{\mathbf{x}_s}$, отвечающие векторам из Q , линейно независимы над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, и проверить, что размерность пространства, порожденного ими, действительно, не больше величины $\sum_{l=0}^p C_n^l 2^{rl}$. Последний факт немедленно следует из определения многочленов (заметим только, что для получения окончательной оценки мы воспользовались также тем, что $p \leq 2a/k < n$ (при $n > n_0$)), а линейная независимость устанавливается стандартно (см. [2]): мы исходим из того, что

- если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv a \pmod{p}$ тогда и только тогда, когда либо $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, либо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{b_1, \dots, b_k\}$;
- если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$, то $P_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \equiv 0 \pmod{p}$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv a \pmod{p}$;
- в условиях леммы $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \notin \{b_1, \dots, b_k\}$, коль скоро $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in Q$.

Лемма доказана.

Легко видеть, что

$$\frac{(\alpha_1 d)^{\beta_1 n}}{(\alpha_2 d)^{\beta_2 n}} = (\alpha_3 d)^{\beta_3 n}.$$

Более того, найдется такое U , что

$$\frac{(\alpha_1 d)^{\beta_1 n}}{U} = (\alpha_4 d)^{\beta_4 n} \quad \text{и} \quad \frac{U}{(\alpha_2 d)^{\beta_2 n}} = (\alpha_5 d)^{\beta_5 n}.$$

Определим l из соотношения

$$(3 + o(1))^{ln} < (\alpha_5 d)^{\beta_5 n}.$$

Ясно, что $l \asymp \log d$. Рассмотрим граф $G_1 = (V_1, E_1)$, у которого $V_1 = \Sigma$, а

$$E_1 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Sigma \times \Sigma : l_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{a_{l+1}, \dots, a_k\}\},$$

где $a_i = \sqrt{2ip}$, $i = 1, \dots, k$, т.е. $l_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_i$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_i$. Предположим, что число независимости графа G_1 меньше, чем U . Тогда из принципа Дирихле мгновенно вытекает неравенство

$$\chi(G_1) \geq \frac{\text{card } \Sigma}{U} \geq (\alpha_4 d)^{\beta_4 n}.$$

Это значит, что

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_{l+1}, \dots, a_k\}) \geq \chi(G_1) \geq (\alpha_4 d)^{\beta_4 n},$$

причем нетрудно проверить, что a_i/a_{i-1} лежит в нужных пределах.

В противном случае найдется такое $V_2 \subset V_1$, что $|V_2| \geq U$ и V_2 свободно от расстояний $a_{l+1}, \dots, a_k$, т.е. от скалярных произведений $b_{l+1}, \dots, b_k$. Рассмотрим граф $G_2 = (V_2, E_2)$, у которого

$$E_2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_2 \times V_2 : l_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{a_1, \dots, a_l\}\}.$$

Понятно, что лемма оценивает как раз число независимости этого графа, ведь если $Q \subset V_2$ свободно от расстояний $a_1, \dots, a_l$, то ввиду выбора самого V_2 мощность Q не превосходит мощности произвольного семейства векторов в Σ , свободного от всех расстояний $a_1, \dots, a_k$ (скалярных произведений $b_1, \dots, b_k$). Таким образом,

$$\chi(G_2) \geq \frac{U}{(\alpha_2 d)^{\beta_2 n}} = (\alpha_5 d)^{\beta_5 n} > (3 + o(1))^{ln}$$

или, тем более,

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_1, \dots, a_l\}) > (3 + o(1))^{ln}.$$

Но это невозможно благодаря известной нам оценке

$$\max_{A: |A|=l} \chi((\mathbb{R}^n, l_2), A) \leq (3 + o(1))^{ln}.$$

Стало быть, в самом деле,

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_{l+1}, \dots, a_k\}) \geq (\alpha_4 d)^{\beta_4 n},$$

и рассмотрение случая завершено.

Случай 3. В этом случае мы предполагаем, что

$$\max\{2^{10002}, 2^{102} n^2\} < d \leq n^{2.5}, \quad n > n_0.$$

Тогда мы попросту “продолжаем” оценку из предыдущего пункта на такие значения d :

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_{l+1}, \dots, a_k\}) \geq (\nu_2 d)^{\mu_2 n}$$

(здесь мы пользуемся тем, что $d \leq n^\gamma$ с фиксированным γ). Ясно ведь, что и для новых d соотношение

$$1 + \frac{1}{d} \leq \frac{a_i}{a_{i-1}} \leq 1 + \frac{1}{c \log d} \quad \forall i = l+2, \dots, k,$$

сохранится с точностью до величины c .

