Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Савчук, Приближения средними Фейера функций класса Дирихле, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 744–750

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3718>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 18:30:10

Приближения средними Фейера функций класса Дирихле

В. В. Савчук

Для классов Дирихле $\mathcal{D}_p$ голоморфных в круге функций указываются точные порядки в пространствах Харди H_p наилучших полиномиальных приближений и верхних граней уклонений средних Фейера рядов Тейлора.

Библиография: 11 названий.

Пусть $1 \leq p < \infty$. Классом Дирихле $\mathcal{D}_p$ будем называть множество голоморфных в единичном круге $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций f , для которых

$$D_p(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'|^p d\nu \leq 1,$$

где ν – нормированная мера Лебега в $\mathbb{D}$, т.е.

$$\mathcal{D}_p := \{f : f \text{ голоморфна в } \mathbb{D} \text{ и } D_p(f) \leq 1\}.$$

Пространство Харди H_p состоит из всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f , для которых

$$\|f\|_{H_p} := \sup_{0 < \varrho < 1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\varrho w)|^p d\sigma(w) \right)^{1/p} < \infty,$$

где σ – нормированная мера Лебега на единичной окружности $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$; H_∞ – это пространство ограниченных голоморфных в $\mathbb{D}$ функций f с нормой

$$\|f\|_{H_\infty} := \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Известно [1; с. 272], что существуют функции пространства H_∞ с несуммируемой производной, но, с другой стороны, $\mathcal{D}_p \subset H_p$. Поэтому каждая функция из пространства Дирихле $\mathcal{D}_p$ имеет на окружности $\mathbb{T}$ угловые граничные значения, образующие функцию из пространства $L_p(\mathbb{T})$, в котором норма вводится обычным образом:

$$\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{T})} := \left(\int_{\mathbb{T}} |\cdot|^p d\sigma \right)^{1/p}.$$

Напомним также, что $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\mathbb{T})}$ для любой $f \in H_p$. При этом под f мы понимаем как саму функцию, так и ее угловые граничные значения на $\mathbb{T}$.

Наряду с $\mathscr{D}_p$ мы будем рассматривать также классы

$$H_p^1 := \{f : f \text{ голоморфна в } \mathbb{D} \text{ и } \|f'\|_{H_p} \leq 1\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

которые, очевидно, являются подклассами $\mathscr{D}_p$. Положим $\mathscr{D}_\infty := H_\infty^1$.

Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k, \quad \widehat{f}_k := \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad (1)$$

– разложение функции $f \in H_p$ в ряд Тейлора и

$$S_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}_k z^k$$

– частная сумма ряда (1). При $n = 0$ полагаем $S_0(f)(z) = 0$. Заметим также, что числа $\widehat{f}_k$ суть коэффициенты Фурье граничных значений функции f на окружности $\mathbb{T}$.

Для данной функции $f \in H_p$ последовательности средних Фейера $\{\sigma_n(f)\}_{n=0}^\infty$ – это последовательность алгебраических полиномов вида

$$\begin{aligned} \sigma_0(f)(z) &= 0, \\ \sigma_n(f)(z) &:= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k z^k, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Наша задача состоит в изучении аппроксимативных свойств средних σ_n на классах $\mathscr{D}_p$ на предмет выяснения того, какими возможностями располагают эти суммы по отношению к классам $\mathscr{D}_p$ в сравнении с алгебраическими полиномами наилучшего приближения в метрике пространства H_p .

Пусть $\mathfrak{A}$ – некоторый класс функций, голоморфных в $\mathbb{D}$. Рассмотрим величины

$$\begin{aligned} F_n(\mathfrak{A}; H_p) &:= \sup\{\|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} : f \in \mathfrak{A}\}, \\ E_n(\mathfrak{A}; H_p) &:= \sup\{E_n(f)_{H_p} : f \in \mathfrak{A}\}, \end{aligned}$$

где

$$E_n(f)_{H_p} := \inf\{\|f - P\|_{H_p} : P \in \mathscr{P}_{n-1}\}$$

и $\mathscr{P}_n$ – множество алгебраических полиномов степени не выше n , $n \in \mathbb{N}$.

Вопрос о приближении периодических функций средними Фейера их рядов Фурье имеет богатую историю (см., например, [2]). Касательно приближений функций, голоморфных в единичном круге, в этой тематике видное место занимают исследования Д. Алексича [3], А. Зигмунда [4], С. Б. Стечкина [5] и Э. А. Стороженко [6]. Нахождению точных значений величин наилучших полиномиальных приближений классов голоморфных функций посвящено значительно меньше работ (см., например, [7]), среди которых мы вспомним, прежде всего, работы К. И. Бабенко [8] и Л. В. Тайкова [9].

