Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Шаройко, О конечности числа орбит на квазиоднородных $(\mathbb{C}^*)^k \times SL_2(\mathbb{C})$ -многообразиях, *Матем. заметки*, 2007, том 81, выпуск 5, 766–775

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm3719>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:05:13

О конечности числа орбит на квазиоднородных $(\mathbb{C}^*)^k \times SL_2(\mathbb{C})$ -многообразиях

Е. В. Шаройко

В работе получен эффективный критерий конечности числа орбит в замыкании данной G -орбиты в случае рационального линейного действия группы $G := (\mathbb{C}^*)^k \times SL_2(\mathbb{C})$ на конечномерном линейном пространстве, а также на проективизации такого пространства.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. Основным полем будем считать поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть $G := (\mathbb{C}^*)^k \times SL_2(\mathbb{C})$, V – конечномерный рациональный G -модуль, $\mathbb{P}(V)$ – его проективизация, $X((\mathbb{C}^*)^k) \cong \mathbb{Z}^k$ – решетка характеров тора $(\mathbb{C}^*)^k$. Так как каждый G -модуль вполне приводим, то $V = \bigoplus_{i=1}^s V_i$, где V_i – простые G -модули. Любое V_i можно реализовать как пространство бинарных форм степени $n_i - V_{\chi_i, n_i}$, где $n_i \in \mathbb{Z}_+$, $\chi_i \in X((\mathbb{C}^*)^k)$, на котором G действует так:

$$\left(t, \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \right) (f(x, y)) = \chi_i(t) f(\kappa x + \mu y, \lambda x + \nu y).$$

В данной работе получен критерий конечности числа орбит в замыкании данной орбиты для действий G на V и $\mathbb{P}(V)$ в терминах набора $\{(\chi_i, n_i)\}$ и кратностей вхождения линейных множителей в компоненты вектора орбиты. Аналогичная задача для действия $SL_2(\mathbb{C})$ в проективном пространстве была решена в [1]. В аффинном случае в замыкании любой $SL_2(\mathbb{C})$ -орбиты содержится конечное число орбит, и все замыкания орбит описаны в [2].

Определим *кратность* как отображение $e_i: \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{Z}_+$ такое, что $e_i(\infty) := \sum_{a \in \mathbb{C}} e_i(a)$, и потребуем, чтобы $e_i(\infty) \leq n_i$. Любое $v_i \in V_i$ с точностью до умножения на константу имеет вид

$$x^{n_i - e_i(\infty)} \prod_{a \in \mathbb{C}} (ax + y)^{e_i(a)},$$

и $v \in V$ имеет вид

$$(c_i v_i)_{i=1}^s = \left(c_i x^{n_i - e_i(\infty)} \prod_{a \in \mathbb{C}} (ax + y)^{e_i(a)} \right)_{i=1}^s, \quad c_i \in \mathbb{C}.$$

Можно считать, что $\forall i \ c_i \neq 0$. Так как отображение $V \rightarrow V$, $(c_i v_i)_{i=1}^s \mapsto (v_i)_{i=1}^s$ при фиксированных c_i является автоморфизмом G -модуля, можно считать, что $c_i = 1$

для всех i . Обозначим через $(u_i)_{i \in I}$, $I \subset \{1, \dots, s\}$, вектор $u \in V$ такой, что его i -я компонента равна 0 при $i \notin I$ и u_i при $i \in I$.

Приведем основные определения и результаты данной работы.

Введем на $\mathbb{Q}^{k+1}$ стандартное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Отметим в $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}^{k+1}$ набор точек $(\chi_i, n_i) = \chi'_i \in X((\mathbb{C}^*)^k \times \mathbb{C}^*)$ по всем $i = 1, \dots, s$. Проведем из начала координат лучи в направлении этих точек. Выпуклая оболочка M всех этих лучей является конусом. Будем говорить, что некоторое множество точек из набора образует *грань*, если оно содержится в одной грани конуса M и в этой грани не лежит других точек набора. Назовем грань *допустимой*, если существует ортогональный ей и не ортогональный содержащим ее граням большей размерности вектор $R = (r_1, \dots, r_k, p)$ с $p < 0$ такой, что для любой точки χ'_i из набора выполнено условие $\langle \chi'_i, R \rangle \geq 0$. Обозначим эту грань через $I(R)$.