Случай 4. Изучим, наконец, последний оставшийся случай, когда $d > n^{2.5}$. Положим $k = [d/4]$ и введем следующие обозначения: через $\mathbb{Z}_+^n$ мы обозначим множество всех векторов целочисленной решетки, имеющих неотрицательные координаты; через $B \subset \mathbb{R}^n$ мы обозначим шар радиуса $\sqrt{k/2}$ с центром в начале координат. Рассмотрим множество

$$S = (B \cap \mathbb{Z}_+^n) \subset \mathbb{R}^n.$$

Ясно, что

$$|S| \geq V_n(\gamma\sqrt{k})^n \geq (\alpha_6 d)^{\beta_6 n},$$

где V_n – объем единичного n -мерного шара, $\gamma, \alpha_6, \beta_6$ – абсолютные постоянные, а в последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $\sqrt{k}/n \gg k^{1/10}$, т.е. величина V_n не влияет на вид требуемой оценки, а влияет лишь на значения констант.

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые мы провели во втором случае. В самом деле, пусть $U = (\alpha_7 d)^{\beta_7 n}$ таково, что

$$\frac{(\alpha_6 d)^{\beta_6 n}}{U} = (\alpha_8 d)^{\beta_8 n}.$$

Рассмотрим

$$\{a_i > 0 : a_i = l_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S\} = \{a_1, \dots, a_t\}.$$

Понятно, что $t \leq k$. Это немедленно следует из целочисленности квадратов расстояний между любыми векторами из S , неотрицательности всех координат каждого из таких векторов и того факта, что всякий вектор из S принадлежит, в частности, шару радиуса $\sqrt{k/2}$. Выберем l из условия

$$(3 + o(1))^{ln} < U = (\alpha_7 d)^{\beta_7 n}.$$

Тогда отношения между соседними числами в множестве $\{a_{l+1}, \dots, a_t\}$ лежат в нужных пределах. Таким образом, либо граф $G_1 = (V_1, E_1)$, у которого $V_1 = S$, а

$$E_1 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_1 \times V_1 : l_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{a_{l+1}, \dots, a_t\}\},$$

имеет число независимости меньшее, чем U , т.е. заведомо

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_{l+1}, \dots, a_t\}) \geq \chi(G_1) \geq \frac{|S|}{U} \geq (\alpha_8 d)^{\beta_8 n},$$

и все в порядке; либо найдется такое $V_2 \subset V_1$, что $|V_2| \geq U$ и V_2 свободно от расстояний $a_{l+1}, \dots, a_t$. Последний же вариант опять-таки невозможен, поскольку число независимости графа $G_2 = (V_2, E_2)$ с

$$E_2 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_2 \times V_2 : l_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{a_1, \dots, a_l\}\},$$

очевидно, равно единице (граф полный), а это значит, что

$$\chi((\mathbb{R}^n, l_2), \{a_1, \dots, a_l\}) \geq \chi(G_2) \geq U > (3 + o(1))^{ln},$$

т.е. мы имеем противоречие с оценкой $\chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n$, и изучение случая завершено.

Все случаи рассмотрены, и теорема доказана.

5. Обобщение одного примера Бургейна. В этом пункте мы предлагаем обобщение примера (b) из работы [12].

Ниже мы рассматриваем пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой и через $\mathbf{x}^2$ обозначаем скалярный квадрат вектора $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_t\}$ – набор точек n -мерного пространства $\mathbb{R}^n$ такой, что

$$\mathbf{b}_1 + \dots + \mathbf{b}_t = 0, \quad \mathcal{V} = \mathcal{B} \cup 0.$$

Определим

$$\sigma(\mathcal{V}) = \sum_{i=1}^t \mathbf{b}_i^2.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A \subset \mathbb{R}_+$ представляет собой либо набор из k различных вещественных чисел, либо бесконечную лакунарную последовательность, удовлетворяющую (1), а множество точек $\mathcal{V}$ устроено, как описано выше. Тогда пространство $\mathbb{R}^n$ можно раскрасить в $4kn$ (соответственно в $2^7 \lceil d^2/(2d+1) \rceil^2 n$) цветов так, что любая изометрическая копия каждого из множеств $a\mathcal{V}$, $a \in A$, не будет являться монохроматической.

Сформулированная теорема является непосредственным следствием следующего утверждения и лемм 1, 2.