Здесь мы приведем одно соотношение, которое вытекает из результатов указанных работ:

$$\frac{1}{n} = E_n(H_p^1; H_p) \leq F_n(H_p^1; H_p) \leq \frac{A_n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (2)$$

где A_n – член некоторой ограниченной последовательности положительных чисел. При $p = 2$ можно без труда показать, что $A_n = 1$ для всех натуральных n . При $p = \infty$ С. Б. Стечкин [5] показал, что в правой части неравенства (2) можно взять значения $A_n = (3n-1)/(n+1) < 3$, $n \in \mathbb{N}$. Ниже будет доказано, что (2) справедливо для всех p , $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$, со значениями $A_n = 2n/(n+1) < 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Основной результат данной работы состоит в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $1/p + 1/q = 1$. Тогда

1) для любого натурального n

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \min(p, q) \frac{1}{((q/2)(n-1) + 1)^{1/q}} &\leq E_n(\mathcal{D}_p; H_p) \\ &\leq F_n(\mathcal{D}_p; H_p) \leq \frac{1}{((q/2)(n-1) + 1)^{1/q}}; \end{aligned} \quad (3)$$

2) для любой функции $f \in \mathcal{D}_p$

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} = o\left(\frac{1}{n^{1/q}}\right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Соотношение (3) справедливо и при $p = \infty$, $q = 1$; по существу оно совпадает с (2), в котором $A_n = 2n/(n+1)$. Но утверждение 2) теоремы в этом случае перестает быть правильным, поскольку метод суммирования Фейера насыщен с порядком насыщения $1/n$ (см., например, [2; гл. IV, § 1]).

Для остальных значений p соотношение (4) говорит о том, что для индивидуальной функции из $\mathcal{D}_p$ ее средние Фейера сходятся со скоростью, большей по порядку, нежели скорость убывания к нулю последовательности наилучших полиномиальных приближений на всем классе $\mathcal{D}_p$. В крайнем же случае, когда $p = 1$, для некоторой функции g из $\mathcal{D}_1$ последовательность $\{\sigma_n(g)\}_{n=0}^\infty$ может сходиться довольно медленно. Элементарную оценку снизу скорости убывания величин $\|g - \sigma_n(g)\|_{H_1}$ при $n \rightarrow \infty$ для “наихудшей” функции из $\mathcal{D}_1$ можно вывести из неравенства Лебега и результата работы [10], в которой утверждается о существовании такой функции $g \in \mathcal{D}_1$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - S_n(g)\|_{H_1} > 0.$$

Действительно, для этой функции g

$$\begin{aligned} \|g - S_n(g)\|_{H_1} &\leq \|g - \sigma_n(g)\|_{H_1} + \|S_n(g - \sigma_n(g))\|_{H_1} \\ &\leq \|g - \sigma_n(g)\|_{H_1} \left(1 + \sup_{f \in H_1} \frac{\|S_n(f)\|_{H_1}}{\|f\|_{H_1}}\right) \\ &\leq C \|g - \sigma_n(g)\|_{H_1} \ln(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где C – абсолютная константа, и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - \sigma_n(g)\|_{H_1} \ln n > 0.$$

При доказательстве теоремы мы воспользуемся следующим утверждением, в котором приняты обозначения

$$Q_{n,\varrho}(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n} \varrho^{2(n-k-1)}\right) \widehat{f}_k z^k, \quad P(w, z) := \frac{1 - |w|^2 |z|^2}{|1 - \overline{w}z|^2}.$$

ЛЕММА. Пусть функция f голоморфна в $\mathbb{D}$. Тогда при любых $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varrho \in [0, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$

$$f(\varrho^2 e^{i\theta}) - Q_{n,\varrho}(f)(\varrho^2 e^{i\theta}) = \frac{e^{in\theta}}{\pi} \int_0^\varrho r^n \int_0^{2\pi} f'(re^{it}) e^{-i(n-1)t} P(re^{it}, e^{i\theta}) dt dr. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу Коши, непосредственными вычислениями убеждаемся в справедливости равенств

$$f(\varrho^2 e^{i\theta}) - f(0) = \frac{e^{i\theta}}{\pi} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{1 - re^{i(\theta-t)}} dt r dr, \quad (6)$$

$$Q_{n,\varrho}(f)(\varrho^2 e^{i\theta}) - f(0) = \frac{e^{i\theta}}{\pi} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} f'(re^{it}) \sum_{k=0}^{n-2} (1 - r^{2(n-k-1)}) r^k e^{ik(\theta-t)} dt r dr. \quad (7)$$