ТЕОРЕМА 1. Число G -орбит в замыкании G -орбиты вектора $v \in V$ конечно тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $I(R)$ максимальной размерности конуса M и любого целочисленного вектора $\beta = (\beta_i)_{i \in I(R)}$ такого, что

$$\sum_{i \in I(R)} \beta_i \chi_i = 0,$$

выполнены условия

$$\sum_{i \in I(R)} e_i(a) \beta_i = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Перейдем к проективному случаю. Как и в аффинном варианте, отметим в пространстве $\mathbb{Z}^k \times \mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{Q}^{k+1}$ точки $(\chi_i, n_i) = \chi'_i \in X((\mathbb{C}^*)^k \times \mathbb{C}^*)$ по всем $i = 1, \dots, s$. Рассмотрим их выпуклую оболочку C . Будем говорить, что некоторое множество точек из набора образует *аффинную грань*, если они лежат в одной грани многогранника C и эта грань не содержит других точек набора. Назовем грань *допустимой*, если существует ортогональный ей и не ортогональный содержащим ее граням большей размерности вектор $R = (r_1, \dots, r_k, p)$, $p < 0$, направленный внутрь C . Обозначим эту грань через $J(R)$.

ТЕОРЕМА 2. Число G -орбит в замыкании G -орбиты точки $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ конечно тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $J(R)$ максимальной размерности многогранника C и любого целочисленного вектора $\beta = (\beta_i)_{i \in J(R)}$ такого, что

$$\sum_{i \in J(R)} \beta_i \chi_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i \in J(R)} \beta_i = 0,$$

выполнены условия

$$\sum_{i \in J(R)} e_i(a) \beta_i = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

ПРИМЕР 1. Пусть $k = 1$, $V = V_{1,1} \oplus V_{1,4} \oplus V_{2,4} \oplus V_{3,3} \oplus V_{4,2}$, $v = (v_1, x^2 y^2, x^2(y-x)^2, xy(y-x), x^2)$, где v_1 — любая линейная форма. Рассмотрим замыкание орбиты $\mathbb{C}^* \times SL_2(\mathbb{C}) \langle v \rangle \subset \mathbb{P}(V)$. Допустимыми гранями максимальной размерности будут $\{B, C\}$ и $\{C, D, E\}$ (см. рис. 1). Для грани $\{B, C\}$ условие теоремы 2 выполнено. Для грани $\{C, D, E\}$ вектор $\beta = (0, 0, 1, -2, 1)$ не удовлетворяет условию (2) при

$a = 0$. Значит, $\overline{G\langle v \rangle}$ содержит бесконечно много орбит. Действительно, для кривых вида

$$\gamma(t) = \left(t^{-1}, \begin{pmatrix} t^{-1} & -dt^{-1} \\ 0 & t \end{pmatrix} \right)$$

с $e_i(d) = 0$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)\langle v \rangle = \langle (0, 0, (d+1)^2 x^4, d(d+1)x^3, x^2) \rangle.$$

Покажем, что среди этих орбит есть бесконечное число различных. Пусть

$$\left(t, \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \right) \langle v(d_1) \rangle = \langle v(d_2) \rangle.$$

Так как это преобразование должно сохранять $\langle x \rangle$, то $\mu = 0$, $\nu = \kappa^{-1}$. Вектор переводится в пропорциональный себе с коэффициентом ρ , и остальные условия имеют вид

$$t^2 \kappa^4 (d_1 + 1)^2 = \rho (d_2 + 1)^2, \quad t^3 \kappa^3 d_1 (d_1 + 1) = \rho d_2 (d_2 + 1), \quad t^4 \kappa^2 = \rho.$$

Несложно убедиться, что для любого d_1 существует лишь конечное число d_2 , для которых $\langle v(d_2) \rangle$ лежит в той же орбите, а значит, число орбит в $\overline{G\langle v \rangle}$ бесконечно.

Рис. 1

Также в работе получено описание тех G -модулей V , для которых замыкание каждой орбиты в V (следствие 1) и в $\mathbb{P}(V)$ (следствие 2) содержит конечное число G -орбит.