ЛЕММА 4. Если найдется вещественное α такое, что с некоторым положительным w будет выполняться

$$\|\alpha\sigma(\mathcal{V})\lambda^2\| \geq \frac{1}{w} \quad \forall a \in A, \quad (4)$$

то существует раскраска пространства $\mathbb{R}^n$ в $h = \lceil nw \rceil$ цветов такая, что любая изометрическая копия каждого из множеств $a\mathcal{V}$, $a \in A$, не будет являться монохроматической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим раскраску следующим образом. Точку $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ раскрасим в j -й цвет, если

$$\{\alpha\mathbf{y}^2\} \in \left[\frac{j}{h}, \frac{j+1}{h}\right).$$

Если множество $X = \{\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_t\}$ является монохроматическим, то

$$\{\alpha\mathbf{x}^2\}, \{\alpha\mathbf{x}_1^2\}, \dots, \{\alpha\mathbf{x}_t^2\} \in \left[\frac{j}{h}, \frac{j+1}{h}\right).$$

Если же X является изометрической копией множества $a\mathcal{V}$, то

$$\sum_{i=1}^t \mathbf{x}_i^2 - n\mathbf{x}^2 = \sum_{i=1}^t (\mathbf{x}_i - \mathbf{x})^2 = a^2\sigma(\mathcal{V}).$$

Эти два соотношения влекут неравенство

$$\|\alpha\sigma(\mathcal{V})a^2\| < \frac{n}{h}.$$

Остается воспользоваться условием (4), и лемма 4 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his Mathematics*, II (Budapest, 1999), Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, Springer, Berlin, 2002, 649–666.
- [2] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [3] J. Pach, P. K. Agarwal, *Combinatorial Geometry*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley & Sons, New York, 1995.

- [4] V. Klee, S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, The Dolciani Mathematical Expositions, **11**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1991.
- [5] A. Soifer, “Chromatic number of the plane: a historical essay”, *Geombinatorics*, **1**:3 (1991), 13–15.
- [6] A. Soifer, *Mathematical Coloring Book*, Center for Excellence in Mathematical Education, Colorado Springs, CO, 1997.
- [7] А. Соифер, “Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее”, *Матем. просвещение*, Третья серия, Выпуск 8, Изд-во МЦНМО, М., 2004.
- [8] I. Z. Ruzsa, Zs. Tuza, M. Voigt, “Distance graphs with finite chromatic number”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **85**:1 (2002), 181–187.
- [9] Y. Katznelson, “Chromatic numbers of Cayley graphs on $\mathbb{Z}$ and recurrence”, *Combinatorica*, **21**:2 (2001), 211–219.
- [10] Р. К. Ахунжанов, Н. Г. Мощевитин, “О хроматическом числе дистанционного графа, связанного с лакунарной последовательностью”, *Докл. РАН*, **397**:3 (2004), 295–296.
- [11] H. Fürstenberg, Y. Katznelson, B. Weiss, “Ergodic theory and configurations in sets of positive density”, *Mathematics of Ramsey Theory*, Algorithms Combin., **5**, Springer, Berlin, 1990, 184–198.
- [12] J. Bourgain, “A Szemerédi type theorem for sets of positive density in $\mathbb{R}^k$ ”, *Israel J. Math.*, **54**:3 (1986), 307–316.
- [13] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства с метрикой l_q ”, *УМН*, **59**:5 (2004), 161–162.
- [14] J.-H. Kang, Z. Füredi, “Distance graphs on $\mathbb{Z}^n$ with l_1 -norm”, *Theoret. Comput. Sci.*, **319**:1–3 (2004), 357–366.
- [15] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.
- [16] А. М. Райгородский, “Проблема Эрдёша–Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 123–156.
- [17] Y. G. Chen, T. W. Cusick, “The view-obstruction problem for n -dimensional cubes”, *J. Number Theory*, **74**:1 (1999), 126–133.
- [18] B. de Mathan, “Numbers contravening a condition in density modulo 1”, *Acta Math. Hungar.*, **36**:3–4 (1980), 237–241.
- [19] A. D. Pollington, “On the density of sequence $\{n_k\theta\}$ ”, *Illinois J. Math.*, **23**:4 (1979), 511–515.
- [20] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148.

Н. Г. Мощевитин

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: moshchevitin@rambler.ru

Поступило

06.07.2005

Исправленный вариант

18.08.2006

А. М. Райгородский

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: araigor@avangard.ru