Преобразуем ядро в последнем интеграле следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-2} (1 - r^{2(n-k-1)}) r^k e^{ik(\theta-t)} &= \sum_{k=0}^{n-2} r^k e^{ik(\theta-t)} - r^n e^{i(n-2)(\theta-t)} \sum_{k=0}^{n-2} r^k e^{-ik(\theta-t)} \\ &= \frac{1 - r^{n-1} e^{i(n-1)(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} - r^n e^{i(n-2)(\theta-t)} \frac{1 - r^{n-1} e^{-i(n-1)(\theta-t)}}{1 - re^{-i(\theta-t)}} \\ &= \frac{1}{1 - re^{i(\theta-t)}} - \frac{r^{n-1} e^{i(n-1)(\theta-t)}}{1 - re^{i(\theta-t)}} - \frac{r^n e^{i(n-2)(\theta-t)}}{1 - re^{-i(\theta-t)}} + \frac{r^{2n-1} e^{-i(\theta-t)}}{1 - re^{-i(\theta-t)}} \\ &= \frac{1}{1 - re^{i(\theta-t)}} - r^{n-1} e^{i(n-1)(\theta-t)} P(re^{it}, e^{i\theta}) + \frac{r^{2n-1} e^{-i(\theta-t)}}{1 - re^{-i(\theta-t)}}. \end{aligned}$$

Подставляя в (7) найденное выражение ядра, с учетом (6) и того, что

$$\int_0^{2\pi} f'(re^{it}) \frac{e^{-i(\theta-t)}}{1 - re^{-i(\theta-t)}} dt = 0,$$

убеждаемся в справедливости формулы (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Приступая к доказательству утверждения 1), оценим снизу величину $E_n(\mathcal{D}_p; H_p)$. Для этого возьмем функцию

$$f_*(z) = C \frac{z^n}{((q/2)(n-1) + 1)^{1/q}},$$

в которой $C := \min(p, q)/2$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} D_p(f_*) &= C^p \frac{n^p}{((q/2)(n-1)+1)^{p-1}((p/2)(n-1)+1)} \\ &\leq C^p \frac{n^p}{(C(n-1)+1)^p} = \frac{n^p}{(n-1+1/C)^p} \leq 1, \end{aligned}$$

т.е. $f_* \in \mathcal{D}_p$.

Покажем теперь, что

$$E_n(f_*)_{H_p} = \frac{C}{((q/2)(n-1)+1)^{1/q}}. \quad (8)$$

Согласно соотношениям двойственности [11; гл. 1]

$$E_n(f_*)_{H_p} = \sup\{|\langle f_*, g \rangle| : g \in L_{q,n}(\mathbb{T}), \|g\|_{L_q(\mathbb{T})} \leq 1\},$$

где

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{T}} f \bar{g} d\sigma,$$

$$L_{q,n}(\mathbb{T}) := \{g \in L_q(\mathbb{T}) : \langle g, e_k \rangle = 0, e_k(w) = w^k, k = 0, \dots, n-1\}.$$

Следовательно,

$$E_n(f_*)_{H_p} \geq |\langle f_*, e_n \rangle| = \frac{C}{((q/2)(n-1)+1)^{1/q}}$$

и, так как обратное неравенство очевидно, равенство (8) доказано.

Теперь получим оценку сверху величины $F_n(\mathcal{D}_p; H_p)$.

Пусть $f \in \mathcal{D}_p$. Записав для функции f равенство (5), оценим интеграл в его правой части. Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} |f(\varrho^2 e^{i\theta}) - Q_{n,\varrho}(f)(\varrho^2 e^{i\theta})| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})| r^{n-1} P(re^{it}, e^{i\theta}) dt r dr \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^p P(re^{it}, e^{i\theta}) dt r dr \right)^{1/p} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} r^{q(n-1)} P(re^{it}, e^{i\theta}) dt r dr \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^p P(re^{it}, e^{i\theta}) dt r dr \right)^{1/p} \\ &\quad \times \frac{1}{((q/2)(n-1)+1)^{1/q}}. \end{aligned}$$

Отсюда, возводя обе части неравенства в p -ю степень, интегрируя по θ на отрезке $[0, 2\pi]$ и применяя теорему Фубини, находим оценку