Автор выражает благодарность И. В. Аржанцеву за постановку задачи и полезные обсуждения.

2. Подготовительные леммы. Пусть B – борелевская подгруппа в G , которая является прямым произведением $(\mathbb{C}^*)^k$ и подгруппы верхнетреугольных матриц в $SL_2(\mathbb{C})$.

При решении задачи мы будем рассматривать число B -орбит в $\overline{Bv}$. Так как $\overline{Bv}$ пересекает каждую G -орбиту в $\overline{Gv}$ (см. [3; III.2.5, следствие 1]), из конечности числа

B -орбит в $\overline{Bv}$ следует конечность числа G -орбит в $\overline{Gv}$. В дальнейшем будет показано, что если число B -орбит в $\overline{Bv}$ бесконечно, то и число G -орбит в $\overline{Gv}$ бесконечно. Будем говорить, что некоторое условие выполнено *почти для каждой орбиты*, если оно выполнено для всех орбит, кроме конечного числа.

Две следующих леммы близки к лемме и предложению 1 из [1].

Пусть $\gamma: \mathbb{C}^* \rightarrow B$ – кривая в B . Докажем, что любая B -орбита в $\overline{Bv}$ содержит точку вида $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v$ для кривой $\gamma(t)$ определенного вида.

ЛЕММА 1. Пусть $v \in V$, $w \in \overline{Bv}$. Тогда существуют $p, q, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Z}$ с $q < -p$, $c \in \mathbb{C}$ и многочлен $h \in \mathbb{C}[t]$, $h(0) = -1$ с $\deg h < -p - q$ такие, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^{r_1}, \dots, t^{r_k}, \begin{pmatrix} t^p & ch(t)t^q \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix} \right) v \in Bw.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma(t) \in B(\mathbb{C}((t)))$ – аналитическая кривая в B такая, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v = w' \in Bw.$$

Если кривая $\delta(t) \in B(\mathbb{C}((t)))$ имеет предел в B при $t \rightarrow 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\delta(t) \cdot \gamma(t)v) = \delta(0)w',$$

и мы можем без ограничения общности заменить $\gamma(t)$ на $\delta(t)\gamma(t)$.

Пусть $p, q, r_1, \dots, r_k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{C}$, $f_1, \dots, f_k, g_1, g_2 \in \mathbb{C}[[t]]$, $f_1(0) \neq 0, \dots, f_k(0) \neq 0$, $g_1(0) \neq 0$, $g_2(0) = -g_1(0)$ и

$$\gamma(t) = \left(t^{r_1} f_1, \dots, t^{r_k} f_k, \begin{pmatrix} t^p g_1 & c g_2 t^q \\ 0 & t^{-p} g_1^{-1} \end{pmatrix} \right).$$

Если $c = 0$ или $q \geq -p$, положим

$$\delta(t) := \left(f_1^{-1}, \dots, f_k^{-1}, \begin{pmatrix} g_1^{-1} & -t^{p+q} c g_2 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} \right).$$

Тогда

$$\delta(t)\gamma(t) = \left(t^{r_1}, \dots, t^{r_k}, \begin{pmatrix} t^p & 0 \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix} \right).$$

Если $c \neq 0$ и $q < -p$, положим

$$\delta(t) := \left(f_1^{-1}, \dots, f_k^{-1}, \begin{pmatrix} g_1^{-1} & ch'(t) \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} \right),$$

где $h' \in \mathbb{C}[[t]]$ таково, что $h := h't^{-p-q}g_1^{-1} + g_2g_1^{-1} \in \mathbb{C}[t]$ – многочлен степени, меньшей $-p - q$. Тогда $h(0) = g_2(0)g_1(0)^{-1} = -1$ и

$$\delta(t)\gamma(t) = \left(t^{r_1}, \dots, t^{r_k}, \begin{pmatrix} t^p & cht^q \\ 0 & t^{-p} \end{pmatrix} \right).$$

Пусть $q < -p$, $\deg h < -p - q$. Вычислим $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v$ и докажем, что почти в каждой B -орбите из Bv содержится вектор некоторого стандартного вида.

Введем следующие обозначения:

- $p_i(d) = \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq d} (a - d)^{e_i(a)}$ при $d \in \mathbb{C}$ и $p_i(\infty) = 1$;
- $I(d, R, A) := \{i \mid \langle \chi'_i, R \rangle + Ae_i(d) = 0\}$, $d \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $A \in \mathbb{Z}$ (в частности, $I(R) := I(d, R, 0)$);
- $v(d, R, A) := (p_i(d)x^{n_i})_{i \in I(d, R, A)}$, $v(d, R) := v(d, R, 0)$.

Векторы вида $v(d, R)$ будем называть *стандартными*.

ЛЕММА 2. Все векторы вида $v(d, R)$, где $e_i(d) = 0 \quad \forall i \in I(R)$ и $R = (r_1, \dots, r_k, p)$, $p < 0$, лежат в $\overline{Bv}$ и попадают почти во все орбиты в $\overline{Bv}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем эту лемму перебором различных типов кривой γ , где γ имеет вид, описанный в лемме 1. Для неприводимого $V = V_{\chi, n}$ имеем

$$\gamma(t)v = t^{\langle \chi', R \rangle - pe(\infty)} x^{n-e(\infty)} \prod_{a \in \mathbb{C}} ((at^p + ch(t)t^q)x + t^{-p}y)^{e(a)},$$

где $R = (r_1, \dots, r_k, p)$, $\chi' = (\chi, n)$.

1. $p = 0$, $c = 0$. Для неприводимого подмодуля V имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle \chi', R \rangle} x^{n-e(\infty)} \prod_{a \in \mathbb{C}} (ax + y)^{e(a)}.$$

Предел существует тогда и только тогда, когда $\langle \chi', R \rangle \geq 0$.

Для приводимого модуля V предел существует тогда и только тогда, когда $\forall i \langle \chi'_i, R \rangle \geq 0$, и равен при этом $(v_i)_{i \in I(R)}$. Векторов такого вида конечное число, так как предел каждого v_i может быть равен либо 0, либо v_i .

2. $p > 0$, $c = 0$. Для неприводимого подмодуля V имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle \chi', R \rangle - 2pe(\infty)} x^{n-e(\infty)} y^{e(\infty)}.$$

Предел существует тогда и только тогда, когда $\langle \chi', R \rangle - 2pe(\infty) \geq 0$.

Для приводимого модуля V предел существует тогда и только тогда, когда $\forall i \langle \chi'_i, R \rangle - 2pe_i(\infty) \geq 0$, и равен при этом $(x^{n_i-e_i(\infty)} y^{e_i(\infty)})_{i \in I(\infty, R, -2p)}$. Векторов такого вида конечное число, так как предел каждого v_i может быть равен либо 0, либо $x^{n_i-e_i(\infty)} y^{e_i(\infty)}$.

3. $p < 0$, $c = 0$. Для неприводимого подмодуля V имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle \chi', R \rangle - 2pe(0)} x^{n-e(0)} y^{e(0)} \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq 0} a^{e(a)}.$$

Предел существует тогда и только тогда, когда $\langle \chi', R \rangle - 2pe(0) \geq 0$.

Для приводимого модуля V предел существует тогда и только тогда, когда $\forall i \langle \chi'_i, R \rangle - 2pe_i(0) \geq 0$, и равен при этом $(x^{n_i-e_i(0)} y^{e_i(0)} p_i(0))_{i \in I(0, R, -2p)}$. Векторов такого вида конечное число, так как предел каждого v_i может быть равен либо 0, либо $x^{n_i-e_i(0)} y^{e_i(0)} p_i(0)$.

4. $p = q$, $h \equiv -1$ (при этом $p < 0$). Для неприводимого подмодуля V имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle \chi', R \rangle - 2pe(c)} x^{n-e(c)} y^{e(c)} \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq c} (a - c)^{e(a)}.$$

Предел существует тогда и только тогда, когда $\langle \chi', R \rangle - 2pe(c) \geq 0$.