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho^2 e^{i\theta}) - Q_{n,\varrho}(f)(\varrho^2 e^{i\theta})|^p d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^p dt r dr \frac{1}{((q/2)(n-1)+1)^{p/q}} \leq \frac{D_p(f)}{((q/2)(n-1)+1)^{p/q}}. \quad (9) \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|f(\varrho \cdot) - Q_{n,\varrho}(f)(\varrho \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{((q/2)(n-1) + 1)^{1/q}} \quad \forall \varrho \in [0, 1).$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\varrho \rightarrow 1-$, с учетом того, что $Q_{n,\varrho}(f)(\varrho \cdot) \rightarrow \sigma_n(f)(\cdot)$ и по теореме Ф. Рисса (см., например, [1; гл. II]) $\|f(\cdot) - f(\varrho \cdot)\|_{L_p(\mathbb{T})} \rightarrow 0$, $\varrho \rightarrow 1-$, получим соотношение

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} \leq \frac{1}{((q/2)(n-1) + 1)^{1/q}}.$$

Отсюда следует верхняя оценка величины $F_n(\mathcal{D}_p, H_p)$, так как f – произвольная функция из $\mathcal{D}_p$. Соотношение (3) доказано.

Перейдем теперь к доказательству утверждения 2). Пусть, как и прежде, f – произвольная функция из $\mathcal{D}_p$. Подобно тому, как получено неравенство (9), находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varrho^2 e^{i\theta}) - Q_{n,\varrho}(f)(\varrho^2 e^{i\theta})|^p d\theta \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\varrho \int_0^{2\pi} f'(re^{it}) r^{(n-1)/p} r^{(n-1)/q} P(re^{it}, e^{i\theta}) dt r dr \right|^p d\theta \\ & \leq \frac{1}{\pi} \int_0^1 r^n \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^p dt dr \cdot \left(\frac{2}{n+1} \right)^{p/q}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда, теми же рассуждениями, что и выше, получаем оценку

$$n^{1/q} \|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} \leq 2^{1/q} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 r^n \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^p dt dr \right)^{1/p}.$$

Остается заметить, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ и всех натуральных n найдется такое R , $0 < R < 1$, что интеграл в правой части последнего соотношения не будет превышать

$$R^n + \frac{1}{\pi} \int_R^1 r^n \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^p dt dr \leq R^n + \varepsilon \rightarrow \varepsilon, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

Заметим, что с помощью неравенства (10) можно доказать справедливость соотношения (2) со значением $A_n = 2n/(n+1)$.

Действительно, пусть $f \in H_p^1$. Тогда в силу того, что

$$\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})|^p dt \leq 1,$$

из (10) вытекает оценка

$$\int_0^{2\pi} |f(\varrho^2 e^{i\theta}) - Q_{n,\varrho}(f)(\varrho^2 e^{i\theta})|^p d\theta \leq \frac{2}{n+1} \cdot \left(\frac{2}{n+1} \right)^{p/q} = \left(\frac{2}{n+1} \right)^p \quad \forall \varrho \in [0, 1),$$

из которой предельным переходом при $\varrho \rightarrow 1$ получим наше утверждение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Гарнетт, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.
- [2] А. И. Степанец, *Равномерные приближения тригонометрическими полиномами*, Личейные методы, Наукова думка, Киев, 1981.
- [3] G. Alexits, “Sur l’ordre de grandeur de l’approximation d’une fonction par les moyennes de sa série de Fourier”, *Mat. Fiz. Lapok.*, **48** (1941), 410–422.
- [4] A. Zygmund, “On the degree of approximation of functions by Fejer means”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **51** (1945), 274–278.
- [5] С. Б. Стечкин, “Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **17**:5 (1953), 461–472.
- [6] Э. А. Стороженко, “Приближение функций класса H^p , $0 < p \leq 1$ ”, *Матем. сб.*, **105**:4 (1978), 601–621.
- [7] A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **3**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [8] К. И. Бабенко, “Наилучшие приближения классов аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640.
- [9] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 155–162.
- [10] G. Soares de Souza, G. Sampson, “A function in the Dirichlet space such that its Fourier series diverges almost everywhere”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **120**:3 (1994), 723–726.
- [11] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976.

В. В. Савчук

Институт математики НАН Украины, г. Киев

E-mail: savchuk@imath.kiev.ua

Поступило

10.05.2006

Исправленный вариант

18.09.2006