Для приводимого модуля V ненулевой предел существует тогда и только тогда, когда $\forall i \quad \langle \chi'_i, R \rangle - 2pe_i(c) \geq 0$, и равен при этом $(x^{n_i - e_i(c)} y^{e_i(c)} p_i(c))_{i \in I(c, R, -2p)}$. Предел каждого v_i может быть равен либо 0, либо $x^{n_i - e_i(c)} y^{e_i(c)} p_i(c)$ по всем c . Поэтому при $e_i(c) \neq 0$ векторов такого вида конечное число. Если $e_i(c) = 0$ для любого i , то вектор имеет вид $v(c, R)$.

5. $p = q$, $c \neq 0$, $h \neq -1$ (при этом $p < 0$). Пусть $h(t) = -1 + h_l t^l + \dots + h_m t^m$.

Для неприводимого подмодуля V имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle \chi', R \rangle + le(c)} x^n (ch_l)^{e(c)} \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq c} (a - c)^{e(a)}.$$

Предел существует тогда и только тогда, когда $\langle \chi', R \rangle + le(c) \geq 0$.

Для приводимого модуля V предел существует тогда и только тогда, когда $\forall i \quad \langle \chi'_i, R \rangle + le_i(c) \geq 0$, и равен при этом $((ch_l)^{e_i(c)} p_i(c) x^{n_i})_{i \in I(c, R, l)}$. Подействуем на вектор элементом

$$\left((ch_l)^{r_1/l}, \dots, (ch_l)^{r_k/l}, \begin{pmatrix} (ch_l)^{p/l} & 0 \\ 0 & (ch_l)^{-p/l} \end{pmatrix} \right)$$

и получим

$$((ch_l)^{\langle \chi'_i, R \rangle / l + e_i(c)} p_i(c) x^{n_i})_{i \in I(c, R, l)} = (p_i(c) x^{n_i})_{i \in I(c, R, l)} = v(c, R, l).$$

При $e_i(c) \neq 0$ векторов такого вида конечное число. Если $e_i(c) = 0$ для любого i , то вектор имеет вид $v(c, R)$.

6. $p > q$, $c \neq 0$. Для неприводимого подмодуля V имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v = \lim_{t \rightarrow 0} t^{\langle \chi', R \rangle + (q-p)e(\infty)} x^n (-c)^{e(\infty)}.$$

Предел существует тогда и только тогда, когда $\langle \chi', R \rangle + (q-p)e(\infty) \geq 0$.

Для приводимого модуля V предел существует тогда и только тогда, когда $\forall i \quad \langle \chi'_i, R \rangle + (q-p)e_i(\infty) \geq 0$, и равен при этом $((-c)^{e_i(\infty)} x^{n_i})_{i \in I(\infty, R, q-p)}$. Подействуем на вектор элементом

$$\left((-c)^{r_1/(q-p)}, \dots, (-c)^{r_k/(q-p)}, \begin{pmatrix} (-c)^{p/(q-p)} & 0 \\ 0 & (-c)^{-p/(q-p)} \end{pmatrix} \right)$$

и получим $(p_i(\infty) x^{n_i})_{i \in I(\infty, R, q-p)} = v(\infty, R, q-p)$.

7. $p < q$, $c \neq 0$ (при этом $p < 0$). Для неприводимого подмодуля V имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v = \lim_{t \rightarrow 0} (-c)^{e(0)} t^{\langle \chi', R \rangle + (q-p)e(0)} x^n \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq 0} a^{e(a)}.$$

Предел существует тогда и только тогда, когда $\langle \chi', R \rangle + (q-p)e(0) \geq 0$.

Для приводимого модуля V предел существует тогда и только тогда, когда $\forall i \quad \langle \chi'_i, R \rangle + (q-p)e_i(0) \geq 0$, и равен при этом $(p_i(0) (-c)^{e_i(0)} x^{n_i})_{i \in I(0, R, q-p)}$. Подействуем на вектор элементом

$$\left((-c)^{r_1/(q-p)}, \dots, (-c)^{r_k/(q-p)}, \begin{pmatrix} (-c)^{p/(q-p)} & 0 \\ 0 & (-c)^{-p/(q-p)} \end{pmatrix} \right)$$

и получим $(p_i(0) x^{n_i})_{i \in I(0, R, q-p)} = v(0, R, q-p)$.

Отметим, что различные векторы стандартного вида могут лежать в одной и той же B -орбите.

Кривые вида 6, 7 из леммы 2 могут привести только в конечное число векторов вида $v(c, R, A)$, так как каждая компонента предела либо будет нулем, либо может принимать лишь конечное число значений, а именно: $p_i(\infty)x^{n_i}$ в случае 6 и $p_i(0)x^{n_i}$ в случае 7.

Таким образом, в замыкании данной B -орбиты содержится бесконечно много B -орбит тогда и только тогда, когда кривые вида 4, 5 из леммы 2 с $e_i(c) = 0$ приводят в бесконечное число различных B -орбит.

ЛЕММА 3. Число G -орбит в $\overline{Gv}$ конечно тогда и только тогда, когда конечно число B -орбит в $\overline{Bv}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, так как $\overline{Bv}$ пересекает каждую G -орбиту в $\overline{Gv}$ (см. [3; III.2.5, следствие 1]), из конечности числа B -орбит следует конечность числа G -орбит. С другой стороны, пусть число B -орбит бесконечно. Тогда существует бесконечно много векторов стандартного вида, лежащих в попарно различных B -орбитах. Преобразование, переводящее один вектор стандартного вида в другой, должно сохранять $\langle x \rangle$, а значит, лежать в B . Таким образом, G -орбита будет содержать не более одной B -орбиты вектора вида $v(d, R)$ и, следовательно, число G -орбит также будет бесконечным.

Для проверки конечности числа всех орбит достаточно проверить конечность числа орбит, содержащих, по крайней мере, один вектор вида $v(c, R)$, где $I(R)$ является допустимой гранью. Для этого достаточно выяснить, когда с помощью действия B на вектор $v(d_1, R_1)$ можно получить вектор $v(d_2, R_2)$ для каких-нибудь d_2, R_2 . Заметим, что при этом $I(R_1) = I(R_2)$, и поэтому можно рассматривать все допустимые грани отдельно. Число орбит в замыкании данной будет конечно тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани существует лишь конечное число орбит стандартных векторов. Этим мы займемся в двух последних пунктах работы.

Для любой алгебраической группы H , действующей на неприводимом алгебраическом многообразии X , обозначим через $d(X, H)$ минимальную коразмерность орбиты группы H в X . Модальностью действия $H : Y$ для произвольного алгебраического многообразия Y называется число $\text{mod}(Y, H)$ – максимум по всем неприводимым инвариантным подмногообразиям $X \subset Y$ величины $d(X, H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При действии $G : V$ для любого $v \in V$ верно, что

$$\text{mod}(\overline{Gv}, G) = \text{mod}(\overline{Bv}, B) \leq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для допустимой грани $I(R)$ рассмотрим пространство

$$\{(\alpha_i x^{n_i})_{i \in I(R)}\}.$$

На нем действует тор $(\mathbb{C}^*)^{k+1}$ по формуле $(\alpha_i)_{i \in I(R)} \mapsto (\chi'_i(t)\alpha_i)_{i \in I(R)}$. Рассмотрим в этом пространстве кривую

$$v(c, R) = \left(\prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq c} (a - c)^{e_i(a)} x^{n_i} \right)_{i \in I(R)}, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Если эта кривая пересекает бесконечное число $(\mathbb{C}^*)^{k+1}$ -орбит, то $\text{mod}(\overline{Bv}, B) = 1$. Если же для всех допустимых граней $v(c, R)$ пересекает лишь конечное число орбит тора, то модальность равна нулю.

Доказательство того, что $\text{mod}(\overline{Gv}, G) = \text{mod}(\overline{Bv}, B)$, проводится аналогично лемме 3.

Заметим, что неравенство из предложения 1 следует также из работы Э. Б. Винберга [4].

3. Аффинный случай. Найдем критерий конечности числа B -орбит в $\overline{Bv}$. Почти любая B -орбита в $\overline{Bv}$ содержит $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t)v$ для γ , описанных в лемме 1, с $p = q < 0$, $e_i(c) = 0 \quad \forall i$. Почти для всех орбит в замыкании этот предел имеет вид $v(c, R)$. Осталось только установить, в каких случаях можно с помощью действия B получить из одного вектора стандартного вида другой.

Для получения критерия воспользуемся следующим хорошо известным фактом (см., например, [5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $V = \mathbb{C}^m$, k -мерный тор T действует на V умножением i -й координаты на характер χ_i . Тогда две точки $x = (x_1, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, \dots, y_m)$ такие, что $x_1 \cdots x_m y_1 \cdots y_m \neq 0$, находятся в одной T -орбите тогда и только тогда, когда для любого $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}^m$ такого, что $\beta_1 \chi_1 + \cdots + \beta_m \chi_m = 0$, выполнено $x_1^{\beta_1} \cdots x_m^{\beta_m} = y_1^{\beta_1} \cdots y_m^{\beta_m}$.

ТЕОРЕМА 1. Число G -орбит в замыкании G -орбиты вектора

$$v = \left(x^{n_i - e_i(\infty)} \prod_{a \in \mathbb{C}} (ax + y)^{e_i(a)} \right)_{i=1}^s \in V$$

конечно тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $I(R)$ максимальной размерности и любого $\beta = (\beta_i)_{i \in I(R)}$ такого, что

$$\sum_{i \in I(R)} \beta_i \chi_i = 0,$$

выполнены условия (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3 следует, что достаточно выяснить, в каких случаях число B -орбит в $\overline{Bv}$ конечно, т.е., подействовав на вектор $v(d_1, R)$ элементом $b \in B$, можно получить бесконечное число векторов $v(d_2, R)$ для какого-нибудь d_1 . Имеем

$$\begin{aligned} & \left(t, \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ 0 & \kappa^{-1} \end{pmatrix} \right) p_i(d_1) x^{n_i} = p_i(d_2) x^{n_i}, \\ & \chi'_i(t, \kappa) \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq d_1} (a - d_1)^{e_i(a)} = \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq d_2} (a - d_2)^{e_i(a)}. \end{aligned}$$

Вследствие уравнения грани $\langle \chi'_i, R \rangle = 0$ имеем $\chi'_i(t, \kappa) = \chi_i(t')$ ($\chi'_i(t, \kappa) = t_1^{\alpha_{1i}} \cdots t_k^{\alpha_{ki}} \times \kappa^{n_i} = t_1^{\alpha_{1i}} \cdots t_k^{\alpha_{ki}} \kappa^{-\alpha_{1i} r_1 - \cdots - \alpha_{ki} r_k} = (t_1 \kappa^{-r_1})^{\alpha_{1i}} \cdots (t_k \kappa^{-r_k})^{\alpha_{ki}} = \chi_i(t')$). Следовательно,

$$\chi_i(t') \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq d_1} (a - d_1)^{e_i(a)} = \prod_{a \in \mathbb{C}, a \neq d_2} (a - d_2)^{e_i(a)}.$$

Таким образом, действие сводится к действию тора, и из предложения 2 следует, что в одной орбите содержится бесконечно много векторов вида $v(d, R)$ тогда и только тогда, когда $\prod_{i \in I(R)} \prod_{a \in \mathbb{C}} (a - c)^{e_i(a)\beta_i}$ не зависит от c для любого β такого, что $\sum_{i \in I(R)} \beta_i \chi_i = 0$. Это, в свою очередь, равносильно тому, что для любого такого β и любого $a \in \mathbb{C}$ выполнено $\sum_{i \in I(R)} e_i(a) \beta_i = 0$.

Чтобы ограничить множество проверяемых граней, заметим, что любая допустимая грань содержится в допустимой грани максимальной размерности и что из выполнения условия (1) для большей грани следует его выполнение для меньшей.

Опишем те G -модули, для которых в замыкании любой орбиты число орбит конечно.

Для данной допустимой грани максимальной размерности назовем ее *матрицей характеров* матрицу, в столбцах которой записаны координаты характеров χ'_i по $i \in I(R)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. В $\overline{Gv}$ содержится конечное число орбит для любого $v \in V$ тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $I(R)$ конуса M характеры χ_i ($i \in I(R)$, $n_i \neq 0$) линейно независимы над $\mathbb{Q}$. В частности, это верно, если конус M не содержит допустимых граней.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 в $\overline{Gv}$ содержится конечное число орбит тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $I(R)$ вектор $(e_i(c))_{i \in I(R)}$, называемый *вектором кратностей*, для любого c является рациональной линейной комбинацией строк матрицы характеров. Заметим, что E_j (вектор с единицей на j -м месте и нулями на остальных) может иметь вид $(e_i(c))_{i \in I(R)}$ для некоторого c тогда и только тогда, когда $j \in I(R)$ и $n_j \neq 0$. С другой стороны, любой вектор кратностей является линейной комбинацией векторов E_j .

4. Проективный случай.

ТЕОРЕМА 2. Число G -орбит в замыкании G -орбиты точки

$$\langle v \rangle = \left\langle \left(x^{n_i - e_i(\infty)} \prod_{a \in \mathbb{C}} (ax + y)^{e_i(a)} \right)_{i=1}^s \right\rangle \in \mathbb{P}(V)$$

конечно тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $J(R)$ максимальной размерности многогранника C и любого целочисленного вектора $\beta = (\beta_i)_{i \in J(R)}$ такого, что

$$\sum_{i \in J(R)} \beta_i \chi_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i \in J(R)} \beta_i = 0,$$

выполнены условия (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения критерия в случае проективного действия $G : \mathbb{P}(V)$ достаточно рассмотреть линейное действие большей группы $\mathbb{C}^* \times G$ на V с характерами $\hat{\chi}_i = (1, \chi_i) \in X((\mathbb{C}^*)^{k+1})$. Поставим в соответствие этому действию конус M .

ЛЕММА 4. Число орбит в замыкании орбиты данной точки $\langle v \rangle \in \mathbb{P}(V)$ конечно тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $I(R)$ максимальной

размерности конуса M и любого $\beta = (\beta_i)_{i \in I(R)}$ такого, что

$$\sum_{i \in I(R)} \beta_i \chi_i = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i \in I(R)} \beta_i = 0,$$

выполнены условия

$$\sum_{i \in I(R)} e_i(a) \beta_i = 0 \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это прямое следствие теоремы 1.

Если перейти от характеров $\widehat{\chi}_i$ обратно к характеристам χ_i , то несложно заметить, что допустимой грани $I(R)$ конуса M будет соответствовать множество вида $J(R) := \{i \mid (\chi'_i, R) = \min_j (\chi'_j, R)\}$ – допустимая аффинная грань сечения конуса плоскостью, в которой первая координата равна 1.

В случае $G = SL_2$ многогранник C есть отрезок, единственной допустимой гранью которого является его правая вершина. Теорема 2 показывает, что $SL_2 \langle v \rangle$ содержит конечное число G -орбит тогда и только тогда, когда для любой линейной формы кратность ее вхождения во все компоненты максимальной степени вектора v одинакова. Это согласуется с результатом Ф. Пауэра [1; предложение 4].

СЛЕДСТВИЕ 2. В $\overline{G \langle v \rangle}$ содержится конечное число орбит для любого $\langle v \rangle$ тогда и только тогда, когда для любой допустимой грани $J(R)$ многогранника C характеры $\widehat{\chi}_i$ ($i \in J(R)$, $n_i \neq 0$) линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напрямую вытекает из следствия 1.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим действие $SL_2 : \mathbb{P}(V_{n_1}) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_{n_m})$. Здесь в замыкании любой SL_2 -орбиты содержится конечное число орбит. Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть действие $SL_2 \times (\mathbb{C}^*)^m$ на $V = V_{n_1} \oplus \cdots \oplus V_{n_m}$ с характером χ_i на V_{n_i} , где $\chi_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $\chi_m = (0, \dots, 0, 1)$, и применить следствие 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Pauer, “Closure of SL_2 -orbits in projective spaces”, *Manuscripta Math.*, **87**:3 (1995), 295–309.
- [2] В. Л. Попов, “Структура замыканий орбит в пространствах конечномерных линейных представлений группы SL_2 ”, *Матем. заметки*, **16**:6 (1974), 943–950.
- [3] Х. Крафт, *Геометрические методы в теории инвариантов*, Мир, М., 1987.
- [4] Э. Б. Винберг, “Сложность действий редуктивных групп”, *Функц. анализ и его прил.*, **20**:1 (1986), 1–13.
- [5] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series, **8**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

Е. В. Шаройко

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: sharoyko@mccme.ru

Поступило

03.11.2005

Исправленный вариант

30.08.2006